Math. U.
90 m. -1

<36603243570018

<36603243570018

Bayer. Staatsbibliothek

R

Mathematiſches Wörterbuch

oder

Erklärung

der

Begriffe, Lehrſätze, Aufgaben und Methoden

der Mathematik

mit den nöthigen Beweiſen

und literariſchen Nachrichten begleitet

in alphabetiſcher Ordnung

von

Georg Simon Klügel

Profeſſor der Mathematik und Phyſik auf der Friedrichs-Univerſität zu Halle, Mitgliede der Akademien und Societäten der Wiſſenſchaften zu Petersburg, Berlin, Göttingen und Frankfurt an der Oder, Ehrenmitgliede der ökonomiſchen Geſellſchaft zu Leipzig.

Erſte Abtheilung

Die reine Mathematik.

Erſter Theil

von A bis D

mit acht Kupfertafeln.

Leipzig

im Schwickertſchen Verlage 1803.

18 B

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Vorrede.

Wörterbücher über wiſſenſchaftliche Kenntniſſe ſind, ungeachtet der ungünſtigen gegen ſie oft gefällten Urtheile, dennoch ſehr beliebt geblieben, weil ſie denjenigen, die eine genaue, zuſammenhangende Einſicht in einem Fache ſich zu verſchaffen nicht Zeit oder Fähigkeit haben, ein bequemes Hülfsmittel ſind, ſich von einzelnen Materien nach ihren Bedürfniſſen zu unterrichten. Dadurch iſt ſelbſt in der Mathematik, ſo vorzüglich ſie auch einer ſyſtematiſchen Behandlung fähig iſt, die nach der Folge der Buchſtaben zerſtückte Anordnung ihrer Lehren eine brauchbare Form des Vortrages, deſto mehr, weil es in dieſer Wiſſenſchaft ſchwieriger iſt, über die Anfangsgründe hinaus zugehen, und aus den ausführlichern Werken einzelne Unterſuchungen herauszunehmen, ohne ſie ganz zu

ſtudieren. Die mathematiſchen Lehren machen nicht eine Folge wie die Glieder einer Kette aus, ſondern mehrere Ketten, die durch gewiſſe Hauptglieder verbunden ſind. Man kann alſo einzelne Sätze oder kleine Syſteme von Lehrſätzen recht gut abgeſondert aufſtellen, wenn man von denjenigen allgemeinen Sätzen ausgeht, an welche ſie ſich knüpfen. Dadurch wird der Zuſammenhang deſto deutlicher, welchen man in einem Syſtem erſt aufſuchen muß. Der ſyſtematiſche Vortrag muß oft Materien, welche dem Inhalte nach zuſammen gehören, trennen, weil die Sätze, worauf die ſchwerern unter ihnen beruhen, vorher erwieſen werden müſſen, ehe ſie aufgeſtellt werden können. In den Artikeln eines Wörterbuchs kann man hingegen unter eine Rubrik alles bringen, was dahin gehört, das ſchwerere wie das leichtere. Selbſt für Geübte gewährt ein Wörterbuch mehr als eine Bequemlichkeit zum Gebrauch.

Da ich hier die Vortheile der alphabetiſchen Anordnung aus einander ſetze, weil ich ein mathematiſches Wörterbuch auszuarbeiten übernommen habe, ſo will ich doch dadurch dem ſyſtematiſchen Vortrage

nichts vergeben; vielmehr empfehle ich dem Leſer die zerſtreuten, ſich auf einander beziehenden Artikel in einer guten Ordnung zuſammen zu ſtellen, wozu ich am Ende durch ein ſyſtematiſches Verzeichniß der vornehmſten Artikel behülflich ſeyn werde. In dem Artikel, Analyſis als Wiſſenſchaft, habe ich ſchon einen Abriß über den Inhalt der Analyſis endlicher Größen mitgetheilt, nach welchem man ſich die dazu gehörigen Lehren aus dem Werke bekannt machen mag. Ich werde, ſo wie es in dieſem erſten Theile geſchehen iſt, das zuſammengehörige immer in einen Artikel zu einander bringen, wenn auch dieſer dadurch faſt zu einer förmlichen Abhandlung erwachſen ſollte, werde aber durch bequeme Abtheilungen für die leichte Ueberſicht des Ganzen ſorgen.

Die reine oder abſtracte Mathematik habe ich von der angewandten getrennt, und ihr eine eigene Abtheilung, nach der alphabetiſchen Folge der zu ihr gehörigen Artikel, gewidmet. Dieſes war nöthig, damit der Leſer die theoretiſchen Sätze, wovon bey der Anwendung Gebrauch gemacht wird, alle zur Hand hätte. Es wäre zu unbequem aus vielen

Bänden die Hülfsſätze zuſammen zu ſuchen. Auch würde mich die Ausarbeitung ſo vieler ungleichartigen Materien zu ſehr ermüdet und zerſtreut haben.

Es ſcheint zuträglich, daß auch die phyſiſche angewandte Mathematik von der techniſchen getrennt werde, und jede eine beſondere Abtheilung erhalte. Ein allgemeines Regiſter der Artikel aus allen drey Abtheilungen wird jeden leicht nachweiſen.

Dieſer erſte Theil iſt nicht ſo weit fortgerückt, als ich es bey dem Anfange der Ausarbeitung erwartete. Es ſind aber in demſelben viele Materien zuſammen gekommen, die eine ausführlichere Behandlung erforderten. Die literariſchen Nachrichten haben hier auch beträchtlich vielen Raum eingenommen.

Dieſes Wörterbuch iſt zunächſt für ſolche beſtimmt, die mit den erſten Anfangsgründen ſchon bekannt ſind, und ihre Kenntniß über dieſe hinaus erweitern wollen. Es ſoll ihnen mehr leiſten, als ſelbſt ausführliche mathematiſche Lehrbücher, und wird dadurch, bey dem gegenwärtigen großen Reichthum der

Mathematik einen nicht geringen Umfang erhalten. Bloß die Sätze und die Auflöſungen der Aufgaben hinzuſtellen, und wegen der Gründe auf andere Schriften zu verweiſen, wäre für diejenigen Leſer, die dieſe Schriften nicht zur Hand hätten, ſehr unbefriedigend. Mathematiſche Beweiſe laſſen ſich nicht ſo leicht nachſchlagen und verſtehen, als Citate in hiſtoriſchen und philologiſchen Schriften. Auf die gute Form der Beweiſe, welche ich mir immer ſehr habe angelegen ſeyn laſſen, kommt auch viel an. Ohne die Beweiſe und die nöthigen Erörterungen verſteht man oft nicht die Sätze und die Auflöſungen der Aufgaben. Die Mathematik iſt keine Wiſſenſchaft zum Auswendiglernen. Bisweilen habe ich, bey umſtändlichern Beweiſen und weniger wichtigen Sätzen, auf andere Schriften verwieſen, um den Raum zu erſparen. Die Beweiſe der Elementarſätze habe ich weggelaſſen, oder nur kurz in dem Vortrage angedeutet. Welchen Umfang ein Artikel des Wörterbuchs zu erhalten hat, muß in jedem Falle beurtheilt werden. Was lehrreich, brauchbar oder auf irgend eine Art kunſtreich iſt, darf nach meinem Ermeſſen in einem Werke, das vielen die Stelle einer Bibliothek vertreten ſoll, nicht fehlen.

Was veraltet iſt, muß darin zwar, wie in einem Archiv aufbewahrt, aber ſehr kurz abgethan werden.

Literariſche Nachrichten, beſonders in Rückſicht der Sachen ſelbſt, habe ich, wo es erheblich und mir thunlich war, beygebracht, und werde es mit Dank erkennen, wenn gelehrte Leſer mir beſonders in dieſem Fache Ergänzungen mittheilen wollen.

In der angewandten Mathematik werde ich dasjenige, was zu der Naturbeſchaffenheit der Dinge, oder zu techniſchen Einrichtungen gehört, nur in Rückſicht auf die mathematiſchen Unterſuchungen anführen. Dieſe werden der Hauptzweck der Behandlung ſeyn. Dadurch wird ſich dieſer Theil des Wörterbuchs von phyſikaliſchen und techniſchen Werken dieſer Form unterſcheiden.

Ich wünſche, daß das von mir unternommene Werk zur Ausbreitung mathematiſcher Kenntniſſe beförderlich werde.

Halle, im Junius
1803.

Mathematiſches Wörterbuch,

oder

Erklärung der Begriffe, Lehrſätze, Aufgaben und Methoden der Mathematik, mit literariſchen Nachrichten, in alphabetiſcher Ordnung.

Erſte Abtheilung.

Arithmetik, Analyſis und Geometrie, die niedere und die höhere.

A.

Abaciſta, in dem mittlern Zeitalter ein Rechner. S. den folgenden Artikel.

Abacus, ein Wort griechiſchen Urſprungs, welches einen Tiſch bedeutet, worauf allerley Gefäße, nutzbare, oder Kunſt- und Prachtſtücke, aufgeſtellt wurden. Zweytens iſt es eine oder andere Art von Rechenbrett, deſſen ſich die Alten bedienten, weil ihre Zahlzeichen zu arithmetiſchen Operationen ungeſchickt waren. Von dieſen und ähnlichen Einrichtungen handelt der Artikel, inſtrumental Arithmetik.. Drittens hieß Abacus in den mittlern Zeiten die Rechnung mit dekadiſchen Ziffern. Der in dem Artikel: Zahlzeichen, angeführte Leonardus von Piſa (um 1200) nennt ſein Buch über die dekadiſche Rechenkunſt, Liber abaci. Jodocus Clichthoväus gab 1503 des Jacobi Fabri Introductio in Boëthii Arithmeticam heraus, welcher er eine praktiſche Arithmetik bey-

fügte, unter dem Titel: Praxis numerandi, quem Abacum vocant. Daher hießen Rechner Abaciſtae. Ein Chronikenſchreiber, Wilhelm von Malmesbury, im 12ten Jahrh., ſagt von dem Mönch Gerbert, der unter dem Namen Sylveſter II. Papſt ward, daß er von den Saracenen den Abacus zuerſt erhalten, und Regeln darüber mitgetheilt habe, welche die ſchwitzenden Abaciſten kaum verſtehen konnten. Ein geſchickter Rechner gegen das Ende des vierzehnten Jahrhunderts, Paulus de Abaco, erhielt daher ſeinen Beynahmen. **Lucas de Burgo**, der älteſte arithmetiſche Schriftſteller unter denen, die durch den Druck gemein gemacht ſind, ſagt, daß das Wort Abacus nach einigen aus Modus arabicus gemacht ſey, von andern aus dem Griechiſchen hergeleitet werde. Jene Ableitung iſt doch etwas beſſer, als die von einem phöniziſchen Worte Abac, welches Staub bedeutete, weil man Tafeln mit feinem Sand oder Staub beſtreuet habe, um darauf Ziffern oder Zahlzeichen zu zeichnen, die man nach vollführter Rechnung gleich wieder auswiſchen konnte. — Viertens bey den Neuern bedeutet Abacus eine Tabelle zum Gebrauch bey Rechnungen, als Abacus Pythagoricus für das Einmahleins; Abacus Logiſticus für die Sexageſimalrechnung; Abacus numerorum primorum, eine Tafel der Primzahlen; Abacus Sinuum, eine Tafel der Vielfachen der Sinus bis zum Neunfachen für die einzelnen Grade, in Lamberts Zuſätzen zu den — Tabellen.

Abgekürzte Pyramidalzahl. S. Pyramidalzahl.

Abgekürzte Pyramide. S. Pyramide.

Abgekürzter Kegel. S. Kegel.

Abgeſonderte Theile in einem rechtwinklichten ſphäriſchen Dreyeck. S. Nepers Regel zur Berechnung rechtwinkl. ſphär. Dreyecke.

Abkürzung, iſt die Vertauſchung eines zuſammengeſetzten algebraiſchen Ausdrucks mit einem einfachen Zeichen, um die Rechnung zu erleichtern, und ſie beſſer überſehen zu können. Wenn z. B. ein Glied einer Gleich-

ung die Form $\frac{(a+b)(c+d)}{e(f+g)}x^2$ hat, ſo ſetze man dafür Ax^2 oder px^2. In der combinatoriſchen Analyſis werden ſehr viele Abkürzungen gebraucht, die von Hindenburg ſehr zweckmäßig eingerichtet ſind, um eine verwickelte Zuſammenſetzung möglichſt faßlich zu machen. Eine ganze Gleichung wird in der höhern Analyſis durch ein einziges Symbol angedeutet, wie $X=0$ wo X ein aus einer unbekannten x und gegebenen Größen zuſammengeſetzter Ausdruck iſt. Gewiſſe Formen von Größen, z. B. die Binomialcoefficienten die Bernoulliſchen Zahlen, mögen vortheilhaft mit eigenen Symbolen bezeichnet werden, um diejenigen Größen, zu deren Bildung ſie gebraucht werden, leicht darzuſtellen.

Abgewickelte Linie. S. Evolute.

Ablange Rundung. S. Oval.

Ablange Vierung (Oblongum) iſt ein Rechteck mit ungleichen Seiten, welches gewöhnlich ein Rechteck ſchlechtweg heißt.

Ablanges Sphäroid. S. Sphäroid.

Abmeſſung (Dimenſio) iſt eine Linie, nach welcher die Ausdehnung einer geometriſchen Größe gemeſſen werden mag. In dem geometriſchen Körper kann man durch jeden Punct drey Linien ziehen, deren jede auf die beiden andern ſenkrecht ſteht, und die Ausdehnung des Körpers nach dieſen drey Linien meſſen oder ſich auch nur vorſtellen. Dieſe drey Meßlinien heißen in beſondern Rückſichten **Länge, Breite Dicke** oder **Höhe.** Ein Körper iſt demnach eine Ausdehnung von drey Abmeſſungen oder Dimenſionen. Auf einer ebenen Fläche laſſen ſich durch einen Punct nur zwey auf einander ſenkrechte Linien ziehen, die oft Länge und Breite heißen; auf einer krummen Fläche eben ſo durch einen Punct nur zwey krumme (oder eine krumme und eine gerade) Linien, die ſich, in Betracht der Lage ihrer berührenden Linien, unter einem rechten Winkel ſchneiden. Eine Fläche iſt daher eine Ausdehnung

von zwey Abmeſſungen. Eine Linie, gerade oder krumme, iſt eine Ausdehnung von einer einzigen Abmeſſung.

Man hat den Begriff von Dimenſion oder Abmeſſung auch auf Rechnungsgrößen übergetragen. Eine Fläche iſt dem Product zweyer Zahlen proportional, welche bey Rechtecken ihre beiden Seiten ſind. Daher ſieht man das Product ab zweyer Zahlen, a, b, als gleichgültig mit dem Rechtecke an, deſſen Seiten ſich wie die Zahlen a, b verhalten, und giebt den Factoren, a, b, eine Abmeſſung, dem Producte ab zwey Abmeſſungen. Eben ſo, da ein Körper dem Product dreyer Zahlen proportional iſt, die für ein ſenkrechtes Parallelepipedum die drey Seitenlinien deſſelben ſind, ſieht man das Product abc dreyer Zahlen, a, b, c, als gleichgültig mit einem Körper an, und giebt demſelben drey Abmeſſungen, den Factoren eine einzige. Ob nun gleich ein Ausgedehntes nicht mehr als drey Abmeſſungen haben kann, ſo fährt man doch bey Rechnungsgrößen nach der Analogie fort, ihnen ſo viele Abmeſſungen beyzulegen, als ſie Factoren haben, denen man eine einzige Abmeſſung giebt. So iſt abcd eine Größe von vier, abcde, von fünf Abmeſſungen. Daher ſind auch die Benennungen für die Potenzen über die dritte hinaus aus der Geometrie genommen, ob man ſie gleich gar nicht geometriſch darſtellen kann. (S. Potenz §. 6. 8.) Die Factoren einer Größe betrachtet man als Abmeſſungen, wenn man ſie auf keine Einheit bezieht, in Gegenſatz gegen numeriſche Factoren, ſo daß dadurch jene Größe eine beſtimmte Form erhält, die entweder mit einer der drey geometriſchen Formen übereinſtimmt, oder analogiſch gebildet iſt. Größen von vier oder mehr Dimenſionen kann man als ein Glied eines zuſammengeſetzten Verhältniſſes, das aus Verhältniſſen geometriſcher Größen entſteht, betrachten.

Eine gebrochne Größe hat ſo viele Abmeſſungen als der Unterſchied der Abmeſſungen des Zählers und Nenners anzeigt. Z. B. der Bruch $\frac{x^5 + ax^4 + b^3x^2 + c^5}{x^2 + dx}$

hat drey Abmeſſungen. Hat der Nenner mehr Abmeſſungen, als der Zähler, ſo iſt die Anzahl der Dimenſionen negativ. Jener Bruch umgekehrt hat — 3 Dimenſionen.

Iſt die Anzahl der Abmeſſungen im Zähler und Nenner gleich groß, ſo iſt der Bruch eine Größe von o Abmeſſungen, das iſt eine bloße Zahl, z. B. $\frac{ab}{cd}$ iſt die Zahl, welche angiebt, wie vielmahl die Fläche cd in der ab enthalten iſt, wenn nämlich dieſe Producte Flächen darſtellen.

Eine Zahl iſt eine Größe von o Abmeſſungen. Sie kann als Multiplicator oder Diviſor nur die Größe (Quantität), nicht die Beſchaffenheit ändern.

Die Quadratwurzel aus der Größe a iſt eine Größe von der Abmeſſung $\frac{1}{2}$, wenn a eine Größe von einer Abmeſſung iſt. Denn dieſe würde zwey Abmeſſungen haben, wenn der Wurzel eine beygelegt würde. So iſt $\sqrt[3]{a}$ eine Größe von der Abmeſſung $\frac{1}{3}$. Nach derſelben Analogie iſt $\sqrt[n]{a^m}$ oder $a^{\frac{m}{n}}$ eine Größe von $\frac{m}{n}$ Abmeſſungen.

Bey der Anwendung der Rechnung auf die Geometrie müſſen alle Theile des Ausdrucks einer Größe gleich viele Abmeſſungen haben, oder homogen ſeyn. Denn nur gleichartige Größen laſſen ſich zuſammen zählen, oder eine von der andern abziehen.

In einer Formel für geometriſche Größen können ſehr wohl Producte von mehr als drey Abmeſſungen vorkommen, nur werden dieſe immer durch andere Producte dividirt ſeyn, ſo daß der Unterſchied der Dimenſionen im Dividendus und Diviſor nicht über Drey groß iſt, wenn die ganze Formel eine geometriſche Größe darſtellen ſoll. So iſt $\frac{abcd}{ef}$ eine Fläche. Denn wenn man ſie ſo dar-

ſtellt $\frac{ab}{ef} \times cd$, ſo iſt der Bruchfactor eine bloße Zahl. Daher iſt auch $\frac{abcd}{ef + gh}$ eine Fläche, da der Diviſor hier ebenfalls eine Fläche oder Größe von zwey Abmeſſungen bedeutet. Der Bruch $\frac{x^6 + ax^4 + b^3x^2 + c^6}{x^2 + dx}$ ſtellt einen Körper dar.

Wenn eine Linie oder eine Fläche oder ein Körper zur Einheit genommen wird, um die derſelben gleichartigen Größen dadurch auszudrucken, ſo verſchwindet die Homogeneität, wird aber wieder hergeſtellt, wenn in jedem Gliede einer Formel eine ſolche Potenz der Einheit, die alsdann ihr Symbol bekommt, zugeſetzt wird, daß in allen Gliedern die Anzahl der Abmeſſungen gleich groß iſt. Bey trigonometriſchen Rechnungen kommt dies häufig vor. Die Sinus, Tangenten und Secanten ſind für den Gebrauch der Rechnung bloße Zahlen, die ſich auf einen Halbmeſſer, gleich der Einheit, beziehen. Z. B. der numeriſche Sinus eines Winkels ſey $= x$, der Sinus des dreyfachen Winkels $= z$, ſo iſt $z = 3x - 4x^3$. (Goniometrie, IV.) Soll hieraus eine geometriſche Formel hergeleitet werden, ſo hat man $\frac{x}{r}$ für x, und $\frac{z}{r}$ für z zu ſetzen, wenn r den Halbmeſſer für die Kreisbogen zu den Sinus andeutet. Dadurch erhält man die Gleichung $r^2z = 3r^2x - 4x^3$, wo alle Theile drey Dimenſionen haben.

Auſſer der Trigonometrie iſt es ſelten rathſam, eine geometriſche Größe zur Einheit zu machen, und dafür 1 zu ſchreiben. Die Formeln verlieren an der Symmetrie; man ſieht die Relation der andern Größen gegen die zur Einheit genommnene weniger deutlich ein; und man entbehrt den Vortheil, Rechnungs- oder Schreibfehler in Betreff der Factoren durch die Ungleichheit der Dimenſionen zu entdecken. In der Aſtronomie pflegt oft der mittlere Ab-

ſtand der Erde von der Sonne zur Einheit genommen zu werden.

Der Verfaſſer des Artikels, Dimenſion, in der Encyclop. méthodique, d'Alembert, führt an, daß jemand den Gedanken gehabt hätte, die Zeit als eine vierte Dimenſion einzuführen, ſo daß das Produkt aus einer körperlichen Größe in die Zeit eine Größe von vier Dimenſionen vorſtelle. Er fügt hinzu, man könne dagegen zwar etwas einwenden, doch verdiene der Gedanke bemerkt zu werden, wenn es auch nur wegen der Neuheit wäre. Allein man hat hiebey nicht bedacht, daß Zeit ſich allemal auf eine Einheit bezieht, und daß daher mit einer Zeit multipliciren, zugleich mit dieſer Zeiteinheit dividiren iſt, daher in der That mit einer Größe von der Dimenſion Null oder einer bloßen Zahl multiplicirt wird.

Abſchnitt (Segmentum) einer Figur iſt ein Theil ihrer Fläche, der von einer geraden, durch zwey Puncte des Umfanges gezogenen Linie abgeſchnitten wird. Iſt der Umfang krummlinicht, ſo wird der Abſchnitt durch einen Bogen der krummen Linie und die gerade Linie begränzt. Eine Figur mit einer in ſich zurücklaufenden Umfangslinie wird durch die ſchneidende Linie in zwey Abſchnitte getheilt. Ein Kreis wird durch den Durchmeſſer in zwey gleiche Abſchnitte getheilt; durch jede andere ſchneidende Linie in zwey ungleiche. Den Inhalt des Abſchnittes eines Kreiſes oder einer andern krummlinichten Figur zu finden, lehrt die Integralrechnung. (S. Quadratur.)

Abſchnitt eines Körpers, iſt ein Theil deſſelben, der von einer durch den Körper gelegten Ebene abgeſchnitten wird. Der Abſchnitt einer Kugel wird durch einen Theil ihrer Oberfläche und eine Kreisfläche begränzt, weil die Durchſchnitte einer Kugel mit einer Ebene Kreisflächen ſind. Den Inhalt eines körperlichen Abſchnittes zu finden, gehört zu den Anwendungen der Integralrechnung. (S. Cubatur.) Der Abſchnitt eines Cylinders oder Kegels, an deſſen krummen Oberfläche kein Theil

ganz cylindriſch oder koniſch iſt, heißt ein hufförmiger Abſchnitt, und iſt ein etwas ſchweres Beyſpiel der Cubatur. In der Baukunſt kommt eine Anwendung davon vor. (S. hufförmiger Abſchnitt.)

Abſchnittswinkel (Angulus Segmenti) iſt der von dem Umfange eines Kreiſes und einer Chorde eingeſchloſſene Winkel, welchen die berührende Linie an dem Durchſchnitte des Kreiſes und der Chorde mit dieſer macht. In (Fig. 1. T. 1.) iſt ADBE ein Kreis, AB eine Chorde, FAG die in A berührende, ſo iſt GAB der Winkel des Abſchnittes AEB, und FAB der Winkel des Abſchnittes ADB.

Der **Winkel in einem Abſchnitte** (Angulus in Segmento) iſt der Winkel, deſſen Spitze in den Bogen des Abſchnittes fällt, und deſſen Schenkel durch die Endpuncte deſſelben gehen. So iſt der ſpitze ADB der Winkel in dem größeren Abſchnitte, und der ſtumpfe AEB der Winkel in dem kleinern Abſchnitte.

Der Winkel GAB iſt gleich dem W. ADB und FAB dem AEB. (Euklides III. 32.)

Abſciſſe. S. Coordinaten.

Abſolute Zahl oder Größe überhaupt iſt diejenige, bey welcher ſchlechtweg nur auf die Quantität geſehen wird, ohne eine Beziehung auf andere bey ihr zu beachten, als ob ſie poſitiv oder negativ zu nehmen, wenn ſie eine Linie iſt, nach welcher Gegend ſie zu ziehen ſey. Wachsthum einer abſoluten Größe iſt Vergrößerung der Quantität; Abnehmen, Verminderung derſelben, dagegen eine negative Größe als wachſend betrachtet wird, wenn ihre Quantität durch Addition einer poſitiven Größe vermindert wird, und als abnehmend bey der Addition einer negativen.

Abſolute Zahl wird auch das gegebene Glied einer Gleichung genennt, welches ſo groß iſt als alle übrigen Glieder zuſammen genommen, wenn es nämlich einen Theil der Gleichung allein ausmacht. Als in der Gleich-

ung $x^2 + 12x = 85$ iſt 85 die abſolute Zahl, da ſie $= 25 + 12 . 5$ iſt. Vita nennt dieſes Glied das Homogeneum comparationis. Eigentlicher ſollte dieſes Glied nur das gegebene heißen. Stifel nennt es die ledige Zahl, in der Ausgabe der Coß von Rudolph.

Abſolut wird auch in der Lehre von der Bewegung vom Raum und Bewegung gebraucht.

Abſtand eines Punctes von einer geraden Linie oder Ebene iſt das Perpendikel, welches von dem Puncte auf die Linie oder Ebene gelaſſen wird, als die kürzeſte unter allen Linien, die von dem Puncte dahin gezogen werden können. Iſt die Linie eine krumme, ſo kann man entweder gar nicht nach einem Abſtande des Punctes von derſelben fragen, oder man muß darunter eine gerade Linie verſtehen, welche die krumme Linie unter einem rechten Winkel ſchneidet. Dieſe iſt die kürzeſte von allen an ſie gezogenen, wenn nicht etwa mehrere, die krumme Linie ſenkrecht ſchneidende, Linien von dem Puncte aus gezogen werden können. Mit dem Abſtande eines Punctes von einer krummen Fläche iſt es eben ſo beſchaffen.

Abſtand einer Linie von einer ihr parallelen iſt die ſenkrechte von einem Punkte jener auf dieſe. Dieſe iſt allenthalben von gleicher Größe. S. Parallelen.

Abſtand zweyer Puncte auf einer Kugelfläche iſt der Bogen eines großen durch ſie gelegten Kreiſes, und zwar der kleinere zwiſchen ihnen enthaltene.

Abſtract iſt, was unabhängig von phyſiſchen Beſchaffenheiten gedacht wird.

Abſtracte Mathematik, oder die reine, iſt der Theil dieſer Wiſſenſchaft, worin die Größe und ihre Formen an und für ſich, als bloß in der Vorſtellung vorhanden, betrachtet werden. Sie begreift die Arithmetik, Analyſis und Geometrie. Doch möchte man auch die abſtracte Lehre von der Bewegung dahin zu rechnen haben, ſo fern man dabey bloß hypothetiſch verfährt, ohne Anwendungen auf die Wirklichkeit. S. Mathematik.

Abſtracte Zahl iſt eine ſolche, bey welcher die Einheit unbeſtimmt gelaſſen wird, was man auch unbenannte Zahl nennt. Z. B. 12 iſt eine abſtracte Zahl, 12 Fuß eine concrete oder benannte Zahl.

Abſurd (Abſurdum), ein Widerſpruch der Folgerungen gegen die gemachte Annahme, oder gegen einen Grundſatz oder erwieſenen Satz. Bey einigen elementariſchen Sätzen, und oft bey dem Umkehren eines Satzes wird die Beweisart gebraucht, daß man zeigt, das Gegentheil des behaupteten Satzes ſey unmöglich, der Satz alſo wahr, wenn nämlich entweder nur das eine oder das andre Statt finden kann. Man nennt ſie eine reductio ad abſurdum, oder einen indirecten, oder apagogiſchen Beweis. In dem erſten und dritten Buche der Elemente von Euklides finden ſich viele Beyſpiele dieſer Art. Z. B. in dem 19. S. des 1. B. wird gezeigt, daß, wenn in einem Dreyeck dem größern Winkel nicht die größere Seite gegen über läge, der als der größere angenommene Winkel der kleinere ſeyn müßte, ſo daß dadurch die Annahme aufgehoben wird.

Abundans numerus, überſchießende Zahl, iſt diejenige, deren ganze Theile mit Ausſchluß ihrer ſelbſt, die Einheit aber mit genommen, zuſammen größer ſind als die Zahl ſelbſt, z. B. die Zahl 30 hat die einfachen Factoren, 1, 2, 3, 5. Die Summe ihrer Theiler, $1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 10 + 15$, oder 42, iſt größer als die Zahl 30. Eine Formel für Zahlen von dieſer Beſchaffenheit findet man auf folgende Art. Die einfachen Factoren einer Zahl ſeyn a, b, c, ſo iſt $1 + a + b + c + ab + ac + bc > abc$,

und $\frac{ab + a + b + 1}{ab - a - b - 1} > c$, oder $\frac{2ab}{ab - a - b - 1} > c + 1$. Mittelſt dieſer Formel findet man zu zwey einfachen Factoren eine Gränze des dritten Factors. Soll die Zahl vier einfache Factoren, a, b, c, d, haben, ſo

iſt $\frac{2abc}{abc - ab - ac - bc - a - b - c - 1} > d$. Man ſehe auch den Artikel, deficiens numerus.

Abwickelung. S. Evolution.

Acampta figura iſt die Brennlinie einer andern Linie. Die Strahlen, welche von dieſer, wie von einer polirten Fläche, zurückgeworfen werden, fahren an jener ſie berührend vorbey, ſo daß zwey unendlich nahe bey einander liegende an der Brennlinie zuſammen kommen, die ſie aber nicht zurück wirft, wenn ſie gleich Strahlen, die ſie nicht berühren, zurück ſendet. Leibnitz gebraucht dieſe Benennungen in einem Aufſatze de lineis opticis, Acta Erud. 1689, und in einem andern, generalia de natura linearum, ib 1692. Auch Leibn. Opp. T. III. p. 203. 277. In jenem Aufſatze iſt die Frage: die Linie zu finden, welche alle Strahlen, die von einem Puncte auf eine gegebene Linie fallen, und von dieſer nach ihr zurückgeworfen werden, wieder nach einem Puncte hin ſendet. Beide Linien haben eine gemeinſchaftliche Brennlinie oder Acampta. Die beſondere Benennung ſcheint unnöthig. Sie kommt auch kaum irgendwo ſonſt vor. S. Brennlinie.

Accidentalpunct, ſ. Nebenpunct.

Achteck, ſ. Vieleck, reguläres.

Aclaſta figura iſt eine krumme Linie, welche die von einer andern krummen Linie zurückgeworfenen Strahlen ungebrochen durchgehen läßt, ob ſie gleich die in andern Lagen auffallenden Strahlen nach den dioptriſchen Geſetzen bricht. Sie iſt nämlich die Abwickelnde der Brennlinie (ex evolutione cauſticae genita) welche zu jener zurückwerfenden Linie gehört, daher alle diejenigen Strahlen, welche von jener, als berührende an ihrer Brennline, an ſie gezogen werden, ſenkrecht auf ſie fallen, und folglich ungebrochen durchgehen. Leibnitz gebraucht a. a. O. dieſe Benennung, die ebenfalls ſonſt nicht vorkommt.

Acutangulus - um (oxygonius — um,) ſpitzwinklicht. Ein Dreyeck mit drey ſpitzen Winkeln iſt ſpitzwinklicht. Ein ſenkrechter Kegel, deſſen Seiten in dem Durchſchnitte durch die Axe einen ſpitzen Winkel machen, iſt ein ſpitzwinklichter. Ein Schnitt des Kegels, ſenkrecht auf eine dieſer Seiten, hieß bey den Geometern vor Apol-

lonius der Schnitt eines ſpitzwinklichten Kegels. S. Kegelſchnitt.

Addiren iſt das Verfahren bey der Addition.

Addition, Zuſammenzählung, iſt ein Rechnungsverfahren, bey welchem ein Ganzes aus ſeinen erſchöpfenden Theilen zuſammengeſetzt wird. Das Ganze, welches gefunden iſt, heißt die Summe. Die Addition wird entweder mit beſtimmten Zahlen, oder mit allgemeinen Größenzeichen vorgenommen.

Addition ganzer Zahlen, die ſich auf eine einzige Einheit, benannte oder unbenannte, beziehen, (Additio ſimplex) iſt die Vereinigung mehrerer Zahlen zu einer einzigen von derſelben Form wie jene, alſo von der dekadiſchen, wenn jene dieſe Form haben, nach der dodekadiſchen, oder ſonſt einer andern, wenn die zu addirenden Zahlen dieſe haben. Da das Verfahren leicht und allgemein bekannt iſt, ſo werden zwey Beyſpiele genügen.

795083	8476454
48624	307843
32798	83495
543	9637
68	549
7	4086
765893	8882064
11123	
877123	

Die Einer werden alle unter einander geſetzt, wodurch alle Einheiten derſelben Claſſe unter einander zu ſtehen kommen. Man addirt nun die Ziffern jeder Verticalreihe als Dinge einerley Art. Jn dem erſten Beyſpiele iſt von den Partial-Summen die Ziffer rechter Hand unter diejenige Reihe geſetzt, wozu ſie gehört, die linker Hand befindliche, deren Einer zehnfach größer ſind als die von jener, unter die linker Hand folgende Reihe, jedoch her-

abgerückt, um für die Einer dieſer Reihe Platz zu laſſen. Man erhält nun zwey Theile für die Summe, welche auf dieſelbe Art wie vorher addirt werden. Geübte nehmen die Zehner jeder Partialſumme gleich zu den Einern der nächſt höhern, wie in dem zweyten Beyſpiele.

Wenn viele Zahlen zu addiren ſind, ſo theile man ſie in zwey oder mehrere Haufen, ſuche deren Summen einzeln, und addire dieſe zuſammen. Theilt man die gegebenen Zahlen auf verſchiedene Arten in Haufen, ſo muß bey der Addition der einzelnen Summen daſſelbe Facit erhalten werden.

Wenn man zur Sicherheit die Addition widerholt, ſo addire man die Ziffern der Verticalreihen in einer der zum erſtenmahle beobachteten entgegengeſetzten Ordnung.

Von der Neuner- und Eilferprobe der Addition ſ. Rechnungsprobe.

Addition ganzer Zahlen mit verſchiedenen benannten Einheiten. (Additio compoſita). Sie erfordert nichts weiter als daß man wiſſe, wie viel Einer der geringern Einheit auf einen Einer von der höhern gehen, um für ſo viele Einer von jener Gattung einen von dieſer zu ſetzen. Z. B.

384 𝒻	15 ℋ	7 ₰	172 R.	9 F.	10 Z.
293 =	20 =	8 =	218 =	8 =	9 =
162 =	22 =	10 =	307 =	11 =	8 =
58 =	17 =	9 =	41 =	7 =	6 =
897 =	74 =	34 =	738 =	35 =	33 =
900 𝒻	4 ℋ	10 ₰	741 R.	1 F.	9 Z.

Addition dodekadiſcher Zahlen. Sie geſchieht auf eine ganz ähnliche Art wie der dekadiſchen. Für je 12 Einer einer Claſſe ſetzt man einen Einer in der nächſt höhern. Die Einer jeder Claſſe werden von den andern durch Puncte abgeſondert. (S. Dodekadik.) Z. B.

	8.	7.	10.	6.	4.
	9.	4.	7.	0.	11.
		5.	8.	4.	3.
		2.	9.	10.	5.
			8.	4.	7.
				5.	9.
	17.	18.	42.	29.	39.
1.	6.	9.	8.	8.	3.

5.	3.	11.	7.	9.
	8.	7.	6.	10.
		9.	11.	4.
		8.	10.	6.
			5.	3.
			4.	9.
6.	2.	2.	10.	5.

Addition dyadiſcher Zahlen. Es wird nur ein Beyſpiel nöthig ſeyn ſie zu lehren. (S. Dyadik.)

110010111000111	26055
101111011100011	24291
11101101100	1900
1111011	123
1111	15
1100110010100000	52384

Die dekadiſchen Zahlen rechter Hand ſind die Überſetzung von den dyadiſchen.

Das Zeichen der Addition iſt +

Addition der Brüche. S. Bruchrechnung und Decimalrechnung.

Addition allgemeiner Größen, oder algebraiſche. S. unter Buchſtabenrechnung.

Addition der Verhältniſſe iſt ein zweydeutiger Ausdruck, wofür man beſſer gebraucht, Zuſammenſetzung der Verhältniſſe. S. **Verhältniß.**

Additiv iſt eine Größe, die zu einer andern, zufolge der Vorſchrift bey einer Rechnung, zu addiren iſt. Man muß es nicht mit **poſitiv** verwechſeln, welches bedeutet, daß eine Größe in einer gewiſſen beſtimmten Relation gegen andere genommen werde. Das poſitive kann bey

der Zuſammenſetzung einer Größe aus andern ſubtractiv ſeyn.

Ähnlichkeit, mathematiſche, iſt Übereinſtimmug der Form, oder der Art der Entſtehung einer Größe aus andern, entweder ohne Gleichheit der Quantität, oder auch mit Gleichheit derſelben. Größen, die ähnlich ſind, ohne gleich zu ſeyn, ſtimmen in allen Stücken, bis auf die Quantität, überein. Die Ähnlichkeit iſt entweder die geometriſche oder die analytiſche.

Die geometriſche Ähnlichkeit beſteht in der gleichen Lage der geraden Linien und Ebenen, wodurch geometriſche Größen beſtimmt werden, oder, wenn es krumme Linien und Flächen ſind, ihrer kleinſten Theile, verbunden mit den gleich großen Verhältniſſen der correſpondirenden Linien, Flächen und körperlichen Theile, wie auch mit der gleichartigen Zuſammenſetzung aller einzelnen Theile oder Beſtimmungsſtücke.

Gerade Linien ſind ſich alle ähnlich, weil die Theile derſelben, ſie mögen an einander ſtoßen, oder von einander getrennt ſeyn, in einerley Lage gegen einander, abgeſehen von den Zwiſchenräumen, gedacht werden.

Geradlinichte Figuren ſind ähnlich, wenn die Winkel der Seiten in der einen den Winkeln in der andern, ſo wie ſie auf einander folgen, gleich ſind, und die von den gleichſtelligen Winkeln eingeſchloſſenen, oder gleichnamigen Seiten einerley Verhältniſſe haben. — Alle regelmäßigen Vierecke von einer gleichen Anzahl Seiten ſind daher einander ähnlich.

Alle Kreiſe ſind ſich ähnlich, weil ſie die Gränzen von regulären Vielecken ſind, daher das, was dieſen allgemein zukommt, auch der Gränze zukommt.

Alle Parabeln ſind ſich ähnlich, weil ſie, wie der Kreis, durch eine einzige gerade Linie, den Parameter, beſtimmt werden. Nimmt man die Abſciſſen auf der Axe vom Scheitel an in dem Verhältniß der Parameter, ſo haben die Ordinaten eben daſſelbe.

Ähnliche Ellipſen ſind diejenigen, in welchen die beiden Axen einerley Verhältniß zu einander haben. Die Ellipſe wird durch zwey Linien, die beiden Axen, beſtimmt, daher dieſe einerley Verhältniß haben müſſen, wenn Ellipſen ähnlich ſeyn ſollen.

Ähnliche geradlinichte Figuren verhalten ſich wie die Quadrate der gleichnamigen Seitenlinien oder wie die Quadrate der auf gleiche Art in ihnen gezogenen Linien. Von krummlinichten Figuren wird das letztere durch die Integralrechnung, oder ein von ihr entlehntes Verfahren bewieſen. Kreisflächen verhalten ſich wie die Quadrate ihrer Durchmeſſer: ähnliche Ellipſen wie die Quadrate ihrer großen oder ihrer kleinen Axen.

Priſmen ſind ähnlich, wenn ihre Grundflächen ähnliche Figuren ſind, die Seitenlinien ſich wie die gleichnamigen Seiten der Grundfläche verhalten, und dieſelbe Lage gegen die Grundflächen haben.

Cylinder ſind ähnlich, wenn ihre Axen ſich wie die Durchmeſſer ihrer Grundflächen verhalten, und gleiche Winkel mit denſelben machen.

Ähnliche Kegel ſind Abſchnitte eines und deſſelben unbeſtimmt weit fortgeführten Kegels.

Alle **Kugeln** ſind ähnliche Körper.

Körper ſind ähnlich, wenn in beiden parallele Durchſchnitte unter einem gegebenen Winkel gegen einen Durchmeſſer ſo geführt werden können, daß ſie ähnlich ſind, und ihre Abſtände von den gleichnamigen Endpuncten der Durchmeſſer ſich wie die Durchmeſſer verhalten, wie auch der Durchmeſſer und die Lage der Durchſchnitte verändert werden mag. In jedem Körper, der nur nach irgend welchen Regeln gemacht wird, giebt es Hauptdurchſchnitte, auf welche die übrigen Durchſchnitte und Durchmeſſer jeder Art (Linien von einem Puncte der Oberfläche zu irgend einem andern) bezogen werden können, um ihre Lage anzugeben; z. B. in einem elliptiſchen Sphäroid zwey Durchſchnitte ſenkrecht auf einander, einer durch die große Axe, und einer durch die kleine Axe; in einem Schiffe

ein lothrechter Durchſchnitt nach der Länge des Kiels, ein anderer lothrechter, auf jenen zugleich ſenkrechter durch den Hauptmaſt oder durch die Mitte der Längenlinie, und ein horizontaler durch einen gewiſſen Punct, z. B. den Schwerpunct des Schiffes.

Ähnliche **Abſchnitte** eines Körpers ſind ſolche, woran die Grundflächen ähnliche Figuren ſind, und gleiche Lagen gegen die Hauptdurchſchnitte haben, in welchen auch die Abſtände dieſer Grundflächen von den gleichnamigen Endpuncten ähnlich liegender Durchmeſſer (in Rückſicht der Hauptdurchſchnitte) einerley Verhältniß zu den ganzen Durchmeſſern haben.

Ähnliche Körper und ihre ähnlichen Abſchnitte verhalten ſich wie die Würfel der ähnlichen Durchmeſſer. Dieſes kann im Allgemeinen nur durch die Integralrechnung oder ein von ihr entlehntes Verfahren bewieſen werden.

Die **anylitiſche Ähnlichkeit** beſteht in der Übereinſtimmung des analytiſchen Ausdrucks zweyer Größen und der Gleichheit der Verhältniſſe zwiſchen den componirenden Größen. Z. B. ab und cd ſind gleichartige Formen, weil ſie aus zwey, und beide aus verſchiedenen Factoren beſtehen. Verhält ſich nun $a:c$ wie $b:d$ ſo ſind die Formen auch ähnlich. Man nennt ſolche Producte **ähnliche Flächen- oder Plan-Zahlen**, wie z. B. 3. 9 (= 27) und 6. 18 (= 108.)

So ſind abc und def gleichartige Formen, und wenn $a:d = b:e = c:f$ iſt, ähnliche Formen. Dergleichen Producte nennt man **ähnliche Körperzahlen**, wiewohl dieſe und jene gleich vorher angeführte Benennungen veraltet ſind, und nur noch in einem Wörterbuche aufbewahrt werden.

Demnach ſind abc und dee nicht ähnliche Formen, aber wohl abb und dee, wenn zugleich $a:d = b:e$ iſt.

Ähnliche Gleichungen ſind ſolche, welche aus gleichartigen Gliedern beſtehen, deren correſpondirende oder gleichnamige Factoren in beiden ein gegebenes Verhältniß

haben, mit derſelben Folge der Vorzeichen, z. B.

$$x^3 + ax^2 - bcx + def = 0$$

$$y^3 + \alpha y^2 - \beta\gamma y + \delta\varepsilon\zeta = 0$$

Wenn die Verhältniſſe $a:\alpha$; $b:\beta$; $c:\gamma$, etc. gleich ſind, ſo haben die Wurzeln x, y daſſelbe Verhältniß gegen einander. Denn wenn die Wurzeln der erſten Gleichung ſind p, q, r, ſo iſt + a die Summe ihrer entgegengeſetzten Werthe, — bc die Summe der Binonen derſelben, und + def das Product aller drey (Gleichung III. 5). Verändert man die Wurzeln in dem Verhältniſſe $m:n$, ſo wird ihre Summe in demſelben Verhältniſſe verändert, die Summe der Binionen in dem $m^2:n^2$; das Product aller drey in dem Verhältniſſe $m^3 : n^3$. Nun ſey ebenfalls $m : n = a : \alpha = b : \beta = c:\gamma$, u. ſ. f. ſo iſt $bc:\beta\gamma = m^2 : n^2$; $def:\delta\varepsilon\zeta = m^3 : n^3$, alſo ſind die Wurzeln der zweyten Gleichung

$$\frac{n}{m}p, \frac{n}{m}q, \frac{n}{m}r.$$

Wenn die Wurzeln einer Gleichung auf keine Einheit bezogen, ſondern als Größen ſchlechtweg gedacht werden, ſo erhalten alle Glieder der Gleichung gleich viel Abmeſſungen (Dimenſionen). Denn der Coefficient des zweyten Gliedes iſt das Aggregat der den Wurzeln entgegengeſetzten Größen, der Coefficient des dritten das Aggregat der Binionen; der des vierten das Aggregat der Ternionen, u. ſ. w. Die Stellen der Glieder werden hierbey wie in einer vollſtändigen Gleichung gezählt. In ähnlichen Gleichungen bekommen die Coefficienten auch ähnliche Formen. Iſt z. B. der des vierten Gliedes einer Gleichung = def, wie in dem obigen Beyſpiele, ſo iſt in der ähnlichen Gleichung derſelbe $= \delta\varepsilon\zeta$: iſt er in jener $= dde$ oder d^3 ſo iſt er in dieſer $= \delta\delta\varepsilon$ oder δ^3, und die gleichnamigen Factoren in allen Coefficienten haben einerley Verhältniß. Werden die Wurzeln als Zahlgrößen betrachtet, und die Coefficienten ſind bloße Zahlen, ſo verhalten ſich die Coefficienten des zweyten Gliedes in ähnlichen Gleichungen wie ein Paar gleichſtel-

liger Wurzeln, wenn die Wurzeln nach ihrer Größe geordnet werden. Dieſes Verhältniß ſey $= m : n$, ſo verhalten ſich die Coefficienten des dritten Gliedes wie $m^2 : n^2$; des vierten wie $m^3 : n^3$ u. ſ. f. eben ſo wie die Coefficienten, wo keine Einheit angenommen wird. Enthalten die Coefficienten noch unbeſtimmte, aber nach Willkühr beſtimmbare Factoren, ſo müſſen die Producte aus denſelben ähnliche Formen, die Factoren ſelbſt das Verhältniß der gleichſtelligen Wurzeln, die numeriſchen beygefügten Factoren aber ein ſolches Verhältniß haben, daß die Coefficienten ſelbſt das ihrer Stelle nach ihnen zukommende Verhältniß erhalten.

Hieraus ergiebt ſich auch, wie Gleichungen zwiſchen zwey veränderlichen Größen ſich verhalten müſſen, um ähnlich zu ſeyn. Es ſey z. B. $2abx - bx^2 = 2ay^2$, welches eine Gleichung für die Ellipſe iſt, worin die große Axe $= a$, der Parameter $= b$ iſt. Man ſetze in derſelben na und nb für a und b, und vertauſche die Coordinaten x, y mit und u, ſo iſt $2n^2abt - nbt^2 = 2nau^2$. Dieſe Gleichung iſt jener ähnlich. Denn wenn man $t = nx$ nimmt, ſo iſt $2n^3abx - n^3bx^2 = 2nau^2$, alſo $u^2 = n^2y^2$, oder $u = ny$. Wenn alſo die Abſciſſen x und t ſich wie $1 : n$ verhalten, ſo verhalten ſich die Ordinaten eben ſo, und die Gleichungen ſind ähnlich, wie die dadurch beſtimmten Linien.

In Gleichungen, deren Glieder alle gleich viele Dimenſionen haben, verändere man die gegebenen Größen nach einem beſtimmten Verhältniſſe $1 : n$, und vertauſche die coordinirten, durch x, y bezeichneten, veränderlichen Größen mit t, u, ſo iſt die Gleichung eine der primitiven ähnliche. Verhalten ſich x und t wie $1 : n$, ſo iſt auch $y : u = 1 : n$. Durch die Subſtitution von nx für t, und ny für u verwandelt ſich die zweyte Gleichung wieder in die primitive.

Wenn in einer Gleichung zwiſchen zwey veränderlichen Größen x und y für x geſetzt wird $t = mx$, und für y eine andere, $u = ny$. ſo iſt die neue Gleichung der primitiven zwar nicht ähnlich, aber doch mit ihr verwandt

(affinis). Die krummen Linien, die durch ſie dargeſtellt werden, ſind verwandte. Z. B. die Gleichung ſey $2ax - xx = yy$, welche dem Kreiſe zugehört. Es ſey $t = mx$; $u = ny$, ſo iſt

$$\frac{2at}{m} - \frac{t^2}{m^2} = \frac{u^2}{n^2} \quad \text{oder}$$

$$\frac{n^2}{m^2} \cdot 2mat - \frac{n^2}{m^2} t^2 = u^2,$$

eine Gleichung für eine Ellipſe, deren halbe große Axe $= 2ma$ und Parameter $= \frac{n^2}{m^2} \cdot 2ma$ iſt.

Beſteht die Gleichung zwiſchen zwey veränderlichen Größen nur aus zwey Gliedern, ſo wird Verwandtſchaft zugleich Ähnlichkeit. Z. B. die Gleichung für die Parabel iſt $ax = yy$. Setzt man $t = mx$; $u = ny$, ſo verwandelt ſich dieſe Gleichung in folgende: $\frac{n^2 a}{m} t = u^2$, welche wiederum eine Parabel mit dem Parameter $\frac{n^2 a}{m}$ giebt. Nimmt man $u = my$, wie $t = mx$, ſo iſt $mat = uu$. Alle Parabeln ſind daher nicht allein verwandt, ſondern auch ähnlich. Oder es ſey die Gleichung, $ax^2 = y^3$, ſo erhält man durch jene Subſtitution $\frac{n^3 a}{m^2} t = u^3$, und, wenn $n = m$ genommen wird, $mat = u^3$.

Wolf hat zuerſt den allgemeinen Begriff von Ähnlichkeit in die Mathematik aufgenommen, wozu er durch Leibnitz veranlaßt iſt, der, wie er ſagt, zu allererſt einen deutlichen Begriff von Ähnlichkeit gegeben hat, dieſen nämlich, daß ähnliche Dinge nur durch das Bey einander ſeyn (compraeſentia) unterſchieden werden können. Wolf ſagt: Similia ſunt, in quibus eadem ſunt, per quae a ſe invicem diſcerni debebant. (Elem. Arithm. §. 24.) Weil die Quantität, ſetzt er hinzu, ohne Vergleichung mit einem andern Dinge für ſich nicht begriffen, ſondern nur gegeben

werden kann, ſo können ähnliche Dinge, ihrer Ähnlichkeit unbeſchadet, in der Quantität verſchieden ſeyn, und Quantität iſt alſo ein innerer Unterſchied ähnlicher Dinge. In einer im J. 1715 lateiniſch geſchriebenen Abhandlung von der Ähnlichkeit krummlinichter Figuren wendet er dieſen Begriff auf geometriſche Größen an, insbeſondere auf die Conſtruction ähnlicher Lunularum cyclico-parabolicarum (Chriſt. L. B. de Wolf Meletemata mathematico-philoſophica. Halae Magdeb. 1755 nr. 24). Kreiſe ſind nach ihm, ſo wie Parabeln, ähnliche Figuren, weil die geraden Linien, wodurch ſie beſtimmt werden, Durchmeſſer und Parameter, nicht unterſchiedbar ſind. — Es wird rathſam ſeyn, Ähnlichkeit nur für mathematiſche Gegenſtände zu erklären, und ſie in die Übereinſtimmung der Form oder der Art der Zuſammenſetzung zu ſetzen. Auf die Form allein kommt es bey dem Unterſchiede mathematiſcher Zuſammenſetzungen an, ſo lange man ſie nicht auf wirkliche Gegenſtände anwendet.

Euklides giebt keinen allgemeinen Begriff von Ähnlichkeit, ſondern ſetzt die Beſtimmungen, die zur Ähnlichkeit erforderlich ſind, für jede Gattung von Größen beſonders feſt, als für ähnliche geradlinichte Figuren, ähnliche Körper, Kegel, Cylinder, Flächenzahlen und Körperzahlen.

Nicolaus Bernoulli macht dreyerley Arten von Ähnlichkeit der Figuren. Die Abſciſſen der einen und der andern ſeyn in einem gegebenen Verhältniſſe, ſo ſind die krummen Linien lateraliter ähnlich, wenn die zu den Abſciſſen in beiden Linien gehörigen Ordinaten ſich wie die Abſciſſen verhalten: exponentialiter oder potentialiter, wenn die Ordinaten ſich wie Potenzen der Abſciſſen verhalten; functionaliter, wenn die Ordinaten denſelben Functionen der Abſciſſen proportional ſind. (Joh. Bernoulli Operum T. II. p. 451.)

Zu vergleichen: Euler de ſimilitudine et affinitate curvarum, in Introd. in Anal. Infin. Tab. II. c. 18.

Aenigma Florentinum. S. Florentiner Aufgabe.

Aequatio. S. Gleichung.

Aequatio ſummatrix, ein Ausdruck, der von Leibnitz gebraucht iſt, und daſſelbe bedeutet, was man jetzt Integralrechnung nennt. Er ſah Integriren als ein Summiren an, daher er auch das Zeichen ∫ nahm, um das Integral eines Differentials zu bezeichnen. Als wenn die Differentialgleichung iſt $p\,dy = x\,dx$, ſo iſt die daraus folgende Summatrix, $\int p\,dy = \int x\,dx$. Leibnit. Opp. T. III. p. 192. In einem Briefe an Joh. Bernoulli, der die Benennung, Integralrechnung, eingeführt hat, ſagt Leibnitz, daß er dieſe Rechnung Calculum ſummatorium nenne; hingegen calculum integralem die Rechnungsweiſe arithmetiſche Aufgaben in ganzen Zahlen, wo es angeht, aufzulöſen. Commerc. phil. et mathem. Leibnitii et Joh. Bernoulli. T. II. p. 161.

Aequiangula figura, eine geradlinichte Figur, deren Winkel alle unter ſich gleich ſind.

Aequicrurum triangulum, gleichſchenklichtes Dreyeck.

Aequidiſtans, eine Linie, die von einer andern in allen Puncten gleichen Abſtand hat. S. Abſtand.

Aequilatera figura, eine geradlinichte Figur, deren Seiten alle unter ſich gleich ſind.

Äußerer Winkel (angulus externus), in einem Dreyeck der Nebenwinkel eines der drey Winkel deſſelben; bey Parallelen der Nebenwinkel desjenigen, welchen ſie mit dem zwiſchen ihnen enthaltenen Theile einer ſchneidenden geraden Linie machen. S. Parallelen.

Äußerſter Theil in einem ſphäriſchen rechtwinklichten Dreyecke. S. Nepers Regel von ſphär. Dreyecken.

Affecta aequatio, eine Gleichung, worin mehr als eine Potenz der unbekannten Größe vorkommt, ein Gegenſatz gegen aequatio pura, worin nur eine Potenz derſelben ſich findet.

Affectio, Beſchaffenheit einer krummen Linie, in Abſicht auf ihren Lauf ins Unendliche, wenn ſie ſolchen

nimmt, ihre Berührungsart mit einer geraden Linie oder andern krummen, ihre vielfachen Puncte, wenn ſie ſolche hat, und dergleichen. Dieſe Erklärung iſt nach dem Cap. XIII. der Introd. in Anal. Inf. P. II. von Euler gemacht, welcher proprietates und affectiones zu unterſcheiden ſcheint, wie es ſehr wohl thunlich iſt. Nach d' Alembert in der Encycl. method. iſt Affection einerley mit propriété.

Affinitas. S. Ähnlichkeit.

Affirmativ, ſo viel als poſitiv, womit beſonders in lateiniſchen Schriften die Wörter affirmativus und affirmative als gleichbedeutend vorkommen. Der Ausdruck iſt von Vieta eingeführt, aber in der Bedeutung wie additiv. Das Affirmative iſt dem Negativen entgegengeſetzt. S. Entgegengeſetzte Größen.

Afterkegel, ein Körper, der durch die Umdrehung einer krummen Lienie mit zwey unendlichen Schenkeln um ihre Axe entſteht, wie einer Parabel und Hyperbel. Die deutſche Benennung iſt von J. Ch. Sturm in ſeiner Überſetzung der Archimedeiſchen Schriften aufgebracht, ſo wie er überhaupt alle darin vorkommenden Kunſtwörter deutſch giebt. Allein das Wort After bedeutet eine Folge der Zeit, dem Orte oder der Ordnung nach, wie das Niederſächſiſche Achter (z. B. Aftergeburt, Afterdarm), und wenn man es auch in einer herabwürdigenden Bedeutung gelten laſſen will, ſo wäre dieſe doch hier nicht paſſend. Man behalte das griechiſche Wort **Konoid**. S. Conoides.

Afterkugel. S. Sphäroid.

Afterwalze. S. Cylindroid.

Aggregat iſt algebraiſche Summe, oder der Werth einer Größe, die aus mehrern Theilen zuſammengeſetzt iſt, dieſe mögen alle gleichnamige Vorzeichen haben, oder mit verſchiedenen begleitet ſeyn, und der Werth ſelbſt mag poſitiv oder negativ zu nehmen ſeyn. Sind die Vorzeichen gleichnamig, ſo iſt Aggregat daſſelbe mit der arithmetiſchen Summe, ein Ganzes, das ſeinen erſchöpfenden Theilen zuſammengenommen gleich iſt.

D' Alemberts Lehrſatz iſt folgender. Es ſey φx eine Function von x, und $y = x - \varphi x$; ferner ſey ψx eine andere Funktion von x, ſo iſt

$$\psi x = \psi y + \varphi x. \frac{d\psi y}{dy} + (\varphi x)^2. \frac{d^2\psi y}{2 dy^2} + (\varphi x)^3. \frac{d^3\psi y}{1.2.3.dy^3} + (\varphi x)^4. \frac{d^4\psi y}{1.2.3.4.dy^4} + \text{etc.}$$

Dieſe Formel wird in der Encyclopédie méthodique in dem Art. Series als ein Theorem von d'Alembert angeführt, woraus daſelbſt die wichtige Reverſions- oder Umwandlungs-Formel von la Grange hergeleitet wird. Der Verfaſſer des Artikels, Condorcet, giebt nicht an, wo d'Alembert jenen Satz vorgetragen hat.

In der That iſt dieſer Satz nichts anders als der ſchon lange bekannte Taylorſche Lehrſatz. Nach demſelben iſt irgend eine Function von $y + u$, die durch das vorgeſetzte Functionszeichen ψ bedeutet wird, $\psi(y + u) = \psi y + u. \frac{d\psi y}{dy} + \frac{u^2}{1.2.} + \frac{d^2\psi y}{dy^2} + \frac{u^3}{1.2.3.} \cdot \frac{d^3\psi y}{dy^3} + \text{etc.}$ Da $x = y + \varphi x$ geſetzt iſt, ſo iſt $u = \varphi x$ und $\psi x + \psi(y + \varphi x)$, ſo daß der d'Alembertiſche Lehrſatz völlig mit dem Taylorſchen übereinkommt.

Leſern der Encyclopédie iſt vielleicht dieſe Bemerkung willkommen.

Algebra iſt die Lehre von den Gleichungen. Dieſe ſind ſymboliſche Formeln, wodurch die Verbindungen mehrerer Größen ausgedruckt werden (ſ. Gleichung). Die Eigenſchaften der Gleichungen, die Verwandlungen ihrer Form, die Zuſammenſetzung neuer Gleichungen aus mehreren gegebenen, die Ausſonderung einer jeden der geſuchten Größen durch eine Gleichung, in welcher ſie allein mit gegebenen Größen vorkommt, und beſonders die Auflöſung der Gleichungen ſind die Hauptſtücke dieſer Wiſſenſchaft. Die Auflöſung beſteht darin, daß aus der Relation der geſuchten Größe zu den gegebenen, welche in der Gleichung auf eine unentwickelte Art, durch Vermiſchung des Bekannten mit

dem Unbekannten, dargeſtellt wird, der Werth der unbekannten Größe bloß durch bekannte Größen ausgedruckt werde. Die Auflöſung iſt der Zweck der Algebra, daher Wolf und Hutton ſie erklären als Methode, Aufgaben durch Gleichungen aufzulöſen. Nach Käſtners Erklärung lehrt ſie unbekannte Größen aus gegebenen Eigenſchaften derſelben durch Gleichungen finden.

Die Algebra bedient ſich, wie die ganze Analyſis, allgemeiner Zeichen, um ihren Lehrſätzen und Auflöſungen die völligſte Allgemeinheit zu geben. Darum wird oft die Buchſtabenrechnung, welche die arithmetiſchen Zuſammenſetzungen und Entwickelungen der Größen mit allgemeinen Zeichen machen lehrt, zur Algebra gerechnet. Es iſt aber beſſer, ſie davon abzuſondern, weil ſie das allgemeine Werkzeug für die Algebra und Analyſis überhaupt iſt.

Die Erfindung der Gleichungen iſt das Werk des mathematiſchen Scharfſinns. Darüber laſſen ſich keine Regeln ertheilen, ſo wie es überhaupt keine Methoden zur Erfindung giebt. Die Algebra lehrt eigentlich die ganze Behandlungsart gegebener Gleichungen. Hierzu iſt ſie im Stande beſtimmte Vorſchriften zu liefern. Sie weiſet den mathematiſchen Unterſuchungen einen gewiſſen Gang an, durch die Methoden über die Combinationen, Verwandlungen und Auflöſungen der Gleichungen. Ihre Lehrſätze über die Relationen der gegebenen Größen zu den unbekannten ſind Data, woraus man auf einem kurzen Wege in jedem beſondern Falle wichtige Lehrſätze und bequeme Auflöſungen herleiten kann. Inzwiſchen iſt das Verfahren bey der Anwendung der Algebra nicht mechaniſch. Ein mechaniſcher Algebraiſt wird nur auf mühſamen Umwegen zum Ziele kommen. Zu einer geſchickten Benutzung der algebraiſchen Lehren iſt Überlegung, und nicht ſelten Scharfſinn nöthig, um die Rechnung möglichſt kurz, deutlich und nett zu führen, kurz, ihr eine Eleganz, wie man ſie von geometriſchen Beweiſen und Auflöſungen fordert, zu verſchaffen. Man muß nicht kurzſichtig auf die Symbole das Auge heften, ſondern die Verbindungen der Größen unmittelbar durchzuſchauen ſuchen.

Die Erfindung der Gleichungen pflegt bey reinen arithmetiſchen Aufgaben keine Schwierigkeit zu haben, weil die Bedingungen der Frage alle in der Frage ſelbſt ſchon gegeben werden. Allein bey der Anwendung der Rechnung auf Gegenſtände aus der Geometrie, Phyſik und techniſchen Mathematik iſt es oft nicht leicht zu den Gleichungen zu gelangen, weil vielleicht nicht alle Größen, die auf die Beſtimmung des Geſuchten Einfluß haben, gegeben werden, oder weil zwiſchen den gegebenen und geſuchten Größen, Bedingungen und Verhältniſſe Statt haben, die aus der Beſchaffenheit des Gegenſtandes fließen, aber in der Aufgabe nicht vorkommen. Wird nach mehrern Größen gefragt, ſo muß man diejenige ausſuchen, aus welcher die übrigen am leichteſten hergeleitet werden. Zuweilen iſt es nützlich, nicht die Größe, welche gefunden werden ſoll, unmittelbar zu ſuchen, ſondern eine andere, aus welcher jene ſich leicht herleiten läßt. Z. B. wenn die Summe zweyer unbekannten Größen ein Datum iſt, ſo iſt es am bequemſten, ihren Unterſchied zu ſuchen, weil daraus und aus der Summe ſich die beiden Größen ganz leicht ergeben. — Wenn nun alle Bedingungen einer Frage in die algebraiſche Sprache überſetzt, oder in Gleichungen gefaßt ſind, ſo daß man ſo viele Gleichungen als unbekannte Größen hat, ſo hat man aus dieſer für jede derſelben eine Gleichung zu ſuchen, in welcher ſie allein nebſt gegebenen Größen vorkommt, indem die andern unbekannten Größen aus der Verbindung mit ihr gebracht oder weggeſchafft werden (ſ. Elimination). Hierauf wird jede Gleichung für ſich aufgelöſet, welches bey den Gleichungen, die nicht über den vierten Grad ſteigen, auf eine directe Art geſchehen kann, bey höhern aber nur indirecte auszuführen iſt.

Die Algebra hat zwey Haupttheile. In dem erſten wird von den Relationen der bekannten und unbekannten Größen gehandelt, wenn die letztern ihre beſtimmten Werthe haben. In dem zweyten werden diejenigen Relationen betrachtet, wodurch die Werthe der unbekannten Größen ſelbſt nicht beſtimmt werden, ſondern nur ihre

Formen, z. B. in einer Gleichung zwiſchen zwey unbekannten x und y die Form derſelben zu finden, wodurch beide ganze Zahlen werden; die Form von x zu beſtimmen, wodurch eine Function dieſer Größe, wie $a + bx + cx^2$ etc. ein rationales Quadrat oder ein ſolcher Cubus werde; einen Ausdruck, wie $ax^2 + bxy + cy^2$ in Factoren zu zerlegen; die Summe $x^2 + y^2$ zu einem Quadrate zu machen, oder ſie in zwey andere Quadrate zu verwandeln. Man nennt dieſen Theil auch die **Diophanteiſche Analyſis**, von Diophantus, der darüber ein ſchätzbares Werk hinterlaſſen hat. Doch mag derſelbe füglich zur Algebra gerechnet werden. Die Bedingung der Form dient ſtatt einer Gleichung. Euler hat die Rechnung der unbeſtimmten Größen ſeinem Lehrbuche von der Algebra beygefügt, und ſie die **unbeſtimmte Analytik** genannt. Sie unterſcheidet ſich von der Analyſis unbeſtimmter Größen dadurch, daß in dieſer die unbeſtimmten veränderlichen Größen keiner beſondern Form unterworfen werden. Ein Abriß derſelben iſt in dem Artikel, **unbeſtimmte Analytik**, um die Benennung, die Euler ihr gegeben hat, beyzubehalten.

In Abſicht auf den Vortrag unterſcheidet man die **numeriſche** und die **ſymboliſche** Algebra.

Die **numeriſche Algebra** (Algebra numeroſa) iſt diejenige, deren ſich die alten Algebraiſten bedienten, und zwar bloß zur Auflöſung arithmetiſcher Aufgaben, die gleichſam als Räthſel zu Übung des arithmetiſchen Scharfſinnes vorgelegt werden. Die unbekannte Größe allein ward durch einen Buchſtaben oder ſonſt ein Zeichen dargeſtellt; alle bekannten und gegebenen Größen aber wurden durch Zahlen ausgedruckt. Dieſer Methode mag man ſich für Anfänger, wenn ſie bey den allgemeinen Ausdrücken Schwierigkeiten finden, bedienen.

Die **ſymboliſche Algebra** (A. literalis, ſpecioſa) bezeichnet alle Größen, die gegebenen, ſo wie die geſuchten, durch Buchſtaben als Symbole. Dadurch iſt ſie im Stande, ihre Auflöſung auf alle nur mögliche Fälle und auf alle Arten von Größen anzuwenden, der Gegenſtand mag in die Arithmetik, oder Geometrie, oder Mechanik,

oder ſonſt einen Theil der angewandten Mathematik gehö-
ren. Sie dient dadurch ſowohl zur Erfindung von Lehr-
ſätzen, als zur Auflöſung von Aufgaben. Nach der alten
Algebra muß man für jeden Fall derſelben Art, wenn die
gegebenen Größen andere Werthe erhalten, die ganze
Rechnung wiederholen. Oder man muß mit Mühe und
Aufmerkſamkeit die Regeln der Auflöſung aus dem Ver-
fahren in einzelnen Fällen abſtrahiren. Vieta, der den
Gebrauch der Buchſtaben (ſpecies) für alle Größen, auch
für die bekannten, allgemein machte, nannte die Algebra
daher Arithmetica ſpecioſa. Newton nannte ſie Arith-
metica univerſalis, vermuthlich zum Theil deswegen, weil er
ſie viel zur Auflöſung geometriſcher Aufgaben anwandte.

Der Name Algebra iſt arabiſchen Urſprunges, wie
die erſte Sylbe, der arabiſche Artikel, anzeigt. Von
den Arabern iſt dieſe Wiſſenſchaft den Europäern mitge-
theilt worden. **Lucas de Burgo ſancti Sepulcri**, in
der letzten Hälfte des 15ten Jahrhunderts, deſſen italie-
niſch geſchriebenes Werk: Summa de Arithmetica Geo-
metria Proportioni e Proportionalita, Venedig 1494, zu-
gleich das damahls bekannte von der Algebra enthält, nennt
dieſen Theil ſeines Werks: L' Arte maggiore, ditta dal
vulgo la Regola de la Coſa, over Alghebra e Almuca-
bala. Die letzte Benennung überſetzt er durch reſtauratio
et oppoſitio. Daß Gegenſtellung ſich auf die beiden Theile
einer Gleichung bezieht, iſt deutlich genug. Die Wieder-
herſtellung mag die Zuſammenſetzung der unbekannten
Größe aus verſchiedenen gegebenen andeuten. Golius
in einer Anmerkung zu des Alferganus aſtronomiſchen An-
fangsgründen leitet das Wort Algebra von einem arabi-
ſchen Worte her, das bedeutet einen gebrochenen Knochen
heilen. Weil nun Theile der Einheit in der Rechenkunſt
auch durch ein Wort angezeigt werden, das Brüche oder
Bruchſtücke bedeutet, ſo habe man, ſagt er, mit dem
Worte Algebra die mathematiſche Analyſis benannt, als
welche ſich vornehmlich damit beſchäftige, die mit einander
zu vergleichenden Größen (terminos comparationis) in eine
Gleichung zu bringen, beſonders aber ihre Theile in ganze

Zahlen zu verwandeln. Das letzte kann nicht Urſache der Benennung ſeyn, weil Algebra auch in den alten Zeiten keine Bruchrechnung war. Das Grammatikaliſche der Herleitung iſt ohne Zweifel richtig, weil in der ſpaniſchen Sprache, die von den Mauren viele Wörter beybehalten hat, Algebriſta ein Mann heißt, der Beinbrüche und Verrenkungen heilt. (Käſtner in der Vorrede zur Anal. d. Endl. S. XIII.)

Die Benennung, Arte Maggiore, hat nach Lucas ihren Grund darin, weil ſie mit höhern Rechnungen zu thun hat, da die Rechnungen fürs gemeine Leben die Arte minore ausmachen.

Regola de la Coſa hieß die Algebra in den alten Zeiten, weil Coſa oder Sache, die unbekannte Größe, und zwar ihre erſte Potenz, bedeutete. Daher iſt bey den alten deutſchen Algebraiſten die Benennung, Regel Coß, oder die Coß, üblich geworden. Einige Schriftſteller im 16ten Jahrhundert nannten die Algebra auch Regula rei et cenſus, da durch cenſus die zweyte Potenz oder das Quadrat einer Zahl bezeichnet ward, und die Aufgaben gewöhnlich nur auf Gleichungen vom zweyten Grade führten.

Die hiſtoriſche Unterſuchung der Entdeckungen und Verbeſſerungen in der Algebra iſt nicht ohne große und ſcharfe Widerſprüche geführt worden. Dieſe rühren theils von Partheylichkeit und von Vorurtheilen her, die allen Nationen gemein ſind, theils von einer unzulänglichen Bekanntſchaft mit den Schriften der ältern Algebraiſten. Daher ſind die Verbeſſerungen, welche Schriftſteller einer Nation gemacht haben, den Schriftſtellern einer andern zugeeignet, und die Entdeckungen eines frühern Verfaſſers einem viel ſpätern zugeſchrieben worden. Die Nachrichten von manchen beſondern Methoden in der Algebra ſind ſo unvollſtändig, daß man daraus nur eine ſehr mangelhafte und ſchwankende Vorſtellung von dem Zuſtande der Wiſſenſchaft in ihren verſchiedenen Perioden erhält. Man muß die Schriften der algebraiſchen Verfaſſer ſelbſt leſen, um den allmähligen Fortgang ihrer Einſichten beſtimmt und zuverläſſig kennen zu lernen. Wallis hat in ſeiner Algebra

viele hiſtoriſche Nachrichten eingerückt, iſt aber zu partheyiſch für ſeinen Landsmann Harriot, ſo wie auf der andern Seite Gua in ſeiner Geſchichte der Algebra (Mém. de l'acad. des Scienc. 1741) zu viele Vorliebe für Vieta zeigt.

Hutton hat in ſeinem mathematiſchen und phyſikaliſchen Wörterbuche Vol I. p. 65 — 97 eine Geſchichte der Algebra geliefert, die in Abſicht auf die Schriftſteller des 16ten und 17ten Jahrhunderts ſehr ausführlich iſt, in der neuern aber nur kurze Anzeigen enthält. Er verſichert, daß er alle ältern Schriftſteller über die Algebra, deren er habhaft werden können, nach ihrer Folge ſorgfältig durchgeleſen, und eine umſtändliche Beſchreibung der von ihnen abgehandelten Lehren, ihrer Verbeſſerungen und Fortſchritte, ihres Eigenthümlichen und ihrer Bezeichungsarten gemacht habe, wovon er inzwiſchen nur einen Auszug mittheilen könne. Da die von Hutton gelieferten hiſtoriſchen Nachrichten Sorgfalt und Unpartheylichkeit zeigen, ſo werden ſie in der folgenden Geſchichte der Algebra zur Ergänzung meiner eigenen Unterſuchungen gebraucht werden.

Geſchichte der Algebra.

Das älteſte Werk über die Algebra, welches wir haben, iſt von Diophantus aus Alexandrien, deſſen Zeitalter aber unbekannt iſt, wiewohl man ihn in das vierte Jahrhundert zu ſetzen pflegt. Er hat 13 Bücher von arithmetiſchen Aufgaben in griechiſcher Sprache geſchrieben, wie er ſelbſt am Ende der Einleitung es angiebt. Von dieſen ſind nur ſechs zu uns gekommen, mit einem Buche von den Polygonalzahlen. Die erſte Ausgabe iſt von Xylander, in einer lateiniſchen Ueberſetzung, Baſel 1575, Fol. Den griechiſchen Text mit einer lateiniſchen Überſetzung gab Bachet zu Paris 1621. Fol. heraus. Die beſte iſt griechiſch und lateiniſch, mit einem Commentar von Bachet, und Bemerkungen von Fermat. Toulouſe 1670 Fol. Die in dieſen Büchern vorgetragenen Aufgaben gehören gröſstentheils zur unbeſtimmten Analytik. Die Aufgaben in

dem erſten Buche aber ſind beſtimmte, und führen alle auf Gleichungen vom erſten Grade, auſſer die Aufgaben 30; 31; 33, welche die Auflöſung einer Gleichung vom zweyten Grad erfordern. Doch vermeidet Diophantus durch die Wahl der unbekannten Größe die Form, welche nebſt dem Quadrat die unbekannte Größe ſelbſt enthält, und findet ſie durch eine reine oder einfache quadratiſche Gleichung. Die ganze Sammlung iſt ein Beweis von der meiſterhaften Geſchicklichkeit des Verfaſſers, und zeigt, daß er in die mathematiſche Analyſis tief eingedrungen iſt. Da er aber die unbekannten Größen ſo wählt, und die Auflöſung ſo einrichtet, daß er alle Bedingungen in Gleichungen vom erſten Grade oder höchſtens einfache quadratiſche Gleichungen bringt, ſo kann man nicht wahrnehmen, was ihm von der Auflöſung zuſammengeſetzter Gleichungen, der eigentlichen Algebra, bekannt geweſen ſey. Die arithmetiſche Analyſis des Diophantus hat, wie die geometriſche der Alten, nur wenige und einfache Hülfsmittel. In jedem beſondern Falle war alſo erfinderiſche Geſchicklichkeit nöthig, die ſich nicht in Regeln und ſymboliſchen Sätzen mittheilen ließ Daher haben wir bey den Alten keine techniſche Analyſis oder Algebra zu ſuchen. Ihre Analyſis war eine geiſtige, keine formulare. Diophantus löſet ſeine Aufgaben durch einfache Gleichungen auf, und gebraucht in der Rechnung nur eine unbekannte Größe mit einem Symbol, wählt aber dieſe ſo ſinnreich, daß alle die übrigen unbekannten Größen in der Aufgabe dadurch leicht ausgedruckt werden, und daß die Endgleichung die einfachſte Geſtalt, die möglich ſeyn mag, erhält. Das feine Verfahren bey der Beſtimmung der zu ſuchenden Größe giebt dieſer Sammlung von Aufgaben ihren vorzüglichen Werth. Iſt dieſe feſtgeſetzt, ſo findet ſich die Endgleichung leicht und ſehr deutlich. Die gegebenen Größen druckt Diophantus zwar in Zahlen aus. Man ſieht aber doch aus der Rechnung, wie ſie für andere Zahlen zu führen iſt. Die unbekannte Größe nennt er ſchlechtweg eine Zahl und bezeichnet ſie durch ς'. Bekommt ſie einen Zahlcoefficienten, ſo wird dieſer nachgeſetzt, und jenes Zeichen ver-

doppelt, z. B. ςςοἰ γ̄, das iſt nach unſerer Bezeichnung 3 x, oder es wird das Zahlwort ſelbſt nachgeſetzt. Das Quadrat einer Zahl bezeichnet Diophantus durch δῡ, den Cubus durch κῡ, das Biquadrat durch δδῡ die fünfte Potenz durch δκῡ, die ſechſte durch κκῡ, die Einheit hat das Zeichen μο̄. Die vier Species der Rechenkunſt bey Größen, die aus bekannten und unbekannten beſtehen, ſetzt er voraus. Daß ein Defect (λειψις) mit einem Defect multiplicirt einen Ueberſchuß (ὑπαρξις) giebt, und daß ein Defect mit einem Ueberſchuß multiplicirt einen Defect giebt, nimmt er als erwieſen an. Von ſeinem Verfahren werden in der unbeſtimmten Analytik ein paar Beyſpiele gegeben werden.

In Europa iſt die Algebra nicht durch das Werk des Diophantus bekannt geworden, ſondern wie die meiſten andern Kenntniſſe von den Arabern mitgetheilt worden. Cardanus giebt auf das Zeugniß des Leonardo von Piſa den Araber Mahomet Ben Muſa (Sohn des Moſe) als den erſten Schriftſteller über die Algebra an. Ein Werk von ihm iſt in einigen Bibliotheken handſchriftlich vorhanden. Die Araber haben ohne Zweifel die Schriften der Griechen über die höhere Arithmetik gekannt; nach dem Zeugniſſe des Abulpharagi iſt Diophantus ins Arabiſche überſetzt worden. Die Behandlung der Gleichungen vom erſten Grade iſt von dem griechiſchen Schriftſteller ſchon in den Beyſpielen gut gewieſen worden. Die Araber haben ſie vielleicht ſyſtematiſcher gemacht, und durch den Gebrauch ihrer bequemen Zahlzeichen erleichtert. Insbeſondere mögen ſie die Vorſchriften zur Auflöſung zuſammengeſetzter quadratiſcher Gleichungen herausgebracht haben, welches für uns gegenwärtig zwar etwas ſehr leichtes iſt, allein in dem Anfange der Kunſt ein wichtiger Fortſchritt war. Die Araber haben ſich auch ſchon mit den cubiſchen Gleichungen beſchäftigt. In der Bibliothek zu Leiden iſt ein arabiſches Manuſcript über dieſe Gleichungen vorhanden, wovon Hutton eine Abſchrift oder eine Überſetzung durch den zu früh verſtorbenen Profeſſor Damen zu Leiden zu erhalten hoffte.

Von den Mauro-Arabern ward die Kenntniß der Algebra nach Spanien verpflanzt. Aus dieſem Lande mögen die Italiener ſie zum Theil erhalten haben. Doch haben ſie auch unmittelbar von den Arabern durch einen ihrer Landsleute Unterricht in dieſer Kunſt bekommen. **Leonardo von Piſa**, ein Kaufmann, der um das J. 1200 große Reiſen nach dem Orient unternahm, brachte von da die Kenntniß der arabiſchen Arithmetik und Algebra mit (ſ. Zahlzeichen). Er hat eine noch ungedruckte Algebra hinterlaſſen. In Italien fand dieſe neue Art der Arithmetik viele Liebhaber, welches die in Bibliotheken noch vorhandenen Manuſcripte arithmetiſcher Werke bezeugen. Die Verfaſſer der erſten, nach der Erfindung der Buchdruckerkunſt erſchienenen Schriften über die Algebra führen manche ältere Schriftſteller als ihre Vorgänger und Lehrer in dieſer Kunſt an.

Das älteſte arithmetiſch-algebraiſche Werk unter den gedruckten iſt das vorher angeführte von **Lucas Paciolo**, oder Frater Lucas de Burgo ſancti ſepulcri, einem Minoriten Mönch. (Käſtners Geſch. der Math. I. S. 65.) Die damahls in Europa vorhandene Kenntniſſe in der Arithmetik, Algebra und Geometrie ſind darin vollſtändig und ſehr gut vorgetragen. Die gemeine Arithmetik und die Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzeln werden darin faſt auf die jetzt gebräuchliche Art gelehrt. In ſeiner höhern Arithmetik oder Arte maggiore handelt er zuerſt von den Proportionen, ſowohl der arithmetiſchen als geometriſchen, mit vielen Beyſpielen von Aufgaben über die geometriſche Progreſſion, die er durch eine Art von Algebra auflöſet. Ferner von der Regula falſi, der einfachen und gedoppelten, die er mit einem arabiſchen oder phöniziſchen Worte el Cataym nennet. Dann von den vier gemeinen Species in der Algebra, wo er zeigt, daß bey der Multiplication und Diviſion gleiche Vorzeichen +, ungleiche — geben. Weiter von der Ausziehung der Wurzeln, und der Rechnung mit Wurzelgrößen. Auch lehrt der Verfaſſer die Ausziehung der Quadratwurzeln aus Größen von der Form wie $23 + \sqrt{448}$ und $\sqrt{18} + \sqrt{10}$,

zur Erläuterung des 10ten Buchs vom Euklides. Darauf handelt er die Gleichungen vom erſten und zweyten Grade ab. Die Auflöſung der letztern bewerkſtelligt er ſo, wie wir es jetzt thun, durch Ergänzung des Quadrats, und dann durch die Ausziehung der Wurzel aus beiden Theilen der Gleichung. Auch löſet er Gleichungen vom vierten Grade auf, welche die Form einer quadratiſchen haben. Bey quadratiſchen Gleichungen mit zwey poſitiven Wurzeln gebraucht er die Wurzeln beide; allein bey denen mit einer negativen Wurzel giebt er auf dieſe nicht Acht. Die cubiſchen Gleichungen und die höhern (die ſchon gedachten vom vierten Grade ausgenommen) aufzulöſen, giebt er als unmöglich auf, mit dem Beyfügen, daß man dazu ſo wenig als für die Quadratur des Kreiſes eine allgemeine Vorſchrift gefunden habe. Die Bezeichnungen des Lucas ſind n° für die bekannte Größe, co (d. i. coſa) für die unbekannte Größe; ce. (cenſo) für ihr Quadrat; cu. (cubo) für den Cubus; ce. ce. für das Biquadrat; p° r° (primo relato) für die fünfte Potenz; ce. cu für die ſechſte Potenz; p (piu) für das Zeichen der Addition; m (meno) für die Subtraction. Z. B. 3 co. p. 4 ce. m. 5 cu. p. 2 ce. ce. m. 6 n¹ iſt, was wir jetzt ſo ſchreiben: $3x + 4x^2 - 5x^3 + 2x^4 - 6$. Für die Auflöſung der quadratiſchen Gleichungen findet man bey ihm die Regeln in barbariſch-lateiniſchen, nach ſeinem Urtheil eleganten Verſen, Hier iſt eine derſelben, für den Fall $x^2 + mx = a$, wo $x = \sqrt{(a + \frac{1}{4}m^2)} - \frac{1}{2}m$.

Si res et cenſus numero coequantur, a rebus
Dimidio ſumto cenſum producere debes,
Addereque numero, cuius a radice totiens
Tolle ſemis rerum, cenſus latusque redibit.

Das Werk des Lucas ſcheint das Studium der Algebra allgemeiner und eifriger gemacht zu haben. Nicht lange nach der Erſcheinung deſſelben, um das J. 1505, fand Scipio Ferreo, Profeſſor der Mathematik zu Bologna, zuerſt die Regel für die Auflöſung eines Falles

der cubiſchen Gleichungen, nämlich den, $x^3 + mx = a$, oder nach damahliger Art des Ausdrucks, capitulum cubi et rerum numero aequalium. Er entdeckte einem ſeiner Schüler, Florido, oder Fiore, die Auflöſung, woraus er übrigens ein Geheimniß machte. Dieſer bediente ſich des ihm mitgetheilten Verfahrens, andere mit Aufgaben zu necken, deren Auflöſung von der Regel für jenen Fall cubiſcher Gleichungen abhieng. Insbeſondere brachte er den Tartalea (richtiger als Tartaglia) aus Breſcia, der zu Venedig die Mathematik lehrte, durch ſeine Aufforderungen dahin, daß er mit ihm eine Wette eingieng, wer von ihnen beiden dreyßig Aufgaben, die der eine dem andern vorlegen würde, auflöſen könnte. Nun hatte Tartalea ſchon im J. 1530 für zwey Fälle der cubiſchen Gleichungen, nämlich $x^3 + mx^2 = a$, und $x^3 = mx^2 + a$, die Auflöſung gefunden. Auf Veranlaſſung der Herausforderung von Florido bemühte er ſich um die Auflöſung der Fälle, $x^3 + mx = a$ und $x^3 = mx + a$. Als er ſie gefunden hatte, legte er ſeinem Gegner manche Aufgaben vor, die auf die letztere dieſer Gleichungen, oder auf jene, die das Quadrat der unbekannten Größe nebſt dem Cubus enthalten, führten. Dieſer war nicht im Stande ſie aufzulöſen, dagegen Tartalea alle ihm zugeſtellten beantworteten. Die ganze Geſchichte der Entdeckung, und die Händel, welche darüber mit Cardanus entſtanden, erzählt Tartalea in dem 9ten Buche ſeiner Queſiti et Inventioni diverſe, Venedig 1546. Dieſes Werk enthält die Beantwortungen von mancherley Fragen, die dem Verfaſſer vorgelegt ſind, größtentheils die Artillerie, Taktik und Befeſtigungskunſt betreffend, und in dem letzten Buche, welches das neunte iſt, die Fragen arithmetiſchen und geometriſchen Inhalts. Das vornehmſte und letzte Werk des Tartalea iſt ſein Trattato di numeri e miſure, Venedig 1556 und 1560. Da der Verfaſſer im J. 1557 ſtarb, ſo iſt der Theil, der von der Algebra handelt, unvollendet geblieben, und erſtreckt ſich nur bis zu den Gleichungen vom zweyten Grade.

Hieronymus Cardanus, aus Mayland, ein ſehr gelehrter und mit allen ſeinen Wunderlichkeiten merkwürdiger Mann, erhielt von Tartalea auf ſein inſtändiges Bitten, und gegen die heiligſte Verſicherung, die Entdeckung nicht bekannt zu machen, die Mittheilung der von dieſem gefundenen Auflöſung cubiſcher Gleichungen. Er machte ſie aber doch 1545 bekannt in dem Werke: Artis magnae ſive de regulis Algebrae Liber unus, welches als das 10te Buch zu den 9 Büchern der Practica arithmetica generalis, Mediol. 1539, gehört. Es iſt auch zu Baſel 1570 herausgekommen, nebſt andern mathematiſchen Werken des Verfaſſers: Opus novum de proportionibus numerorum, motuum, etc. — Praeterea, Artis magnae — liber unus — item de Aliza regula Liber. — Tartalea empfand dies ſehr übel, und ward dadurch veranlaßt, ſeine Verhandlungen mit Cardan bekannt zu machen. Die Zänkereyen zwiſchen beiden dauerten bis zum Tode des erſtern. Cardan ſuchte ſich dadurch zu rechtfertigen, daß er die Beweiſe zu den ihm mitgetheilten Regeln der Auflöſung gefunden, und die Erfindung des Tartalea erweitert hätte. Er hat durch die Bekanntmachung der Vorſchrift, cubiſche Gleichungen aufzulöſen, die Ehre erhalten, daß man ſie allgemein Cardans Regel nennt, da ſie eigentlich nach ihrem Erfinder die Regel des Tartalea heißen ſollte. Inzwiſchen hat doch auch Cardan ſich um die Theorie der cubiſchen Gleichungen verdient gemacht, und zu allgemeinern Bemerkungen und Behandlungen der Gleichungen den Weg gewieſen. Er ſah zuerſt ein, daß eine Gleichung auch negative Wurzeln haben könne; nur nannte er ſie erdichtete (fictas), wie auch noch Wolf ſie falſche Wurzeln nannte. Er erklärte ihre Beſchaffenheit aber ſehr gut dadurch, daß er ſagte, die erdichtete Wurzel der Gleichung $x^3 + a = mx$ komme überein mit der wahren Wurzel der Gleichung $x^3 = mx + a$, und daß die Veränderungen der Vorzeichen des zweyten und letzten Gliedes in einer vollſtändigen cubiſchen Gleichung die poſitiven Wurzeln negativ und die negativen poſitiv mache. Da Tartalea dem Cardanus nur die Regel

zur Auflöſung cubiſcher Gleichungen für drey Fälle, I. $x^3 + mx = a$, II. $x^3 = mx + a$, III. $x^3 + a = mx$ mitgetheilt hatte, ſo ſuchte er Regeln für alle Formen und Abänderungen der cubiſcheu Gleichungen, wobey er faſt alle Verwandlungen der Formen aufſtellte, wie es bis dahin noch nicht geſchehen war. Er fand, wie in cubiſchen und höhern Gleichungen das zweyte Glied weggeſchafft werden könne. Mit dem Falle, den man den caſus irreducibilis nennt, gab er ſich viele Mühe, ohne damit zu Stande zu kommen. Dies thut er beſonders in dem Buche, welches er betitelt hat, de Aliza regula, ein Ausdruck, den er nicht erklärt. Er giebt in dieſem Buche (C. 31) eine Regel für den Fall $x^3 = bx + c$, die ſich darauf gründet, daß die Gleichung $x^3 = (m^2 + n^2)x + 2mn(m+n)$ die Wurzel $x = m + n$ hat. Er erkannte, daß eine Gleichung mehrere Wurzeln zuläßt, und zeigte an Beyſpielen, daß eine cubiſche drey Wurzeln haben kann. Doch rechnete er zwey gleiche und gleichnamige Wurzeln nur für eine einzige. Z. B. In der Gleichung, $x^3 - 12x = 16$, findet er nur zwey Wurzeln, $+4$ und -2, da ſie doch zwey gleiche negative Wurzeln hat. Dennoch hatte er eingeſehen, daß in einer cubiſchen Gleichung der Coefficient des zweyten Gliedes der Unterſchied der wahren und erdichteten Wurzeln iſt; daß alſo, wenn dieſes Glied fehlt, die Summe jener oder dieſer ſo groß iſt als die entgegengeſetzte Wurzel. Er bemerkte, daß in einer cubiſchen Gleichung, deren Glieder alle auf eine Seite gebracht worden, die Anzahl der poſitiven Wurzeln der Anzahl der Abwechſelungen unter den Vorzeichen gleich iſt, wofern nur alle drey Wurzeln möglich ſind; auch daß die unmöglichen Wurzeln immer ſich gedoppelt finden. Er wandte die Algebra zur Auflöſung geometriſcher Aufgaben an. Auch gebrauchte er ſchon manchmahl Buchſtaben, um Größen auf eine allgemeine Art zu bezeichnen und zu behandeln.

Die Aufgabe, drey Zahlen zu finden, die in geometriſcher ſtetigen Proportion ſind, deren Summe eine gegebene Zahl (als 60) iſt, und von welchen die erſte und

zweyte mit einander multiplicirt ein gegebenes Product (als 6) machen, war die Veranlaſſung zur Erfindung eines Verfahrens, biquadratiſche Gleichungen aufzulöſen. Die Aufgabe führt, bey den vorher genannten Zahlen, auf die Gleichung $x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$. Cardan ermunterte den **Ludovico Ferrari** aus Bologna, einen jungen Mann von mathematiſchen Talenten, die Auflöſung zu ſuchen. Dieſer fand auch dazu ein Verfahren, welches darin beſtand, daß auf beiden Seiten der auf eine gewiſſe Art geordneten Gleichung ſolche Größen hinzu gethan werden, daß die Quadratwurzel aus beiden Theilen ſich ausziehen läßt (ſ. Gleichung IV. 14.). Cardan theilt dieſe Auflöſung in ſeiner Ars magna mit. Hernach hat ſie auch **Bombelli** in ſeiner italieniſch geſchriebenen Algebra, Bologna 1579 angeführt, daher einige, als Wallis und Euler, dieſelbe dem Bombelli zueignen. Die Methode, welche Bombelli zur Ausziehung der Cubikwurzel aus einer zweytheiligen Größe, $a + \sqrt{b}$, angiebt iſt unbrauchbar, wenigſtens ſo, wie Hutton ſie vorträgt, aber zur Ausziehung der Cubikwurzel aus dem Binomium $a + \sqrt{-b}$ giebt er ein Verfahren an, welches in denen Fällen brauchbar iſt, da die Wurzel dieſelbe Form, $x + \sqrt{-y}$ mit rationalen Werthen für x und y hat. Nämlich, wenn dieſe Wurzel cubirt wird, ſo iſt der mögliche Theil $= a$, der unmögliche $= \sqrt{-b}$, woraus ſich die Gleichungen für x und y ergeben. Bombelli hätte ein ähnliches Verfahren auch für die Ausziehung der Cubikwurzel aus $a + \sqrt{b}$ anwenden können. Jenes führte ihn auf die Bemerkung, daß die beiden Theile der Cardaniſchen Formel, wenn ſie gleich einzeln keine wahren Größen ſind, doch in der Summe eine wahre Größe geben können. Er machte auch die wichtige Bemerkung, daß mittelſt der cubiſchen Gleichung, $x^3 = bx + c$, ein Winkel in drey gleiche Theile getheilt werden kann. Eine merkwürdige Stelle, die Algebra des Diophantus betreffend, iſt in des Bombelli Algebra befindlich. Er erzählt, daß in der Vaticaniſchen Bibliothek ein griechiſches Werk über die Algebra vorhanden ſey, welches er mit einem römiſchen

Mathematiker zu überſetzen unternommen habe; ſie hätten von den ſechs vorhandenen Büchern ſchon fünf überſetzt. Nun fügt er hinzu, ſie hätten gefunden, daß in dieſem Werke Indiſche Schriftſteller oft angeführt würden, woraus ſie ſähen, daß die Indier die Algebra vor den Arabern gekannt haben müßten. In dem Diophantus, wie wir ihn haben, findet ſich keine Citation eines Indiſchen Schriftſtellers. Das Manuſcript, welches Bombelli gebraucht hat, muß interpolirt geweſen ſeyn.

In Deutſchland war, nach Huttons Urtheil, in der erſten Hälfte des 16. Jahrhunderts die Algebra ſchon weiter fortgerückt, als ſelbſt in Italien, nur freylich die über die cubiſchen Gleichungen hier gemachten Entdeckungen ausgenommen. Sie näherte ſich ſchon mehr der neuern Form. Die älteſte algebraiſche Schrift in Deutſchland, iſt die Coß **Chriſtoph Rudolphs** (aus Jauer) die im Jahr 1524 gedruckt iſt. Weil ſie ſich ſelten gemacht hatte, beſorgte **Mich. Stifel** aus Eßlingen eine neue Ausgabe, welcher er viele Zuſätze beyfügte. Der Titel iſt: Die Coß Chriſtoph Rudolphs mit ſchönen Exempeln der Coß, durch Michael Stifel gebeſſert und ſehr gemehrt, 1571. 491 Bl. in 4. (Käſtners Geſch. der Mathematik 1. Bd.) Von dieſem Buche iſt auch eine Ausgabe zu Amſterdam 1615; 827 S. in 8. in deutſcher Sprache herausgekommen. Stifel hat auch ein eigenes Werk über Arithmethik und Algebra geliefert: Arithmetica integra,, Norib. 1544; 322 Bl. in 4. (Käſtner a. a. O). In dieſem Werke iſt die Arithmetik nach ihrem damahligen Zuſtande vollſtändig vorgetragen. Es ſind darin außer der praktiſchen Arithmetik enthalten: Unterſuchungen über die arithmetiſchen Reihen, die Polygonalzahlen, die geometriſchen Reihen, Bemerkungen über die Verbindung derſelben mit einer arithmetiſchen, die erſte Idee von Logarithmen, die Coefficienten der Potenzen einer zweytheiligen Zahl bis zur ſiebzehnten, die Rechnung mit Irrationalgrößen, und in dem dritten Buche die Algebra mit der Überſchrift: de numeris coſſicis et de regula eorum, id eſt, de perfecta arte calculandi. Hutton rühmt dieſes Werk ſehr, Sti-

bekennt in der Vorrede zu Rudolphs Coß, daß er dieſe wunderbarliche und ganz philoſophiſche Kunſt des Rechnens aus Rudolphs Buche erlernt habe. Rudolph hatte keine Beweiſe ſeiner Regeln gegeben; dieſe fügte Stifel bey, oder machte ſie vielmehr durch Erläuterungen begreiflich. Rudolph gebrauchte zur Bezeichnung der Potenzen eigene Charaktere, die aus den Anfangsbuchſtaben der Wörter für dieſelben mit Nebenzügen gebildet waren (ſ. Potenz). Die Quadratwurzel bezeichnete er auf die jetzt übliche Art durch Vorſetzung des Zeichens $\sqrt{}$, die Cubik- und Biquadratwurzel durch eigene Zeichen. Dafür ſetzt Stifel hinter das Zeichen $\sqrt{}$ den Charakter der Potenz, deren Grad oder Exponent mit dem Grade der Wurzel derſelben iſt, und nach dieſem Charakter die Zahl, woraus die Wurzel irgend eines Grades gezogen werden ſoll. Rudolph und Stifel führten die Zeichen + und — für die Addition und Subtraction ein, deren man ſich in Italien erſt lange nachher bedient hat. Die Gleichheit zweyer Größen ward von ihnen noch wörtlich angegeben; auſſer daß Stifel manchmahl das Facit oder den Werth einer Größe durch einen Punct als Zeichen der Gleichheit angiebt, z. B. 1 A. 20 — 5 x, das iſt A = 20 — 5 x, wo nur x ſtatt ſeiner Radikalgröße geſetzt iſt. Für die quadratiſchen Gleichungen der höhern Ordnungen geben ſie eine allgemeine Regel. Die von Rudolph gegebene Regel zur Ausziehung der Wurzel aus einem Binomium von der Form $a + \sqrt{b}$ iſt genau dieſelbe mit der von Newton in der Arithmetica univerſali pag. 49 edit Graveſ. vorgetragenen. Doch hat ſchon Lucas de Burgo ſie aufgeſtellt. Zur Ausziehung der Cubikwurzel aus einem ſolchen Binomium giebt Stifel in der Ausgabe von Rudolphs Coß (S. 815) eine gute Regel, die einige, vielleicht auch viele Verſuche erfordert, in manchen Fällen aber ſehr leicht ausgeführt werden kann. Albert Girard hat ſie in der nachher anzuführenden Schrift auch vorgetragen. Tartalea hat ein anderes Verfahren angewieſen (ſ. Wurzel aus einem Binomium). Stifel führt noch an, wie man durch ein ähnliches Verfahren auch Wurzeln von höhern Graden

ausziehen könne. Wenn mehr als eine unbekannte Größe in einer Frage vorkamen, ſetzten Cardan und Rudolph für die zweyte das Zeichen 1 q. Dafür nimmt Stifel das Zeichen 1 A, um, wenn drey oder mehr unbekannte Größen geſucht werden, für dieſe die Zeichen 1 B, 1 C, u. m. zu gebrauchen. Die Reduction der Gleichungen durch Verſetzung der Glieder und andere Veränderungen, um ihnen die zur Auflöſung ſchickliche Form zu geben, lehrte Stifel kürzer und allgemeiner als ſeine Vorgänger. Stifel bezeichnete den Grad einer Potenz durch die Anzahl der darin enthaltenen gleichen Factoren, nannte ſie **Exponens**, und betrachtete die Exponenten der Quotienten von Eins durch eine Potenz dividirt als negativ, wie in folgender Reihe von Potenzen und Exponenten

$$\ldots \tfrac{1}{8},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{2},\ 1,\ 2,\ 4,\ 8\ \ldots$$
$$\ldots -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots$$

Er zeigt, daß ſich die negativen Exponenten bey der Multiplication und Diviſion der Potenzen eben ſo verhalten wie die poſitiven. Von ſeinen Lehrſätzen über die Verbindung zweyer ſolchen Reihen ſ. Logarithmen.

Ein guter deutſcher Schriftſteller über die Algebra um die Mitte des ſechzehnten Jahrhunderts iſt **Johann Scheybl** oder Scheubelius, des Euclids und Arithmetik Ordinarius auf der Univerſität Tübingen. Von ihm iſt Algebrae compendioſa faciliſque deſcriptio, qua depromuntur magna Arithmetices miracula. Authore Joh. Scheubelio, Mathem. Prof. in Acad. Tubingenſi. Pariſiis, 1552, vielleicht ein Nachdruck einer frühern in Deutſchland gedruckten Ausgabe. Hutton ſagt, daß der Vortrag in dieſem Buche ſehr deutlich und nett ſey, ſo daß es durch den Inhalt, wie auch durch die äuſſere Geſtalt, da es ſehr ſchön gedruckt iſt, einem neuern Werke ähnlich ſehe. Seine Rechnungsweiſe und ſeine Bezeichnung iſt die, wie bey Rudolph und Stifel. Die Gleichungen, welche er auflöſet, ſind nur vom erſten und zweyten Grade mit Einſchluß der höhern von der Form der quadratiſchen. Negative Wurzeln kennt er noch nicht. Mit der Wurzel-

rechnung beſchäftigt ſich der Verfaſſer auch. Sie geht bey Binomien von zwey irrationalen Theilen, oder einem rationalen und einem irrationalen, nur auf die Quadratwurzel. Der Verfaſſer hat eine deutſche Überſetzung der erſten drey arithmetiſchen Bücher das Euklides herausgegeben, im J. 1558.

In England gab Robert Recorde 1552 eine Arithmetik, und als den zweyten Theil 1557 eine Algebra heraus, letztere unter dem Titel: The Whetſtone of Witte, which is the ſeconde parte of Arithmetike: containing the extraction of Rootes: The Coſſike Praktiſe with the Rule of Equation: and the Workes of Surde Numbers. Das Buch iſt in Geſtalt eines Geſprächs zwiſchen einem Lehrmeiſter und ſeinem Schüler abgefaßt. Die deutſchen Algebraiſten ſind dabey viel benutzt. Die Zeichen für die Potenzen hat er von dieſen genommen. Der Verf. ahmt bey der Ausziehung einer Wurzel aus zuſammengeſetzten algebraiſchen Größen (wie $25x^6 + 80x^5 - 26x^4 - 144x^3 + 81x^2$, nach unſerer Bezeichnung der Potenzen), das Verfahren bey der Ausziehung aus Zahlgrößen nach. Die Quadratwurzel aus jenem Ausdruck iſt $5x^3 + 8x^2 - 9x$. Das Zeichen der Gleichheit, $=$, hat Recorde eingeführt, wie er es ſelbſt bemerkt, mit dem Beyfügen, daß keine zwey Dinge gleicher ſeyn könnten, als ein paar parallele gleich große gerade Linien.

In Frankreich kamen 1558 zu Paris heraus: *Jacobi Peletarii* Cenomani de occulta parte numerorum, quam Algebram vocant, libri duo. In den Bezeichnungen der Potenzen kommt er mit den deutſchen Algebraiſten zum Theil überein; aber die Zeichen + und − hat er nicht von ihnen angenommen, ſondern gebraucht ſtatt deren die Anfangsbuchſtaben p und m. Den Gebrauch der Exponenten lehrt er wie Stiefel und Scheybl. Er bemerkte, daß die rationalen Wurzeln einer Gleichung, ſie mögen ganze oder gebrochene Zahlen ſeyn, unter den Factoren des gegebenen Gliedes anzutreffen ſind. Er zeigte, wie man eine trinomiſche irrationale Größe durch die Multiplication in eine rationale verwandeln könne, ſo daß man dadurch

einem Bruche mit einem ſolchen triomiſchen Nenner einen rationalen geben kann. (Wenn das Trinomium iſt $a + \sqrt{b} + \sqrt{c}$, ſo entſteht daraus durch die Multiplication mit $a + \sqrt{b} - \sqrt{c}$ und mit $a^2 + b - c - 2a\sqrt{b}$, das Product $(a^2 + b - c - c)^2 - 4a^2b^2$). In Rudolphs Coß oder Algebra iſt ein ähnliches Verfahren für Binomien. Peletarius fand, daß Tafeln der Quadrat- und Cubikzahlen mittelſt der Differenzreihen durch die bloße Addition verfertigt werden können. Er entdeckte verſchiedene merkwürdige Eigenſchaften dieſer Zahlen, namentlich dieſe, daß die Summe der Cubikzahlen $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 \ldots + n)^2 = \frac{1}{4}n^2(n + 1)^2$. Von der Auflöſung cubiſcher Glechungen war ihm noch nichts bekannt.

Simon Stevin, ein niederländiſcher Mathematiker aus Brügge, gab 1585 eine Arithmetik, und bald darauf eine Algebra heraus. In dieſer gebraucht er eine neue Bezeichnung der Potenzen, die aber keinen Beyfall erhalten hat. Er bezeichnet ſie durch einen Kreis, in welchem der Exponent der Potenz eingeſchloſſen iſt. Auch deutete er die Wurzeln aus Potenzen durch einen Bruch innerhalb des Kreiſes an. Wichtiger iſt, daß er die zuſammengeſetzten Benennungen der Potenzen, Quadrato-Quadrat, Quadrato-Cubus, Cubo-Cubus, u. dgl. verließ, und ſie durch ihre Exponenten benannte, welches er auch auf gebrochene und negative Exponenten ausdehnte. Auch den Begriff der Coefficienten erweiterte er auf gebrochene und irrationale Zahlen. Er gab eine allgemeine Methode an, die Wurzeln jeder Gleichung durch Näherung zu finden, aber noch auf eine mühſame Art, indem er die Ziffern nach der Reihe durch Probiren fand.

Franciſcus Vieta (François Viete, geb. 1540 zu Fontenai in Poitou, geſt. 1603), einer der vorzüglichſten Mathematiker ſeines Zeitalters, führte die allgemeine Rechnungsart in der Algebra ein. Denn wenn gleich Cardan ſich auch zuweilen allgemeiner Zeichen für die ſämmtlichen mit einander verbundenen Größen bedient hat, oder die Fälle der Gleichungen auf ſolche Art darſtellte, ſo iſt doch

Vieta derjenige, der die algebraiſchen Rechnungen durch=
gehends auf eine allgemeine Art machen lehrte. Er be=
zeichnete die bekannten Größen durch die Conſonanten, die
unbekannten durch die Vocalen aus dem großen lateiniſchen
Alphabet, wofür man hernach bequemer die erſten und
letzten Buchſtaben des kleinen Alphabets genommen hat.
Von ihm rühren verſchiedene jetzt übliche Kunſtwörter her,
als Coefficient, affirmativ und negativ (ſtatt additiv und
ſubtractiv), poteſtas pura und affecta, woraus man jetzt
aequatio p. et a. gemacht hat. Er nahm mit den Gleichungen
faſt alle erſinnliche Verwandlungen vor, wodurch er denſel=
ben eine zur Auflöſung bequeme Geſtalt gab. Inzwiſchen hat
Cardan dieſe auch ſchon gröſtentheils gefunden, nur nicht in
der Allgemeinheit wie Vieta. Cardan fiel nicht darauf, die
Wurzeln einer Gleichung in einem gegebenen Verhältniſſe zu
verändern, welches Vieta gewieſen hat. Die Gleichungen
vom dritten Grade löſet er mittelſt einer angenommenen
Hülfsgleichung auf, als die Gleichung $x^3 + 3bx = 2c$
durch die Gleichung $y^2 + xy = b$ (ſ. Gleichung V. 5).
Wegen des Falles, da eine cubiſche Gleichung mehr als eine
Wurzel hat, verweiſet er in der Schrift über die Gleichungen
auf die Analytik der Winkeltheilungen, die er aber nur ge=
legentlich in einer an den Adriamus Romanus gerichteten
Schrift, und in einer kleinen Sammlung mathematiſcher
Sätze vorträgt. In jener giebt er einer cubiſchen Gleich=
ung mit drey Würfeln nur zwey poſitive durch die Drey=
theilung eines Winkels. Die Gleichungen vom vierten
Grade löſet er nach Ferrari's Methode auf. Von den
Gleichungen bis zum fünften Grade giebt er die Zuſam=
menſetzung der Coefficienten durch die Wurzeln an, aber
nur für den Fall, da alle Wurzeln poſitiv ſind. Er ſagt
nicht, wie er dieſes gefunden habe. Die merkwürdigen
Sätze ſtehen am Ende der Schrift de emendatione ae-
quationum. Dieſe iſt nebſt der de recognitione aequa-
tionum erſt nach des Verfaſſers Tode, zu Paris 1615
von Anderſon, einem Schüler und Freunde des Vieta, her=
ausgegeben, daher man ſie vielleicht für unvollſtändig hal=
ten möchte. Doch ſagt Vieta ausdrücklich, daß er mit

dieſen ſchönen und fein erdachten Sätzen, (elegans et perpulchrae ſpeculationis Sylloge) den ſchon weitläufigen Tractat endlich beſchließen wolle. Die beiden Schriften ſcheinen zum Druck ganz ausgearbeitet geweſen zu ſeyn. Wahrſcheinlich hat Vieta den Beweis ſeinen Leſern aufzuſuchen überlaſſen. Denn er ſagt von dieſen Sätzen: Quae jam ſequitur collectio, ſua analytico examini ſubjicienda libere relinquit theoremata; pertinet autem ad aequalitates de multiplicibus radicibus mire explicabiles. Die Entſtehungen der Gleichungen aus der Multiplication einfacher Factoren, wie x — a, hat Vieta vielleicht nicht gekannt. Man kommt aber auf jene Sätze auch, wenn man die Summen der Combinationen von jeder Art als gegeben annimmt, und daraus die combinirten Größen ſucht (ſ. Gleichung, VI. 1.). Vieta hat viele Aufgaben, die ihm mancherley Formen von Gleichungen an die Hand geben, ſo daß daraus die Beſchaffenheit der Wurzeln und ihrer Relation gegen die Coefficienten erkannt wird. In dem 15ten Capitel u. ff. des Buchs de recognitione aequationum kommen Lehrſätze über die Zuſammenſetzung der Coefficienten gewiſſer Gleichungen mit drey Gliedern vor. Demnach hat er wahrſcheinlich aus der Summe der Unionen, Binionen, Ternionen, u. ſ. die Größen (oder Elemente) dieſer Verbindungen zu ſuchen unternommen. Die Berechnung der Wurzel einer Gleichung mit numeriſchen Coefficienten lehrt er in einer beſondern Schrift, de numeroſa poteſtatum affectarum reſolutione, auf eine ähnliche Art wie in den Anfangsgründen der Arithmetik die Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzel vorgetragen wird. Doch iſt das Verfahren beſchwerlich. Seine Vorſchriften nehmen fünf Folioſeiten ein. Sie können aber ſehr kurz gefaßt werden. Die Mehrheit der Wurzeln macht beſondere Schwierigkeit. Es iſt auffallend, daß Vieta die negativen Wurzeln einer Gleichung gar nicht mit in Betrachtung zieht, da doch ſchon Cardanus es gethan hatte. Gua und Montücla, die ihren Landsmann über alle Algebraiſten der ältern Zeiten ſetzen, ſind hier verlegen. Doch mag Vieta die negativen Wurzeln nicht gänzlich verkannt

haben. In der Schrift *de recogn. aequ. Cap.* 19. 20 *et* 21. verbindet er Gleichungen, in welchen die unbekannten Größen entgegengeſetzt ſind, als $x^2 + ax = b$, und $y^2 - ax = b$. Nun ſagt er von dieſen Gleichungen (*C.* 19, *prop.* 1), daß $x - y$ oder $y - x = a$, und $xy = b$ iſt. In dem Beyſpiele *prop.* 4, ſetzt er die Gleichungen $x^4 + 5x^3 = 216$ und $x^4 - 5x^3 = 216$, und giebt die Wurzel der erſtern an $= 3$, die Wurzel der andern $= 6$. Vieta hat alſo in einigen Fällen die negativen Wurzeln als poſitive Wurzeln einer andern entgegengeſetzten Gleichung betrachtet, wie es geſchehen muß, wenn man das Entgegengeſetzte vermeiden will. Er verfuhr wie die alten Mathematiker, welche alle Fälle eines Satzes, die ſie durch das Entgegengeſetzte unterſchieden, beſonders betrachteten. Vermuthlich hat er gewußt, daß Cardan negative Wurzeln zur Aufloͤſung gewiſſer Gleichungen gebrauchte; weil ihm aber dieſes keine deutliche Darſtellung gewähren mochte, ſo vermied er das Negative ganz, und nahm nur in den Gleichungen, die er *contradicentes* und *inverſas* nannte, die negativen Wurzeln als Wurzeln der einen dieſer Gleichungen auf. Freylich iſt hier noch eine große Lücke in Vieta's Theorie. Den oben angeführten Satz von der Zuſammenſetzung der Coefficienten aus den Combinationen der Wurzeln hätte er auf die Fälle erweitern ſollen, worin eine oder mehrere der combinirten Größen negativ ſind, und hätte die daraus entſtehenden Formen der Gleichungen entwickeln müſſen. Bey den Gleichungen für die Winkeltheilungen ſetzte er auch die negativen Wurzeln bey Seite. Er begieng hiedurch ſelbſt einen Fehler gegen die Allgemeinheit der Auflöſung, da er einem andern Mathematiker einen ſolchen Fehler vorwarf. Dieſer (er hieß Adrianus Romanus) hatte den Mathematikern eine Gleichung vom 45ſten Grade aufgegeben, deren Auflöſung die Theilung eines gegebenen Winkels in 45 gleiche Theile erfordert. Vieta fand ſie zu des Adrianus Erſtaunen, und zeigte dieſem, daß nicht bloß eine Wurzel der Gleichung eine Genüge thue, ſondern daß 23 Antworten gleich möglich ſind. Er hätte noch hinzufü-

gen müſſen, daß mit der gegebenen Gleichung noch eine andere verbunden ſey, deren poſitive Wurzeln mit in die Reihe der poſitiven Wurzeln der aufgegebenen Gleichung gehören, ſo daß erſt beide Reihen zuſammen genommen eine vollſtändige Auflöſung geben. So viel Scharfſinn und Erfindungskraft auch Vieta in ſeinen Schriften zeigt, ſo konnte er ſich doch noch nicht zu den allgemeinern Lehrſätzen erheben, ſondern blieb bey der Betrachtung beſonderer Fälle ſtehen, welches ſeinen Vortrag weitſchweifig macht. Seine Bezeichnungsart iſt auch unvollkommen. Er druckt in den Lehrſätzen und allgemeinen Rechnungen die Potenzen durch Worte aus, und hat keine Zeichen für Multiplication und Gleichheit, welches er ebenfalls mit Worten anzeigt. Den numeriſchen Coefficienten druckt er auch mit Worten hinter der Potenz aus, wofür in der Sammlung ſeiner Werke eine Zahl hinter der Potenz ſteht. In den Beyſpielen iſt der Coefficient vor das Zeichen der Potenz geſetzt. Dazu kommt eine große Menge Kunſtwörter, die er für die einzelnen Fälle der Gleichungen und die Operationen der Rechnung bildet. Dieſes macht ſeine Werke beſchwerlich zu leſen, und giebt ihnen das Anſehen, als wenn ſie in viel frühere Zeiten gehörten. — Die Werke des Vieta hat Schooten in einem Folianten herausgegeben, ſoviel er deren hat erhalten können, zu Leyden 1656. Die bey ſeinem Leben gedruckten Schriften waren ſchon damahls ſehr ſelten, weil ihr Verfaſſer ſie nur zum Geſchenk ausgab. Eine zur Trigonometerie und Kreismeſſung gehörige, ſehr ſeltene Sammlung iſt zu Paris 1579 in Fol. gedruckt. Aus dieſer iſt nichts in die von Schooten beſorgte aufgenommen, ſ. Cyklotechnie.

Um dieſelbe Zeit mit Vieta bearbeitete gleichfalls mit glücklichem Erfolge in England **Thomas Harriot** die Algebra. Das Werk, welches er darüber verfaßt hat, iſt erſt 10 Jahre nach ſeinem Tode herausgekommen. Es hat den Titel: Artis analyticae Praxis, ad aequationes algebraicas nova, expedita et generali methodo reſolvendas. Londini 1631; 180 pag. in Fol. Der Herausgeber hat ſich nicht genannt. Es war ein Freund des Ver-

faſſers, Namens Walter Warner. Das Werk hat zwey Haupttheile. Der erſte enthält eine Theorie der Gleichungen, und ſoll nur als Grundlage zu dem zweyten und wichtigern, der die Auflöſung numeriſcher Gleichungen, den Hauptgegenſtand der Harriotiſchen Algebra, vorträgt, angeſehen werden. Inzwiſchen iſt das, was Harriot in dem erſten Theile über die Entſtehung der Gleichungen aus der Multiplication binomiſcher Factoren lehrt, ſein wichtigſtes Verdienſt um die Algebra. Er entwickelt die Producte aus zwey, drey und vier Factoren $a \pm b$; $a \pm c$; $a \pm d$; $a \pm f$ nach den verſchiedenen Abwechslungen der Vorzeichen des zweyten Theils, da der erſte ihm zur Bezeichnung der Wurzel einer Gleichung dient. Die Gleichungen zwiſchen dem Product der Factoren, und dem Aggregat der Theile, welche die Entwickelung giebt, nennt er aequatio originalis. Nun ſetzt er einen der Factoren $= 0$, und bringt alsdann das Glied, welches keinen Factor a enthielt, auf die andere Seite ganz allein. Dieſe Gleichung nennt er eine aequationem canonicam. Z. B. Aus der Multiplication der Factoren $a - b$, $a + c$, $a + d$, wenn einer derſelben Null genommen wird, entſteht die canoniſche Gleichung der cubiſchen Ordnung,

$$\begin{array}{lll} aaa & -baa & -bca \\ & +caa & -bda \\ & +daa & +cda = bcd. \end{array}$$

Werden die Größen b, c, d, etc. ſo beſtimmt, daß ein Coefficient dadurch Null wird, ſo heißt die Gleichung eine aequatio canonica ſecundaria, da die primaria eine vollſtändige Gleichung iſt. Von beiden Gattungen der Gleichungen werden alle Fälle durchgegangen, und diejenigen, die nur durch Veränderung der Vorzeichen verſchieden ſind, beſonders aufgeführt. Denn Harriot iſt noch mit dem Gebrauch der negativen Wurzeln ganz unbekannt. Der Gleichung $aa - (b - c)\,a = bc$ giebt er nur eine Wurzel b, und überhaupt giebt er jeder Gleichung nur ſo viele Wurzeln als poſitive darin vorhanden ſind. Wenn eine Gleichung keine poſitive Wurzel hat, ſo erklärt er ſie für

unmöglich, wie die Gleichung $e^3 - 3b^2e = -c^3 - 2b^3$ in Sect VI. probl. 1. Mit den canoniſchen Gleichungen, deren poſitive Wurzeln aus ihrer Formation bekannt ſind, vergleicht Harriot andere, worin die Coefficienten eine andere Form haben, als in jenen. Er nennt dieſe aequationes communes. Wenn eine ſolche mit einer der canoniſchen in Abſicht auf die Vorzeichen übereinkommt, und ihre Coefficienten unter einander auf ähnliche Art größer oder kleiner ſind, als in dieſer, ſo eignet er derſelben eben ſo viele Wurzeln zu, als für die canoniſche gefunden ſind. Z. B. Die Gleichung $a^3 - 3b^2a = 2c^3$, in welcher $c > b$ iſt, vergleicht Harriot mit der canoniſchen, $a^3 - 3rqa = r^3 + q^3$. Da die Vorzeichen in beiden gleichnamig ſind, und in der canoniſchen $(rq)^3 < \frac{1}{4}(r^3 + q^3)^2$, in jener auch $b^6 < \frac{1}{4}(2c^3)^2$ iſt, ſo hat jene nur eine Wurzel, wie die canoniſche, deren Wurzel $q + r$ iſt. Die Cardaniſche Formel findet er auf eine ähnliche Art wie Vieta. Er reducirt nämlich die Gleichung $a^3 + 3b^2a = 2c^3$, durch die Subſtitution, $a = \frac{e^2 - b^2}{e}$, auf die einfache, $e^3 = c^3 + \sqrt{(c^6 + b^6)}$. Die Gleichung $a^3 - 3b^2a = 2c^3$, wenn c kleiner iſt als b, giebt ihm eine unmögliche reducirte, $e^3 = c^3 + \sqrt{-d^6}$, mit welcher er ſich nicht weiter beſchäftigt.

Die numeriſche Auflöſung der Gleichungen, worin Harriot nach dem Urtheil des Herausgebers den Vieta weit übertroffen hat, die auch de Gua a. a. O. für beſſer erklärt, als die von Vieta angewandte, beruht darauf, daß er die Wurzel a in zwey Theile $b + c$ zerlegt, und in der verwandelten Gleichung zuerſt b beſtimmt, darauf einen Theil von c findet, dieſen zu dem Werthe von b ſetzt, und das Aggregat als den erſten Theil b betrachtet, und ſo fortfährt, bis die Wurzel vollkommen gefunden, oder die Annäherung hinlänglich iſt. Inzwiſchen iſt das Verfahren noch Schwierigkeiten unterworfen, beſonders wegen der mittlern Wurzeln zwiſchen der größten und kleinſten; überhaupt noch weitlaufig und verworren.

In der Bezeichnung der Größen iſt Harriot geſchickter als Vieta. Erſtlich gebraucht er kleine Buchſtaben anſtatt der großen von Vieta gewählten; er ſetzt dieſe bey der Multiplication der Größen unmittelbar zuſammen, wie die Buchſtaben eines Wortes, bezeichnet auch die Potenzen durch die Wiederholung des Buchſtabens, der die Wurzel bedeutet (welches auch ſchon Rudolph in ſeiner Coß als dienlich angiebt), ſtatt daß Vieta ſie, wie andere Operationen der Rechnung, durch Worte anzeigt; er ſetzt den Zahlcoefficienten vor das Zeichen der Größe, durch einen Punct abgeſondert; er gebraucht nicht nur das von Recorde ſchon angenommene Symbol der Gleichheit, ſondern ſetzt auch für die Ungleichheit die jetzt üblichen. Daß Harriot den Vieta benutzt habe, erhellet aus ſeinen Anführungen dieſes Analyſten, auch aus der übereinſtimmenden Bezeichnung der Größen. Harriot gebraucht häufig ein Kunſtwort, welches dem Vieta eigen iſt, gradus parodicus, wodurch eine niedrigere Potenz in Vergleichung mit einer höhern angezeigt wird. Doch mag Harriot die beiden wichtigſten Schriften von Vieta, die erſt 1615 herausgekommen, nicht geſehen oder gebraucht haben.

Gewöhnlich wird dem Harriot auch die Erfindung eines Lehrſatzes zugeſchrieben, die Anzahl der poſitiven und der negativen Wurzeln einer Gleichung zu erkennen, jene aus der Anzahl der Abwechſelungen der Vorzeichen + — oder — +, dieſe aus der Anzahl der Folgen + + oder — —, (ſ. Gleichung VI. 3.). Wolf thut dieſes in den Elem. Anal Finit. §. 330, mit der Bemerkung, daß Harriot die Regel durch Induction gefunden habe. Saunderſon ſagt in ſeiner Algebra §. 434, daß man die Regel dem Harriot zuſchreibe, und daß man noch keinen allgemeinen Beweis derſelben gefunden habe. Die Regel findet ſich aber gar nicht in Harriots Werke. Erſtlich weiß H. nichts von negativen Wurzeln, oder ſetzt ſie ganz bey Seite. Aber auch der Satz, daß eine Gleichung ſo viele (poſitive) Wurzeln habe, als Abwechſelungen der Vorzeichen vorhanden ſind, iſt nicht bey Harriot anzutreffen. Dieſen Satz auch nur für die niedrigern Gleichungen aus der Vergleichung der Com-

binationen der Wurzeln herzuleiten, muß gezeigt werden, in welchen Fällen das Aggregat ähnlicher Combinationen das eine oder das andere Vorzeichen bekommt, wie es in dem Artikel, Gleichung, bey den cubiſchen und biquadratiſchen geſchieht. Auch hat Harriot das abſolute Glied der Gleichung immer auf eine Seite des Gleichheitszeichens allein geſtellt. Wallis hat in ſeiner hiſtoriſchen Abhandlung der Algebra einen ausführlichen Auszug aus Harriots Werke eingerückt, mit übermäßigen Lobeserhebungen, um die franzöſiſchen Analyſten, als Vieta und beſonders Descartes, herabzuſetzen. Er glaubt, daß letzterer, der zuerſt jenen Lehrſatz vorgetragen hat, ihn aus der bloßen Anſicht der von Harriot aufgeſtellten Fälle gezogen haben möge, ohne die dabey nöthige Einſchränkung zu beachten. Das iſt in der That kein Lob für Harriot, wenn dieſer den Satz in ſeinem eigenen Werke aus der Acht gelaſſen hätte. Wallis würdigt den Lehrſatz ſelbſt herab, weil Descartes ihn vorgetragen hat. Er ſey trüglich, und Harriot habe zuverläſſigere Regeln gegeben, die Anzahl der poſitiven und negativen Wurzeln zu erfahren. Dieſes iſt eine ungegründete und partheyiſche Behauptung. Ein neuerer Engländer, Horsley, der Herausgeber von Newtons Werken, urtheilt hingegen ſehr ungünſtig von ſeinem Landsmanne. In der Anmerkung zu der Arithm. univ. p. 166 ſagt er: Harriotus de numero radicum nil plane ſani habet. Vir magnae quidem diligentiae, ſed mediocris ingenii, ea fere in Algebraicis intellexit, quae a Cardano et Vieta acceperat, et radices, ſicut illi fecerant, cuilibet aequationi totidem tribuit, quot illa poſitivas habeat, negativarum ne in ullo quidem caſu ratione habita, utpote quas ſemper inutiles judicavit, cum earum naturam minime perſpexiſſet — p. 180. Harriotus, qui arcte adeo ad lumen connivebat, ut quantitates — c, — d, aequationum, quae ex illis procreatae eſſent, radices eſſe conſtantiſſime negaret, qui fieri potuit, ut ille intelligeret coëfficientium geneſin e radicum multiplicatione,

Die meiſten Verdienſte um die Algebra hat in dieſen ältern Zeiten ein wenig bekannter niederländiſcher Mathematiker, **Albert Girard**, der um das Jahr 1633 geſtorben iſt. Von ihm iſt: **Invention nouvelle en l'Algebre, tant pour la ſolution des equations, que pour recoignoiſtre le nombre des ſolutions qu'elles reçoivent, avec pluſieurs choſes qui ſont neceſſaires à la perfection de ceſte divine ſcience. A Amſterdam M DCXXIX**, in kl. Qu. Bogen A bis H, ohne Seiten-Anzeige.

Dieſe kleine, aber merkwürdige, ſeltene Schrift enthält drey Abhandlungen. Die erſte iſt eine kurze Einleitung in die Arithmetik; die zweyte liefert manches Neue über die Algebra; die dritte betrifft die von dem Verfaſſer entdeckte Meſſung des Flächen-Inhalts ſphäriſcher Dreyecke und Vielecke. Hutton giebt in ſeinem Wörterbuche eine umſtändliche Nachricht von dem Inhalte der beiden erſten Abhandlungen; auch habe ich durch die Güte des Hrn. Prof. Pfleiderer einen von Hrn. Repetent Hauber verfertigten ausführlichen Auszug des algebraiſchen Theils erhalten.

In der Bezeichnung der Potenzen und Wurzeln folgt Girard meiſtens ſeinem Landsmanne Stevin; doch gebraucht er auch für die Wurzeln die Zeichen $\sqrt{}$ oder $\sqrt[2]{}$, $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$, u. ſ. w. Für die Gleichheit hat er kein Zeichen, ſondern ſetzt das Wort ſelbſt hin; das Zeichen $=$ bedeutet bey ihm einen Unterſchied unbeſtimmt. Die mehrtheiligen Größen ſchließt er in Klammern ( ) ein, wenn ſie wie eine eintheilige behandelt werden ſollen. Die Ungleichheit bezeichnet er durch die Charaktere *ff* und §.

Die Ausziehung der Cubikwurzel aus einer binomiſchen Größe von der Form $a + \sqrt{b}$ lehrt Girard an einem numeriſchen Beyſpiele, wie er glaubt, auf eine von ihm zuerſt gefundene Art. Ich finde ſein Verfahren aber ſchon in Chriſtoph Rudolphs Coß am Ende derſelben, (ſ. Cubikwurzel). Zur Verwandlung der Gleichungen bedient Girard ſich insbeſondere des von Vieta mit der Benennung Iſomoeria

angewandten Verfahrens. Es beſteht darin, daß die Termini einer Gleichung, auch die fehlenden als vorhanden betrachtet, in die Glieder einer geometriſchen Reihe multiplicirt werden, wodurch die Coefficienten verkleinert, und von Brüchen und Irrationalität befreyt werden können. Die Wurzeln der Gleichung werden dadurch in einem gegebenen Verhältniſſe verändert. Bey den quadratiſchen Gleichungen bemerkt er, daß man die Wurzeln (ſolutions) mit — nicht bey Seite ſetzen dürfe. Er giebt auch die Form der unmöglichen Wurzeln ganz beſtimmt an. Man muß, ſagt er, alle Wurzeln einer Gleichung ſuchen, weil man dadurch zum beſſern Verſtändniß deſſen, was man ſucht, gelangt, und erläutert dieſes durch das Beyſpiel der Gleichung $x^2 = 16x - 28$. Daraus könne man die Aufgabe machen, zwey Zahlen zu finden, deren Summe 16, und deren Product 28 iſt. Dieſe ſeyn 2 und 14, jede ein Werth von x, und mehrere Werthe gebe es nicht. Von den unmöglichen Wurzeln giebt er den Nutzen, den ſie haben, richtig an. Die cubiſchen Gleichungen mit drey möglichen Wurzeln löſet er durch Hülfe der Sinustafeln auf. Er wird der erſte ſeyn, der eine Regel für dieſes Verfahren gegeben hat, da Vieta nur die trigonometriſche Formel anführt, ohne daraus eine Regel für die Auflöſung cubiſcher Gleichungen zu ziehen. Girard aber hat noch nicht bemerkt, daß alle drey Wurzeln durch Dreytheilung eines Winkels gefunden werden können. Denn nachdem er eine Wurzel, die er die vornehmſte (principale) nennt, durch den Sinus des dritten Theils eines Winkels gefunden hat, ſucht er die beiden andern durch Auflöſung einer quadratiſchen Gleichung, auf welche die cubiſche herunter gebracht wird. Die Gleichung, die er zum Beyſpiele nimmt, iſt $x^3 = 13x + 12$. Die gefundene Wurzel iſt $= + 4$. Die Summe der beiden andern iſt nun $= -4$, ihr Product iſt $\frac{-12}{-4} = +3$. Daher iſt die Gleichung für ſie $x^2 = -4x - 3$, deren Wurzeln ſind -3 und -1. Vieta findet in der cubiſchen Gleichung zwiſchen dem Sinus eines Winkels und dem des dreyfachen

zwey Werthe jenes, wenn der letztere gegeben iſt, läßt aber den negativen unbeachtet. Girard richtet ſeine Regel auf eine Gleichung von der Form, wie $x^3 = 13x + 12$, ein, und gebraucht einen Winkel über 180 Gr., der in drey Theile getheilt wird. Jene Gleichung gehört eigentlich für die Relation zwiſchen dem Coſinus eines Winkels und dem des dreyfachen. Hingegen die Gleichung von der Form, wie $x^3 = 30x - 36$, die für die Sinus des einfachen und dreyfachen Winkels gehört, verwandelt er in eine von der Form wie die erſtere, indem er die Vorzeichen von x ändert, von den Wurzeln aber das Entgegengeſetzte nimmt, (ſ. Goniometrie, V.). Für die cubiſchen Gleichungen mit einer möglichen Wurzel giebt Girard eine ſinnreiche Auflöſung durch die Trigonometrie an. Sie beruht darauf, daß ein Winkel ω gefunden werde, von der Größe, daß $\sin 2\omega + 2m = 2 \tang \omega$ ſey. Denn dieſe Gleichung führt auf dieſe: $\sin\omega^6 + m^2 \sin\omega^2 - m^2 = 0$, und, wenn $\sin\omega^2 = \frac{x}{r}$ genommen wird, auf dieſe: $x^3 + m^2 r^2 x - m^2 r^3 = 0$, mit welcher die gegebene Gleichung zu vergleichen iſt. Girard zeigt ſeine Methode an einem Beyſpiele, (nicht auf die hier gebrauchte allgemeine Art), und ſucht durch wiederholte Verbeſſerungen, nach einer Art von poſitio falſi, den wahren Werth des Winkels. Er nimmt gutdünklich einen Winkel, den ich α nenne, und ſucht aus der Gleichung $\sin 2\alpha + m = 2 \tang \beta$, den Werth von β, ſetzt dieſen für den zuerſt genommenen α, und ſucht nun einen andern verbeſſerten Werth für β, mit welchem er auf dieſelbe Art und dann ſo weiter verfährt, bis daß die beiden Winkel α und β einander gleich werden. Die Differenzen-Rechnung zur ſchnellen Annäherung anzuwenden, konnte ihm noch nicht einfallen. Gleichungen mit rationalen Wurzeln löſet er dadurch auf, daß er die Diviſionen des gegebenen Gliedes verſucht. Er nennt dieſes Verfahren neu. Bey Gleichungen mit irrationalen Wurzeln gebraucht er eine Annäherungsmethode, die faſt dieſelbe mit der von Stevin gebrauchten iſt. Die Glieder der Gleichung werden mit

den Gliedern der Progreſſion, 1, 100, 1000, u. ſ. multiplicirt, wodurch die Wurzeln in einem gegebenen Verhältniſſe vergrößert werden, ſo daß man aus den Wurzeln der verwandelten Gleichung die der urſprünglichen leicht herleiten kann.

Girard war der erſte, der die Zuſammenſetzung der Coefficienten in einer Gleichung aus den Combinationen der Wurzeln jeder Art zeigte, da Vieta ſie bloß für poſitive Wurzeln bemerkt hatte; und Harriot in der That zwar negative Wurzeln in die Combinationen aufnahm, aber ſie nicht als Wurzeln der Gleichung betrachtete. Der Satz lautet bey Girard folgendergeſtalt: **Toutes les equations d' algebre reçoivent autant de ſolutions, que la denomination de la plus haute quantité le demonſtre; excepté les incomplettes: et la premiere faction des ſolutions eſt eſgale au nombre du premier meſlé, la ſeconde faction des meſmes eſt eſgale au nombre du deuxieſme meſlé, la troiſieſme au troiſieſme, et tousjours ainſi, tellement que la derniere faction eſt eſgale à la fermature, et ce ſelon les ſignes qui ſe peuvent remarquer en ordre alternatif.** Der Ausdruck faction bedeutet die Summe der Combinationen, und meſlé iſt ein Glied einer Gleichung, die aus verſchiedenen Potenzen der unbekannten Größe zuſammengeſetzt oder gemiſcht iſt, zwiſchen dem höchſten und niedrigſten Gliede; fermature iſt das letzte, oder das gegebene Glied der Gleichung. Der ordre alternatif bedeutet, daß die Potenzen mit ungeraden Exponenten auf der einen Seite des Gleichheitszeichens, die mit geraden auf der andern ſtehen. Daß Girard die unvollſtändigen Gleichungen ausnimmt, weiß ich nicht zu erklären, da er in den Beyſpielen auch unvollſtändige Gleichungen aufführt, und die fehlenden Glieder mit dem Coefficienten o einſchaltet. Dieſer gilt auch für eine faction. Die unmöglichen Wurzeln ſieht er auch als Auflöſungen an. Denn von der Gleichung $x^4 = 4x - 3$ giebt er vier factions an, o, o, 4, 3, und daher ihre vier ſolutions, 1; 1; $-1 + \sqrt{.-2}$; $-1 - \sqrt{2}$; mit der

Bemerkung, daß das Product der beiden letzten 3 iſt. Girard iſt auf den angeführten wichtigen Satz vermuthlich durch die ſehr gute Anſicht der Gleichungen gekommen, daß ſie überhaupt die Aufgabe enthalten, aus den Factionen mehrerer Zahlen dieſe zu finden. Ein ſolches Beyſpiel iſt ſchon angeführt, und es kommen mehrere in ſeiner Schrift vor. Die Natur der Gleichungen, ſagt er, beſtehe darin, daß ihre Glieder aus Factions zuſammengeſetzt ſind, und alle Aufgaben hätten kein anderes Band unter ſich als dieſes. Die ganze Lehre von den Gleichungen wird am vortheilhafteſten auf dieſe Vorſtellung gegründet, wie es in dem Artikel, **Gleichung**, geſchehen wird. Girard hat ſich mit den Combinationen beſchäftigt. Die Menge derſelben von irgend einer Gattung bey einer gegebenen Anzahl von Dingen ſtellt er durch ein Zahlen-Dreyeck, wie es nachher Pascal gethan hat, dar, auf folgende Art,

$$\begin{array}{c} 1 \\ \hline 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \end{array}$$

und nennt es triangle d' extraction, z. B. wenn 4 Zahlen ſind, ſo hat man die vierte Reihe zu nehmen, in welcher 1 den Coefficienten der höchſten Potenz in einer Gleichung vom vierten Grade bedeutet; 4 die erſte Faction als Summe von vier Zahlen; 6 die Anzahl der Producte von je zweyen, u. ſ. f. Auf jenem Satze beruht auch das Verfahren Girards, wenn eine Wurzel gefunden iſt, die Gleichung zu erniedrigen, weil dadurch die Combinationen der übrigen Wurzeln bekannt werden.

Aus demſelben Satze muß Girard auch die merkwürdigen Formeln für die Summen der Potenzen der Wurzeln, ausgedruckt durch die Coefficienten in der Gleichung, das iſt, durch die Combinationen der Wurzeln, hergeleitet haben. Er führt ſie zum Beweiſe an, daß die Coefficienten in einer Gleichung nicht auf eine andere Art als durch die Combinationen der Wurzeln gebildet werden können. In ſeiner Sprache und mit ſeinen Bezeichnungen ſind die Formeln folgendergeſtalt ausgedruckt. „Soit A premier

meſlé, B ſecond, C troiſieſme, D quatrieſme, etc. alors en toute ſorte d' equations

A ſera la ſomme des	ſolutions
Aq — B2	quarez
Acub — AB3 + C3	cubes
Aqq — AqB4 + AC4 + Bq2 — D4	quare - quarez
etc.	etc.

Die numeriſchen Coefficienten ſtehen hinter den Literalgrößen.

Girard erklärt die Bedeutung der negativen Wurzeln in der Geometrie ſehr gut als ſolche, die Linien darſtellen, deren Richtung die entgegengeſetzte iſt von der Richtung derer, die die poſitiven Wurzeln angeben. — Von ihm rühren die Ausdrücke, größer als Nichts, kleiner als Nichts, her. Die unmöglichen Wurzeln nannte er involvirte, auch unmögliche. Er hat auch die Eintheilung der Zahlen in Millionen, Billionen, u. f. eingeführt.

Die Verbindung der Algebra mit der Geometrie der krummen Linien iſt dasjenige, wodurch **Descartes** ſeinen erfinderiſchen Scharfſinn vorzüglich gezeigt, und ſich einen unbeſtrittenen Ruhm erworben hat. Seine Geometrie, die zuerſt im J. 1637 franzöſiſch erſchien, iſt ein kleines, aber an neuen Behandlungsarten reiches Werk. Die erſte kurze Abtheilung enthält die geometriſche Auflöſung oder Conſtruction der Gleichungen vom zweyten Grade, wozu der Kreis mit der geraden Linie hinlänglich iſt. Die zweyte ſtellt die Natur aller krummen Linien durch eine Gleichung zwiſchen zwey veränderlichen Größen dar. Dieſe Darſtellung war ganz neu, und hat den Weg zu der Anwendung der Analyſis des Unendlichen auf die Geometrie gebahnt. In der dritten Abtheilung zeigt Descartes, wie die höhern Gleichungen durch geometriſche Zeichnung aufgelöſet werden. Zu dieſem Zwecke ſchickt er einen kurzen und netten Begriff der wichtigſten algebraiſchen Lehrſätze und Verfahrungsarten voran, wobey er aber nicht bemerkt, wer ſie erfunden habe, und was ihm eigen ſey. Die Be-

weiſe der mehreſten Sätze läßt er weg, weil ſie ihm ſo leicht ſchienen, daß er glaubt, der Leſer werde ſie ohne Mühe finden, und davon mehr Nutzen haben, als von der Erlernung des Vorgeſagten. Die gegebenen Größen bezeichnet Descartes durch die erſten Buchſtaben des Alphabets, die unbekannten durch die letzten, wie es gegenwärtig üblich iſt. Auch die unveränderlichen und die veränderlichen Größen in einer unbeſtimmten Gleichung für eine krumme Linie unterſcheidet er auf dieſe Art, eine Abweichung in einem gewiſſen Falle ausgenommen. Die Potenzen bezeichnet er durch die Wurzel mit dem Exponenten an der Spitze, welches **Herigone** in ſeinem mathematiſchen Curſus kurz vorher auch gethan hat. — Die Gleichheit zweyer Größen bezeichnet Descartes durch ein nicht mehr gebräuchliches Zeichen ∞. Die negativen Wurzeln einer Gleichung nennt er **falſche Wurzeln**, ein ſehr unbequemer, leicht mißzudeutender Ausdruck, der ſich, aber gar nicht durchgängig, ein Jahrhundert hindurch im Gebrauch erhalten hat. Descartes erklärt ihn aber völlig richtig, daß dadurch Linien angezeigt werden, die eine entgegengeſetzte Lage in Beziehung auf diejenigen haben, die als wahre Wurzeln betrachtet werden. Unter den algebraiſchen Sätzen, die Descartes vorträgt, ſind hier nur folgende zwey nöthig bemerkt zu werden. Erſtlich ſagt er, daß in jeder Gleichung ſo viele wahre Wurzeln **ſeyn können**, als Abwechſelungen der Vorzeichen da ſind, und ſo viele falſche, als Folgen gleicher Vorzeichen. Er führt dieſes als eine Folgerung aus dem Satze von der Entſtehung der Gleichungen durch die Multiplication aus einfachen zweytheiligen Factoren an. Ob er ſelbſt oder ein anderer dieſen Satz erfunden habe, und wie er zu beweiſen ſey, ſagt er nicht. Vermuthlich hat er ſelbſt ihn gefunden. Als nachher Roberval ihm durch ein Beyſpiel die Unrichtigkeit des Satzes zeigen wollte, antwortete er, daß er nicht geſagt hätte, **es ſind** ſo viele wahre und ſo viele falſche Wurzeln vorhanden, ſondern **es können** ſo viele da ſeyn, beruft ſich auch deswegen auf eine andere Stelle ſeiner Geometrie von den unmöglichen Wurzeln, die aber

von der Einſchränkung jenes Satzes auf lauter mögliche Wurzeln nichts enthält. Descartes ſcheint ihn zuerſt unbedingt angenommen zu haben, da die Einſchränkung, daß alle Wurzeln möglich ſeyn müſſen, leicht unbeachtet bleibt, wenn bey der Multiplication der binomiſchen Wurzelfactoren die Wurzeln jede durch ein Symbol bezeichnet werden. Denn einen Satz, der eine Einſchränkung nöthig hat, ohne dieſe aufſtellen, iſt eine große logiſche Unvorſichtigkeit, die ein guter Kopf nicht leicht begehen wird. Seine Worte laſſen ſich auch grammatiſch von der Unbedingtheit des Satzes auslegen. Sie ſind: **On connoit auſſi de ceci, combien il peut y avoir de vrayes racines et combien de fauſſes en chaque équation.** Es iſt hier nicht von möglichen und unmöglichen Wurzeln die Rede, ſondern von den entgegengeſetzten, wie viele von der einen und von der andern Gattung vorhanden ſeyn können.

Die zweyte wichtige Bemerkung von Descartes iſt, daß eine Gleichung vom vierten Grade unter einer gewiſſen Bedingung in zwey trinomiſche mögliche Factoren zerfällt werden, und mittelſt derſelben aufgelöſet werden kann. Dieſes iſt das erſte Beyſpiel von der Methode unbeſtimmter Größen, wenn man nicht das von Ferrari ſchon gebrauchte Verfahren bey der Auflöſung biquadratiſcher Gleichung als ein ſolches anſehen will. Descartes bemerkt, daß man die Methode auch bey höhern Gleichungen anwenden könne. Die Anwendung der Geometrie auf die Gleichungen vom dritten und vierten Grade beſteht darin, daß Descartes eine Parabel und einen Kreis zeichnet, deren gemeinſchaftliche Ordinaten die Wurzeln der gegebenen Gleichung ſind. Die Gleichungen vom fünften und ſechſten Grade löſet er auf ähnliche Art mittelſt einer paraboliſchen Conchoide (oder Muſchelline) und eines Kreiſes auf, (ſ. Anwendung der Geometrie auf die Algebra.)

Fermat, der ſich mehr mit den höhern Gegenſtänden der Analyſis beſchäftigte, als mit der Algebra, gab eine Methode an, die irrationalen Größen aus einer Gleichung wegzuſchaffen. Er legte den Analyſten ein ſchweres Ex-

empel, das fünf Quadrat-Wurzeln enthält, zur Reduction vor, wovon er ſelbſt aber keine Auflöſung gegeben hat. Seine Methode erklärt er nur an einem leichten Beyſpiele. (Varia opera Fermatii, p. 58. Preisſchrift von Genty, Influence de Fermat ſur ſon ſiécle, pag. 67. Carteſii epiſtolae T. III. ep. 75.)

Die Algebra war nunmehr ſo weit gebracht, daß es noch darauf ankam, die erfundenen Hauptlehren auf das bündigſte zu verknüpfen, ſie in ihrer Allgemeinheit gehörig zu erweiſen, noch verſchiedenes zuzufügen, was z. B. die unmöglichen, und die gleich großen Wurzeln, auch die Elimination bey mehreren Gleichungen und unbekannten Größen betrifft, und die Auflöſung numeriſcher Gleichungen möglichſt bequem zu machen. Die Gleichungen über den fünften Grad hinaus aufzulöſen, blieb auch noch eine Forderung an die Nachfolger jener erſten Pfleger dieſer Wiſſenſchaft; allein dieſe iſt bisher noch unerfüllt geblieben, man müßte denn die Auflöſung der Gleichungen durch Umkehrungs-Reihen als genugthuend anſehen.

Unter den Mathematikern, welche den von Descartes eröffneten Weg verfolgten, machten de Beaune und Hudde ein paar Zuſätze zu der Theorie der Gleichungen.

De Beaune, welcher königlicher Rath bey dem Preſidial von Blois war, zeigte, wie in den Gleichungen bis mit zum vierten Grade die Gränzen der poſitiven Wurzeln aus den Coefficienten gefunden werden. Er geht alle Fälle mit verſchiedenen Vorzeichen einzeln durch, auch alle Fälle unvollſtändiger Gleichungen. Man kann daher ſeine Arbeit benutzen, um in jedem gegebenen Falle einer cubiſchen oder biquadratiſchen Gleichung die Größen, zwiſchen welchen die poſitiven Wurzeln enthalten ſind, zu beſtimmen, wenn dieſe auch den äußerſten Wurzeln nicht immer nahe kommen werden. Die Gränzen für die negativen Wurzeln zu finden, muß man die Vorzeichen der Glieder in den geraden Stellen mit den entgegengeſetzten vertauſchen, als wodurch die Wurzeln ſich in die entgegengeſetzten verwandeln. Die Abhandlung des de Beaune de limitibus aequationum iſt nebſt einer andern über die Gleichungen

nach ſeinem Tode von Erasmus Bartholinus 1673 her-ausgegeben, und einer Ausgabe von der Geometrie des Descartes beygefügt. Für numeriſche Gleichungen hat man noch ein anderes Verfahren, die nächſten ganzen Zahlen an jeder Wurzel zu finden, (ſ. Gränzen einer Gleichung).

Johann Hudde, der Bürgermeiſter zu Amſterdam war, und 1704 in einem hohen Alter geſtorben iſt, zeigte, wie die gleich großen Wurzeln einer Gleichung gefunden werden. Wenn nämlich eine Gleichung zwey gleich große und gleichnamige Wurzeln hat, und ihre Glieder) die etwa fehlenden mitgezählt) durch die Glieder einer arithmetiſchen Reihe folgweiſe multiplicirt werden, ſo hat die dar-aus entſtehende neue Gleichung eine Wurzel mit der gegebenen gemein, oder beide haben einen gemeinſchaftlichen Theiler von der Form x — p. Dieſen gemeinſchaftlichen Theiler lehrt Hudde finden. Hat die Gleichung drey gleiche Wurzeln, ſo wird nach Huddens Vorſchrift die Gleichung auf die beſagte Art mit einer arithmetiſchen Reihe multiplicirt, und die dadurch entſtehende Gleichung auf ähnliche Art wieder mit einer ſolchen Reihe. Die nun hervorgehende Gleichung hat einen gemeinſchaftlichen Factor mit der gegebenen, wie x — p, und die Wurzel p kommt dieſer dreymahl zu. Auf ähnliche Art werden auch die Wurzeln gefunden, die in einer Gleichung vier oder mehrmahls vorhanden ſind. Hudde lehrt das Verfahren in einer Abhandlung de reductione aequationum, die der vorher gedachten Ausgabe von Descartes Geometrie angehängt iſt.

Mit der Conſtruction der Gleichungen beſchäftigte man ſich im 17ten Jahrhunderte viel. Descartes hatte dazu bloß den Kreis und die Parabel gebraucht. De Slüſe, Canonicus in Lüttich und Abt von Amas, erweiterte dieſe Methode, und zeigte, daß man ſie auf unendliche Arten durch den Kreis und einen der Kegelſchnitte conſtruiren und dadurch auflöſen könne. Seine Abhandlung hat den Titel: Meſolabum, ſeu duae mediae proportionales per circulum et ellipſin vel hyperbolam infinitis

modis exhibitae. Leod. 1659. 4, und 1668, cum parte altera de Analyſi et Miſcellaneis. In der erſten Ausgabe zeigt er nicht, wie er die Conſtructionen gefunden habe, welches in der zweyten geſchieht, die zugleich viele feine geometriſche Unterſuchungen enthält. Thomas Baker, ein Engländer, lehrte 1684 in einer Schrift: The geometrical key, or the gate of equations unlocked (Geometriſcher Schlüſſel, oder aufgeſchloſſene Thür der Gleichungen) alle cubiſche und biquadratiſche Gleichungen, ohne vorgängige Verwandlung, mittelſt eines Kreiſes und einer einzigen angenommenen Parabel zu verzeichnen. Dieſes Verfahren iſt noch unter dem Namen, Bakers Centralregel, bekannt (ſ. Anwendung d. Geom. auf die Algebra, III.). Weil Bakers Vorſchriften, wie von den Vorzeichen + und — bald das eine, bald das andere zu gebrauchen iſt, zu große Achtſamkeit erfordern, ſo ſuchte Halley eine bequemere Verzeichnungsart, die er in den Philoſ. Tranſ. 1687. nr. 188 bekannt machte. Dieſen Aufſatz hat 's Graveſand ſeiner Ausgabe von Newtons Arithm. univ. beygefügt. In dieſem Werke zeigt Newton, wie die Conchoide zur Verzeichnung cubiſcher Gleichungen gebraucht werden könne, und auch, wie dazu jeder Kegelſchnitt diene. Halley zeigte ferner, wie die Anzahl der möglichen Wurzeln, ihre Granzen und ihre Beſchaffenheit für alle Fälle cubiſcher und biquadratiſcher Gleichungen geometriſch dargeſtellt werden können. Philoſ. Tranſ. 1687. nr. 190.

Newton gab in ſeiner allgemeinen Arithmetik eine feine Regel, die Anzahl der unmöglichen Wurzeln einer Gleichung zu finden, die inzwiſchen bisweilen in ſo fern trügen kann, daß mehr unmögliche Wurzeln vorhanden ſind, als ſie angiebt. Sie beruht darauf, daß gewiſſe algebraiſche Zuſammenſetzungen größer oder kleiner ſeyn müſſen, als andere, wenn alle Wurzeln möglich ſind. Man darf aber dieſen Satz nicht umkehren, da das Gröſſere oder Kleinere einen Spielraum zuläßt, ſo daß dieſelbe Ungleichheit auch bey unmöglichen Wurzeln Statt haben kann. Newton hat den Beweis ſeiner Regel nicht mit-

getheilt. **Maclaurin** hat den Beweis mit andern Vorſchriften zur Entdeckung der unmöglichen Wurzeln in den Phil. Tranſ. 1726 und 1729 nr. 394 und 408 vorgetragen. Auch **Campbell** hat daſelbſt nr. 404 einen Beweis der Regel geliefert. Dieſe Abhandlungen ſind in der angeführten Ausgabe von Newtons allg. Arithm. anzutreffen. Maclaurin hat in ſeiner Algebra P. II. ch. 11. einen Beweis gegeben. De Gua hat ſich auch damit beſchäftigt in den Mem. d. Paris 1741, und du Sejour in denſelben für das Jahr 1772. (ſ. unmögliche Wurzeln).

Die Gränzen der Wurzeln einer Gleichung zu finden, gab Newton eine neue Methode in dem gedachten Werke, wozu er die Sätze von den Summen der Potenzen der Wurzeln benutzte, die er vielleicht ſelbſt entdeckt hat, wenn gleich ſchon Albert Girard darauf lange vor ihm gekommen iſt. Sie wurden wenigſtens durch Newton bekannt, und daher ihm zugeſchrieben. Er hat ihnen auch eine andere Form gegeben, als ſie bey Girard haben, (ſ. Combination VII).

Tſchirnhauſen trug in den Actis Erud. 1683 eine allgemeine Methode zur Auflöſung der Gleichungen vor, von welcher er ſich aber zu viel verſprach Sie erfordert oft die Auflöſung einer höhern Gleichung als die vorgegebene iſt, (ſ. Gleichung V).

Abraham de Moivre zeigte in den Tranſactionen 1698, wie aus einer Gleichung mit unbeſtimmt vielen Gliedern die Wurzel gezogen werden kann, das iſt, wie eine Reihe umgekehrt wird. Dieſes hatte Newton auch ſchon gefunden (Newt. epiſt. ad Oldenburgium 1676. Opuſc. I. p. 354), aber noch nicht bekannt gemacht.

De Lagny gab allgemeine Gränzformeln für die Wurzeln, nachdem dieſe bis auf einen Bruchtheil in ganzen Zahlen gefunden ſind. Méthodes nouvelles et abrégées pour l'extraction et l'approximation des racines et pour reſoudre par le cercle et la ligne droite pluſieurs problêmes ſolides et ſurſolides, etc. par M. de Lagny. Seconde édition, à Paris

1692. Dieſes veranlaßte Halley, bequeme Gränzformeln für die Wurzeln aus dem Binomium $a^n + b$ zu ſuchen, deren eine irrational iſt, und die Wurzel (für ein poſitives b) zu groß angiebt, die andere rational und zu klein iſt. Zugleich zeigt er auch, wie die Annäherung zu dem Werthe einer Wurzel ſchnell bewerkſtelligt werden kann, in den Phil. Tranſ. 1694. n. 210.

Raphſon lehrte ein allgemeines Verfahren die Wurzeln durch Näherung zu finden, in ſeiner Analyſis aequationum univerſalis 1690 (zweyte Ausg. 1697), welches Werk Halley rühmt. **Brook Taylor** theilte in den Tranſactionen für 1718 eine Verbeſſerung der Annäherungsmethode mit, die er darin im Jahre 1700 vorgetragen hatte.

Wie die Cardaniſche Regel für cubiſche Gleichungen auch auf den Fall, da alle drey Wurzeln möglich ſind, anzuwenden ſey, blieb den Algebraiſten dunkel, ehe man nicht die Wurzel aus einer zweytheiligen Größe durch eine Reihe darſtellen konnte. Sie konnten nur in ſolchen Fällen ſie anwenden, da die Cubikwurzeln die Form ihrer Cuborum haben, indem alsdann das Unmögliche ſich hebt. Das hatte Bombelli ſchon gefunden. Die Methode iſt aber indirect. **Leibnitz** machte zuerſt die Bemerkung in einem Briefe an Wallis, vom Jahr 1698, daß die Cardaniſche Formel in jenem Falle eine wahre Größe iſt, ob ſie gleich die Form einer unmöglichen hat, weil nämlich das Unmögliche ſich virtualiter, wie er ſich ausdrückt, aufhebe; es verſchwinde, wenn die Cubikwurzel aus jedem der beiden Theile der Formel gezogen werde, in dem Aggregat der Wurzeln. (Walliſii Opp. T. III. coll. epiſt. 27. und Leibn. Opp T. III p. 126; vergleiche einen Brief an Oldenburg vom Jahre 1675. Opp T. III. p. 35, wo Leibnitz von einer Regel redet, die keine Verſuche erfordert, und das Unmögliche begreift.) Allein erſt lange nachher nahm man dieſe Rechnung wirklich vor. **Nicole** that es in vier Abhandlungen, die in den Mem. de l'Acad. des Scienc. 1738, 1741 und 1743 befindlich ſind. In einer Abhandlung in dem Jahrgange von

1744 giebt er den cubiſchen Gleichungen zweyerley Formen, die geſchickt ſind, alle drey Wurzeln durch Näherung zu finden, (ſ. Cardans Regel). Man hat ſich noch in den neueſten Zeiten viel mit der Cardaniſchen Regel beſchäftigt. Die mehreſten Schriften darüber ſind in dem gleich vorher angewieſenen Artikel angeführt.

Wenn man die Cardaniſche Formel allgemeiner macht, und die Wurzel einer Gleichung ſetzt $x = \frac{1}{2}(\sqrt{(1+a^2)}+a)^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{2}(\sqrt{(1+a^2)}-a)^{\frac{1}{n}}$, oder auch $x = \frac{1}{2}(a+\sqrt{(a^2-1)})^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{2}(a-\sqrt{(a^2-1)})^{\frac{1}{n}}$, wo n eine ungerade ganze Zahl iſt, ſo führt dieſes zu einer rationalen Gleichung für x, in welcher bloß die ungeraden Potenzen von x vorkommen, und die Coefficienten gewiſſe reguläre Functionen von n ſind. Dieſe Gleichungen gab Moivre in den Phil. Tranſ. 1707. n. 309. Anhang zu Newtons Arithm. univ. p. 270. Die Wurzel iſt der Sinus oder Coſinus eines hyperboliſchen Sectors, (ſ. Goniometrie VII.)

Die Regel des Descartes über die Anzahl der poſitiven und negativen Wurzeln einer Gleichung erwies zuerſt de Gua in den Mem. de l' Acad. des Sc. 1741; hernach auf andere Arten **Segner**, **Käſtner**, **Äpinus**, **Milner**. (S. Gleichung VI. 5).

Fontaine gab in den Mem de l' Acad. des Sc. 1747. eine Methode an, die Wurzeln durch Näherung zu finden, welche ganz allgemein seyn ſoll, aber beſchwerlich und langſam iſt, auch eine weitläufige Vorarbeit erfordert, weil es auf Bedingungen wegen der Möglichkeit und Unmöglichkeit der Wurzeln ankommt, die für jeden Fall zur Hand seyn müſſen. Die Methode iſt nicht in Gebrauch gekommen. In der Encyclopédie méthodique, partie mathém. art. Equation, macht d'Alembert Erinnerungen wegen ihrer Zuverläſſigkeit. Eine genauere Prüfung derſelben hat la Grange in ſeinem Werke de la réſolution des équations numériques (à Paris an VI.), p. 153 — 164 angeſtellt. Er findet ſie für höhere Gleichungen als die vom vierten

Grade nicht anwendbar, und in gewiſſen Fällen trüglich. In den Pariſer Mem. für 1747 iſt nur ein Abriß der Methode enthalten. Vollſtändiger, aber auch ohne Beweiſe, findet ſie ſich in der Sammlung von Memoiren des Verfaſſers, die im Jahr 1764 herausgekommen iſt.

Euler hat manche zur Algebra gehörige Abhandlungen geliefert. Eine merkwürdige iſt: de formis radicum aequationum cujusque ordinis conjectatio. Comm. Petr. T. VI. a. a. 1732. Darin iſt eine neue Methode zur Auflöſung biquadratiſcher Gleichungen enthalten, die in dem Artikel, Gleichung IV. befindlich iſt. Von Euler ſind zwey Abhandlungen über die unmöglichen Wurzeln, eine in den Mem. de Berlin 1749, die andere in den Nov. Comm. Petr. T. XIII. 1768; ferner über die Auflöſung der Gleichungen jedes Grades, N. C. Petr. T. IX. 1762; und Bemerkungen über die Wurzeln der Gleichungen, N. Comm. Petr. XV. worin die Sätze von den Summen der Potenzen der Wurzeln bewieſen werden; auch eine Näherungsmethode für die Wurzeln Nova Acta Petr. 1788. In der Introd. in Anal. Infin. zeigt Euler, wie die rücklaufenden Reihen zur Berechnung der Wurzeln gebraucht werden können, und handelt darin auch die Conſtruction der Gleichungen ab. In den Inſtitt. Calc. diff. lehrt er eine Anwendung der Differentialrechnung zur Auflöſung der Gleichungen durch den Gebrauch des Taylorſchen Lehrſatzes, ferner wie mittelſt der Lehre vom Größten und Kleinſten die wirklichen Wurzeln entdeckt werden können, und welche Kennzeichen der unmöglichen Wurzeln ſich angeben laſſen.

Lambert hat Unterſuchungen über die Gleichungen jedes Grades in den Mem. de Berlin 1763 angeſtellt. Eine lehrreiche Abhandlung über die Verwandlung und Auflöſung der Gleichungen iſt in ſeinen Beyträgen zur Mathematik, im 2ten Theil enthalten.

La Grange hat durch Hülfe einer feinen Theorie die numeriſche Auflöſung der Gleichungen ſehr erleichtert. In den beiden Abhandlungen über dieſen Gegenſtand, Mem. de Berlin 1767 und 1768 wird gezeigt, wie man

die den Wurzeln nächſten ganzen Zahlen finden, die unmöglichen Wurzeln entdecken, und die Wurzeln näherungsweiſe durch Kettenbrüche, deren Theorie hier zugleich erweitert wird, angeben könne. Dieſe beiden Abhandlungen ſind mit ſehr wichtigen Zuſätzen neu herausgegeben, unter dem Titel, de la réſolution des équations numériques de tous les degrés, par J. L. Grange, à Paris An VI. 266 p. in 4. welches Werk die Materie erſchöpfen möchte. Auch die literalen Gleichungen durch Reihenausdrücke für die Wurzeln aufzulöſen zeigt la Grange eine neue Methode in den Mem. de Berlin 1768. Sehr tiefſinnige Bemerkungen über die Natur der Gleichungen ſind enthalten in ſeinen reflexions ſur la reſolution algébrique des équations, Nouv. Mem. de Berlin 1770. 1771.

Die Form der unmöglichen Wurzeln mit völliger Schärfe zu erweiſen, bemühten ſich d'Alembert, **Euler**, **la Grange**, **Foncenex**, **Gauß**. (S. Gleichung VI.)

Die Reduction mehrerer, für eben ſo viele unbekannte Größen gegebener, Gleichungen auf eine Gleichung für eine dieſer Größen allein, oder die Lehre von der Elimination, iſt in den neuern Zeiten mit Fleiß betrieben worden. Die Reduction für zwey Gleichungen lehrten **Euler**, **Cramer**, **la Grange**; und für mehr als zwey Gleichungen **Bezout** in einem großen Werke: Théorie générale des équations algebriques, à Paris 1769. 469 p. in 4. (ſ. Elimination).

Algebraiſch, was zur Algebra gehört oder damit in Verbindung ſteht.

Algebraiſche Auflöſung iſt, die durch Hülfe der Algebra gefunden, und nach den Regeln derſelben ausgeführt wird, im Gegenſatz gegen eine geometriſche.

Algebraiſche Formel iſt der ſymboliſche Ausdruck einer Größe durch diejenigen, aus welchen ſie zuſammengeſetzt wird. Z. B. die Formeln für die Wurzeln einer quadratiſchen oder cubiſchen Gleichung.

Algebraiſche Gleichung iſt entgegengeſetzt der analytiſchen. Jene enthält die Art, wie eine Größe aus an-

dern zuſammen geſetzt wird; dieſe iſt eine Verknüpfung zweyer verſchiedener Formen von gleicher Quantität. (S. Gleichung im Anfang.) Eine Gleichung heißt auch **algebraiſch** im Gegenſatz gegen die transſcendenten, welche transſcendente Größen, als Kreisbogen, Exponentialgrößen mit veränderlichen Exponenten, und die Integralgrößen zu unintegrirbaren Differentialen enthalten. Dieſe alle können nur durch unendliche Reihen dargeſtellt werden.

Algebraiſche Größe iſt eine ſolche, die aus einer endlichen Anzahl von Gliedern, es ſey in der Form ganzer Zahlen oder von Brüchen, zuſammengeſetzt wird, im Gegenſatz gegen transſcendente, die gleich vorher namhaft gemacht ſind.

Algebraiſche krumme Linie, oder Curve, iſt diejenige, deren Natur durch eine endliche algebraiſche Gleichung zwiſchen ihren Coordinaten dargeſtellt werden kann, im Gegenſatz gegen die transſcendenten, deren Gleichungen Kreisbogen und Exponentialgrößen enthalten, oder aus unendlich vielen Gliedern beſtehen. S. krumme Linien.

Algebraiſche Zahl oder Coſſiſche Zahl war in der alten numeriſchen Algebra eine Zahl, welche das Zeichen einer Potenz oder Wurzel vor ſich hat. Die Alten hatten für jede Potenz oder Wurzel eigene Zeichen.

Algebraiſche Zeichen ſind die Symbole, die in der Algebra und der allgemeinen Rechnung überhaupt gebraucht werden. Sie bezeichnen theils die Größen ſelbſt, theils ihre Formen, theils ihre Verbindung. S. Zeichen.

Algorithmus, auch **Algorismus**, bedeutete in den mittlern Zeiten, als die Rechnung mit den dekadiſchen Ziffern in Europa eingeführt ward, dieſe neue Rechnungsart. Das Wort iſt aus dem arabiſchen Artikel, *Al*, und dem Griechiſchen, *Arithmos*, Zahl, zuſammengeſetzt, wie Almageſtum u. a. Eine Arithmetik in Verſen, welche der Arithmetik des Joh. de ſacro Boſco beygefügt iſt, fängt ſich mit folgenden Zeilen an;

Haec Algoriſmus ars praeſens dicitur, in qua
Talibus Indorum fruimur bis quinque figuris, etc.

mit den beygezeichneten Ziffern. Von einem unbekannten Verfaſſer, vermuthlich aus dem 13ten Jahrhundert, iſt ein Werk: Opuſculum de praxi numerorum, quod Algoriſmum vocant, mit des Jac. Fabri Epitome ſeu brevis Introd. in Boëthii Arithmeticam von Jodocus Clichtovaus 1503 herausgegeben. Von Georg Purbach oder Peurbach im 15ten Jahrhundert iſt eine Arithmetik vorhanden, welche den Titel hat: Algorithmus de numeris integris, fractis, regulis communibus et de proportionibus, im 16ten Jahrhundert mehrmahls gedruckt.

Von den Neuern wird Algorithmus bisweilen für jede Art der Rechnung gebraucht, als Algorithmus infiniteſimalis, exponentialis, ſinuum, etc. In der Encycl. méthod. heißt es pleonaſtiſch: Algorithme du calcul intégral, du calcul exponentiel, du calcul des ſinus.

Alhazens Aufgabe. S. zweyte Abtheilung dieſes Werks.

Aliquantus wird von einem Theile einer Zahl oder einer Größe gebraucht, wenn der Theil ſich zu dem Ganzen nicht verhält, wie die Einheit zu einer ganzen Zahl. So iſt 5 eine pars aliquanta von 16.

Aliquotus wird von dem Theile eines Ganzen gebraucht, wenn er ſich zu dieſem verhält, wie die Einheit zu einer ganzen Zahl. So iſt 5 eine pars aliquota von 20.

Aliza regula iſt der Titel, welchen Cardan einem Buche giebt, worin er ſchwerere Fragen aus der Arithmetik und Algebra vorträgt, insbeſondere die cubiſchen Gleichungen und den ſchwierigen Fall bey ſeiner Formel für dieſelben. Die Abſtammung des Wortes iſt nicht bekannt. S. Käſtners Geſchichte der Mathematik. Th. I. S. 162.

Allgemein iſt, was nicht auf eine beſtimmte Größe oder beſtimmte Formen der Größen eingeſchränkt wird. In der Geometrie wird den Größen

nie eine beſtimmte Quantität gegeben, ſondern die gezeichnete Figur dient als Repräſentantium für alle mögliche, bey welchen dieſelben Bedingungen der Conſtruction ſich finden. Die angewandte Geometrie giebt den geometriſchen Größen eine beſtimmte Quantität. In der Wiſſenſchaft ſelbſt ſind die Sätze nur ihrer Ausdehnung nach verſchieden. Der pythagoräiſche Lehrſatz z. B. iſt ein beſonderer Satz. Allgemeiner iſt der Satz: wenn über den Seiten eines rechtwinklichten Dreyecks ähnliche Figuren verzeichnet werden, ſo iſt die Figur über der Hypotenuſe ſo groß, als die beyden über den Katheten beſchriebenen zuſammen genommen. Ein allgemeiner geometriſcher Satz iſt, daß alle ähnliche Körper ſich verhalten, wie die Würfel der daran oder in denſelben auf einerley Art gezogenen Linien. Kreis, Ellipſe, Parabel, Hyperbel, ſind Linien von derſelben Ordnung, und haben gewiſſe allgemeine Eigenſchaften neben den beſondern, die jeder dieſer Linien allein zukommen.

In der Arithmetik pflegt man Sätze und Auflöſungen an beſtimmten Zahlgrößen zu erweiſen, doch ſo, daß daraus die Allgemeinheit derſelben erhellt. Für Anfänger legt man eine Aufgabe in beſtimmten Zahlen vor, um ſie für die Auflöſung in unbeſtimmten Zahlen vorzubereiten. Wenn man die Potenzen eines Binomium, $a + b$, nach der Reihe entwickelt, ſo erhält man Sätze, die der Quantität nach allgemeine, aber der Form nach beſondere oder vielmehr individuelle ſind.

Wird der Exponens unbeſtimmt gelaſſen, ſo erhält man ein **allgemeines Theorem**, entweder mit Einſchränkung auf ganze Werthe der Exponenten, wie es die ältern Analyſten vortrugen, oder unbedingt allgemein, wie es durch Newton gefunden iſt. Das **allgemeine Glied** einer Reihe iſt der Ausdruck irgend eines Gliedes derſelben durch gewiſſe gegebene Größen und die Stelle deſſelben. Eine **allgemeine Gleichung** für die Kegelſchnitte iſt eine ſolche, die jeden derſelben, bey jeder Lage der Abſciſſenlinie, und für jeden Ordinatenwinkel darſtellen kann. In dieſen, ſo wie in den allgemeinen Gleichungen für Linien höherer Ordnun-

gen, entſteht die Allgemeinheit daher, daß alle mögliche Beſtimmungen für die krummen Linien darin aufgenommen werden. In andern Fällen entſteht die Allgemeinheit daher, daß die beſondern Beſtimmungen weggelaſſen werden. Die allgemeinen Sätze für die Quadratur, Cubatur und Rectification der krummen Linie, die Beſtimmung des Schwerpunctes, des Schwingungspunctes, und manche andere enthalten gar keine gegebene Größen. Das Theorem von la Grange, wenn y irgend eine Function von x iſt, jede Function von x durch y auszudrucken, iſt eines der allgemeinſten in der Mathematik.

Die Mathematik ſucht allenthalben Allgemeinheit in den Sätzen und Aufgaben, in den Beweiſen und Auflöſungen. Die beſondern Sätze und Aufgaben ſind deswegen aber nicht unwichtig; denn ſie enthalten oft ſehr ſchöne Beziehungen der Größen gegen einander.

Im Lateiniſchen hat man zwey Worte für das deutſche Wort, allgemein, nämlich generalis und univerſalis. Das erſte ſcheint von Sätzen gebraucht zu werden; das zweyte von dem, was allgemein anwendbar iſt. Man ſagt demonſtratio univerſalis, problema univerſale, conſtructor aequationum univerſalis; in der angewandten Mathematik, menſura univerſalis, horologium univerſale. Newtons Werk über die Algebra und ihre Verknüpfung mit der Geometrie führt den Titel, Arithmetica univerſalis. Nach einigen Schriftſtellern giebt es auch eine Matheſis univerſalis, welche aber nur ein kleiner Theil der mit mehrerm Rechte ſo zu nennenden Analyſis iſt.

Alligations=Regel oder Allegationsregel (Règle d' alliage) iſt eine Rechnungsregel, welche lehrt, wie viel von jeder unter zweyer Sachen, die mit einander vermiſcht oder zuſammen gethan werden ſollen, zu nehmen iſt, damit die Miſchung oder das Ganze einen beſtimmten Werth erhalte. Sie iſt folgende:

Man ſchreibe den gegebenen höhern und niedrigern Werth unter einander, und den beſtimmten Mittelwerth zur Seite linker Hand, dann ſubtrahire man den Mittel-

werth von dem höhern, und ſetze den Unterſchied neben den niedrigern Werth rechts; den Unterſchied des Mittelwerthes von dem niedrigern ſetze man neben den höhern; ſo zeigen dieſe Unterſchiede an, wie viel von jeder der beiden Sorten im Verhältniſſe gegen die andere zu nehmen iſt.

Z. B. Es verlangte jemand 13löthiges Silber, habe aber kein anderes als 10= und 15löthiges, wie viel muß er von jedem nehmen, daß die Miſchung 13löthig werde. Der Werth der Silbergattungen wird durch die Anzahl der Lothe fein Silber in einer Mark, oder durch das Löthige angezeigt. Man mache nun den Anſatz, wie folget:

	15		3
13			
	10		2

Von dem beſſern Silber ſind 3 Theile gegen 2 Theile von dem ſchlechtern zu nehmen. Theilt man alſo das ganze Gewicht des zu verfertigenden Werks in 5 Theile, ſo kommen 3 dieſer Theile an feinem Silber, und 2 an ſchlechtem zu demſelben.

Den Beweis dieſer Regel giebt die Auflöſung der 5ten Aufgabe in dem Artikel, Gleichung. I.

Man kann den Beweis an dem gegebenen Beyſpiele auch folgender Geſtalt führen. Der Goldſchmied büßet auf jede Mark des feinern Silbers 2 Loth fein ein, wenn er es für 13löthiges rechnet, gewinnt hingegen auf jede Mark des 10löthigen 3 Loth fein, wenn er es als 13löthiges verkauft. Damit weder er noch der Käufer Schaden leiden, muß die Menge von der einen und der andern Art Silber ſich umgekehrt verhalten wie der Gewinn und Verluſt an demſelben.

Die Probe der Rechnung iſt, daß man aus den berechneten Mengen und ihren Werthen den Werth der Miſchung berechne, und daraus den Werth der Einheit für die Menge der Miſchung, welcher der beſtimmte ſeyn muß.

Z. B. Man habe in dem Beyſpiele 20 Mark Silber zu der Miſchung beſtimmt, ſo ſind dazu zu nehmen 12 Mark des beſſern und 8 Mark des ſchlechtern Silbers.

Jene enthalten 12. 15 Loth fein Silber oder 180 Loth; dieſe enthalten 80 Loth fein Silber, zuſammen 260 Loth fein Silber in 20 Mark, alſo 13 Loth in 1 Mark, wie es ſeyn ſoll.

Die Allegations-Regel könnte ihren Namen von dem Falle haben, bey welchem ſie am meiſten gebraucht wird, dem Legiren der edlen Metalle mit einander oder mit unedlen. Von Clausberg nennt ſie ſo. Es ſcheint aber Alligationsregel gewöhnlicher zu ſeyn. Stifel, nennt die beiden gegebenen Zahlen numeros alligandos, und die mittlere Zahl, numerum, ad quem fit alligatio. So bedeutet Alligation das Verknüpfen zweyer Zahlen mit einer dritten.

Zweytes Exempel. Es hat jemand 457 Mark 4 Loth Silber, welche die Mark zu 11 Thlr. gerechnet werden. Dieſes will er mit Kupfer beſchicken, von welchem $\frac{1}{2}$ Pfund oder 1 Mark 4 Ggr. oder $\frac{1}{6}$ Thlr. koſtet, ſo daß die Mark auf 10 Thlr. komme; wie viel iſt an Kupfer zuzuſetzen? Nach der obigen Art iſt der Anſatz:

	11	$9\frac{5}{6}$	59
10			
	$\frac{1}{6}$	1	6

das heißt: auf 59 Theile Silber ſind zu nehmen 6 Theile Kupfer an Gewicht. Demnach ſind auf $457\frac{1}{4}$ Mark Silber zu nehmen $46\frac{1}{2}$ Mark Kupfer.

Wenn mehr als zweyerley Materien zu vermiſchen ſind, ſo iſt die Aufgabe unbeſtimmt, und man hat die Freyheit, noch irgend eine Beſtimmung zuzufügen. Die Vorſchriften der Rechenmeiſter ſind nicht leicht zu faſſen. Ein wenig Buchſtabenrechnung ſtellt das Verfahren ganz deutlich dar.

Die Materien ſeyn dreyerley Silber. Das erſte iſt m löthig, das zweyte n löthig, das dritte p löthig; die Miſchung ſey r löthig. Die ganze Miſchung habe das Gewicht a Mark. Von den drey Arten Silber ſeyn zu nehmen nach der obigen Ordnung x, y, z Mark. Es iſt nun

$$\text{I. } mx + ny + pz = ra$$

$$\text{II. } x + y \div z = a$$

Man nehme an, daß von dem zweyten und dritten Silber gleich viel genommen werden ſolle, oder daß $y = z$ ſey, ſo iſt

$$\text{I. } mx + (n + p)y = ra$$

$$\text{II. } x + 2y = a$$

Multiplicirt man die zweyte Gleichung mit r, ſo iſt

$$\text{II. } rx + 2ry = ra$$

alſo

$$\text{III. } mx + (n + p)y = rx + 2ry$$

oder

$$\text{III. } (m - r)x = (2r - n - p)\, y.$$

und

$$x : y = 2r - n - p : m - r$$

oder

$$x : 2y = 2r - n - p : 2m - 2r$$

Dieſe Proportion zeigt, wie das Gewicht des erſten Silbers ſich zu dem Gewichte der beiden andern Arten Silber zuſammen genommen verhält. Aus dieſer Proportion folgt (ſ. Verhältniß.)

$$x + 2y : x = 2m - n - p : 2r - n - p$$

oder

$$a : x = 2m - n - p : 2r - n - p$$

Exempel. Für das Silber A ſey $m = 15$; für B ſey $n = 11$; für C ſey $p = 7\frac{1}{2}$; die Miſchung ſoll 13löthig ſeyn, ſo daß $r = 13$. Hier iſt $2m - n - p = 11\frac{1}{2}$; $2r - n - p = 7\frac{1}{2}$, folglich $a : x = 11\frac{1}{2} : 7\frac{1}{2} = 23 : 15$. Von dem Silber B und dem C ſind zu nehmen von jedem 4 Theile.

Oder man nehme eines der Gewichte wie z nach Belieben an, z. B. ſo viel als davon vorhanden iſt. Die beiden Gleichungen für x und y ſind nun

$$\text{I. } mx + ny = ra - pz$$

$$\text{II. } x + y = a - z$$

Die zweyte mit n multiplicirt iſt

$$\text{II. } nx + ny = na - nz.$$

Dieſe von I. abgezogen, wenn n kleiner als m iſt, giebt

$$\text{III. } (m - n)\, x = (r - n)\, a + (n - p)\, z$$

alſo $x = \frac{(r - n)\, a + (n - p)\, z}{m - n}$.

Eben ſo iſt $y = \frac{(m - r)\, a - (m - p)\, z}{m - n}$.

Wenn r kleiner als n iſt, ſo iſt das Stück des Zählers, $(r - n)\, a$ ſubtractiv. Eben ſo iſt $(n - p)\, z$ und $(m - r)\, a$ ſubtractiv, jenes, wenn n kleiner als p, dieſes, wenn m kleiner als r iſt. Hingegen iſt $(m - p)\, z$ additiv, wenn m kleiner als p iſt. Alle Fälle werden durch den Gebrauch entgegengeſetzter Größen aus dem bey der Rechnung zum Grunde gelegten leicht hergeleitet.

Exempel. Es ſey $m = 14$; $n = 11$; $p = 9$; $r = 12$. Das Gewicht der Miſchung $a = 50$ Mark. Von dem dritten Silber wolle man nehmen, 16 Mark.

Es iſt $x = \frac{1.10 + 2.16}{3} = \frac{82}{3} = 27\frac{1}{3}$;

$y = \frac{2.50 - 5.16.}{3} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$. Beide Gewichte geben mit $z = 16$ das Gewicht 50.

Man ſetze, daß $m = 11$; $n = 9$; $p = 14$; und wie vorher $r = 12$; $a = 50$; $z = 16$ ſey, ſo daß nun die Menge des beſten Silbers beſtimmt iſt. Nun iſt

$$x = \frac{3.50 - 5.16}{2} = 35; \text{ und}$$

$$y = \frac{-1.50 + 3.16}{2} = -1.$$

Da hier y negativ iſt, ſo paßt die Annahme der Größen nicht auf eine Miſchung, ſondern auf einen Tauſch. Wer 35 Mark 11löthiges Silber und 16 Mark 14löthiges erhält, und dagegen eine Mark 9löthiges zurückgiebt, hat nun + 385 + 224 − 9 Loth fein Silber = 600 Loth

fein, und + 35 + 16 — 1 Mark legirtes Silber = 50 Mark. Die Menge des feinen Silbers 600 Loth dividirt durch die Zahl der Marke giebt 12. — Fände ſich x oder y größer, als die Menge des von der erſten oder zweyten Gattung vorhandenen, ſo müßte man die Annahmen ändern, wie es auch geſchehen muß, wenn kein Tauſch geſchehen, ſondern eine wirkliche Miſchung vorgenommen werden ſoll.

Auf ähnliche Art verfährt man, wenn vier oder mehr Materien zu vermiſchen gegeben ſind, ſo daß ein Maaß (Pfund, Mark u. dgl.) der Miſchung einen beſtimmten Werth erhalte. Bey vier Materien kann man zwey Beſtimmungen nach Gutdünken machen, bey fünf drey u. ſ. f.

Von Clausberg demonſtrative Rechenkunſt Th. IV. §. 1319 — 1354.

Käſtners Fortſetzung der Rechenkunſt, S. 396.

Almucabala iſt eine alte Benennung der Algebra, ſo fern ſie die Relation der Größen durch Gleichungen ausdruckt. Lucas Paciolus nennt den Theil ſeines Werks, der von der Algebra handelt, l' Arte maggiore, ditta dal volgo la Regola della Cosa, over Alghebra e Almucabala, und erklärt den letztern Ausdruck durch Oppoſitio. S. Algebra.

Alterna ratio (verwechſeltes Verhältniß) iſt, wenn in einer Proportion die mittlern Glieder verwechſelt werden, in dem Falle, daß in derſelben alle Glieder gleichartig ſind.

Alterni anguli (Wechſelwinkel), ſ. Parallelen.

Ambe, eine Verbindung von zwey Nummern im Lotto. In der Combinationslehre heißt eine Verbindung von zwey Größen eine Binion.

Ambigena hyperbola iſt der Name, welchen Newton dem hyperbelförmigen Theile einer Linie von der dritten Ordnung giebt, wenn der eine Schenkel innerhalb des Aſymptotenwinkels liegt, der andere aber außerhalb dieſes Winkels, ſo daß dieſer ſeine Aſymptote irgendwo ſchneidet, und von da an außerhalb des Aſymptotenwin-

kels ſich an derſelben hin erſteckt. Newt. enumeratio linearum tertii ordinis ſ. Linien der dritten Ordnung.

Amblygonium triangulum, ein ſtumpfwinklichtes Dreyeck.

Amicabiles numeri, ſ. Befreundete Zahlen.

Amplitudo arcus, **Weite eines Bogens**, der durchgehends nach einer Seite hin hohl iſt, iſt der Winkel, welchen die Normalen an den Endpuncten mit einander machen. Dieſer Winkel iſt gleich dem äußern Winkel der Berührungslinien an den Endpuncten des Bogens. Die **Weite eines paraboliſchen Bogens** iſt die auf die Axe der Parabel ſenkrechte Sehne. In dieſer Bedeutung kommt der Ausdruck beſonders vor, wenn die Parabel als die Bahn einer Bombe oder Kugel betrachtet wird. Die Weite iſt hier die horizontale Linie von den Wurfspuncte an bis an den Punct, wo die Bombe den Horizont beym Niederfallen trifft. Sie heißt die **Wurfsweite** oder **Schußweite**, auch für die Linie, die in der Luft, als einem widerſtehenden Mittel, beſchrieben wird (ſ. Parabel). In der Aſtronomie kommt der Ausdruck: amplitudo, auch vor.

Analogie (Analogia) iſt gleichbedeutend mit Proportion. Es iſt das griechiſche Wort, ἀναλογια, wodurch Euklides die Gleichheit zweyer Verhältniſſe ausdruckt, ſ. Proportion.

Analyſis, als wiſſenſchaftliches Syſtem, iſt die allgemeine Darſtellung und Entwickelung der Zuſammenſetzungsarten der Größen durch Rechnung. Sie behandelt alle Größen wie Zahlen, aber als unbeſtimmte in Abſicht auf die Einheit und die Menge der Einheiten. Dadurch unterſcheidet ſie ſich von der Geometrie, welche die ausgedehnten Größen, ſo wie die Lagen der Linien und Ebenen, im Ganzen mit einander vergleicht, ohne ſie als Vielheit von irgend einer Einheit und Theilen der Einheit zu betrachten, ſelbſt bey proportionalen Größen dieſe Vorſtellung nicht erfordert. Da aber die ausgedehnten Größen

und die Winkel ſich als Zahlgrößen anſehen laſſen, ſo kann die Analyſis auch zur Darſtellung und Entwickelung geometriſcher Verbindungen von Größen angewandt werden, nur daß dieſe, wo es auf die Lage der Linien und Ebenen ankommt, oft umſtändlicher und ſchwieriger iſt, als die geometriſche Zuſammenſetzung, die durch ein der Geometrie eigenthümliches Verfahren geſchieht, ſ. die Artikel: Anwendung der Algebra auf die Geometrie; Krumme Linien.

Da die analytiſche Behandlung der Verbindungen der Größen allgemeine Lehrſätze und Auflöſungen liefert, ſo iſt ihr eine allgemeine Bezeichnungsart der Größen und ihrer Formen (Arten der Zuſammenſetzung) nothwendig. Dieſe wird in der **Buchſtabenrechnung** gelehrt, welche zugleich die leichteſten und gemeinſten Rechnungsarten oder Umwandlungen der Formen enthält, (ſ. Buchſtabenrechnung).

Die Verbindungen der Größen mit einander werden durch ſymboliſche Formeln, durch Gleichungen, ausgedruckt, (ſ. **Gleichung.**) Die Eigenſchaften dieſer Formeln, die Zuſammenſetzung mehrerer Gleichungen und die Auflöſung derſelben (die Entwickelung des Unbekannten aus dem Bekannten) ſind der Gegenſtand der **Algebra.** Dieſe iſt der erſte Theil der Analyſis. Zuweilen wird dadurch auch die ganze allgemeine Rechnung verſtanden, ſo daß Algebra und Analyſis als gleichbedeutend genommen werden. Es iſt aber beſſer, die Algebra ſo einzuſchränken, wie hier geſchehen.

Die **Analyſis im engern Verſtande,** oder die eigentliche Analyſis, und zwar ſofern ſie ſich mit endlichen Größen beſchäftigt, iſt die Wiſſenſchaft von den Formen der Größen, und lehrt theils die Umwandlung einer Form in eine andere, theils die Darſtellung der Glieder einer ſtetigen Fortſchreitung von Größen durch die zugeordneten Glieder einer andern Reihe nach irgend einem Geſetze. Man nennt ſie zuweilen auch die **Theorie der Functionen,** weil Function der Ausdruck einer Größe durch andere iſt. Die Algebra und Analyſis betrachten die Größen auf verſchiedene

Art. Jene unterſcheidet ſie in bekannte und unbekannte, dieſe in unveränderliche oder beſtimmte, und in veränderliche oder unbeſtimmte. Beide gebrauchen zur Darſtellung oder Zuſammenſetzung der Größen Gleichungen, die ſich aber weſentlich unterſcheiden. Z. B. in der algebraiſchen Gleichung $x^3 - ax^2 + bx - c = o$ wird die Relation einer oder dreyer Größen zu den gegebenen a, b, c, auf eine noch nicht entwickelte Art ausgedruckt. In der analytiſchen Gleichung $(a + x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$ werden zweyerley Formen mit einerley Beſtandtheilen aufgeſtellt, woraus dieſelbe Größe entſteht. Es iſt die Verwandlung eines Products in ein Aggregat. Die analytiſche Gleichung $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ etc. giebt das Geſetz der gemeinſchaftlichen Bildung aller durch y bezeichneten Größen durch die zugehörigen x mittelſt der unveränderlichen Größen A, B, C, D, etc. zu erkennen. Die algebraiſche Gleichung $o = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ etc. enthält die Relation zwiſchen den gegebenen Größen und denjenigen x, für welche $y = o$ iſt. Überhaupt iſt die Analyſis im engern Verſtande der wichtigere Theil, ſowohl wegen des Inhalts, da die Betrachtung der Formen eigentlich das Intereſſante in der Mathematik iſt, als wegen ihrer mannichfaltigen Anwendung. Die Algebra macht ſich durch ihre Dienſte bey der Erfindung des Unbekannten mehr nothwendig, als durch die Behandlung ihres Gegenſtandes angenehm.

Der nachſtehende Entwurf der Analyſis endlicher Größſen, mit Ausſchluß der Buchſtabenrechnung und der Algebra, wird dem Leſer den großen Umfang dieſes wichtigen Theils der reinen Mathematik zeigen, und ihm behülflich ſeyn, ſich die dahin gehörigen Unterſuchungen in einer guten Ordnung aus dieſem Wörterbuche bekannt zu machen.

I. Die Lehre von den **Functionen** oder Formen der Größen.

1. Verſchiedene Arten der Functionen.
2. Verwandlungen der Functionen,

a) Der Aggregate in Producte.

b) Gebrochner Functionen in Reihen.

c) Zerlegung eines Bruches in mehrere Brüche mit zweytheiligen einfachen Nennern, von der Form a + x, wenn ſich ſolche aus dem Nenner des vorgegebenen Bruches abſondern laſſen.

d) Verwandlung einer Function durch Subſtitution einer andern Größe für die darin befindliche.

e) Darſtellung einer gebrochenen Function durch einen Kettenbruch.

II. Anfang der Theorie der Reihen.

1. Verſchiedene Arten, wie Reihen entſtehen.
2. Wie die Coefficienten einer aus mehrerern Reihen zuſammengeſetzten Reihe beſtimmt werden.
3. Reihen vom häufigſten Gebrauche.
   a) arithmetiſche.
      α. gemeine.
      β. höhere.
   b) Geometriſche.
   c) Rücklaufende.

III. Lehre von den Combinationen.

1. Verſetzungen einer gegebenen Menge von Dingen oder Elementen, entweder durchgehends verſchiedenen, oder mit untermiſchten gleichen.
2. Aufzählung der Combinationen jeder Claſſe ohne oder mit Wiederholungen.
3. Aufſtellung der Combinationen mit beſtimmten Namen der Zahlenſtellen ihrer Elemente.
4. Andere Anordnungen der Combinationen.
5. Relationen zwiſchen den Combinationen und den Summen der Potenzen von den combinirten Größen.

IV. Die combinatoriſche Analyſis im Allgemeinen.

1. Ihr Zweck.
2. Ihre Methode.
3. Ihre Charakteriſtik.

V. Producte von gleichen zweytheiligen, vieltheiligen und unendlichen Factoren; wie auch Zerlegung einer

Function in gleiche Factoren. — **Der binomiſche und polynomiſche Lehrſatz.**
Eigenſchaften der Binomial-Coefficienten.

VI. Producte aus ungleichen binomiſchen Factoren. (Cf. Euleri Introd. in Anal. Infin. P. I. cap. 15. 16.)
1. Summirung der Potenzen reciproker Zahlen und anderer Reihen.
2. Zerfällung der Zahlen in ihre aliquanten ganzen Theile (partitio numerorum).

VII. Producte aus binomiſchen Factoren, die in arithmetiſcher Progreſſion genommen werden, eine Art der von Euler ſogenannten Functionum inexplicabilium. Inſtit. Calc. diff. P. II. cap. 16. Kramps **numeriſche Facultäten.** (Analyſe des refractions, Chap. 3.).

VIII. **Logarithmiſche Functionen.**
1. Reihen, den Logarithmen durch die zugehörige Zahl oder eine Function derſelben, und die Zahl durch ihren Logarithmen darzuſtellen.
2. Methode zur leichten Berechnung der Logarithmen. (Logarithmotechnie).
3. Logarithmiſche oder Exponentialgleichungen, der Hyperbel angehörig, und Gleichungen zwiſchen den hyperboliſchen Sinus, Coſinus und Querſinus, deren zugehörige Sectoren ein gegebenes Verhältniß haben. Entlehnt aus der Integralrechnung, wegen des Zuſammenhanges mit der Theorie der Logarithmen, und ihrer Verwandtſchaft mit den gleichartigen Formeln für die zu Kreisbogen gehörigen Linien.

Anm. Die Deduction der logarithmiſchen Functionen durch Hülfe der Analyſis des Unendlichen wird darum nicht zurückgeſetzt, wenn ſie hier der Analyſis der Endlichen zugeeignet werden. Die andere Methode hat auch ihre Vorzüge. Man muß eine Theorie von mehr als einer Seite anſehen, und alle Zugänge zu ihr kennen. Eben dieſes gilt auch von den circularen Functionen.

IX. Circulare Functionen.

1. Formeln für die Sinus und Tangenten zuſammengeſetzter Winkel aus den Sinus und Tangenten der Theile dieſer Winkel. Die Sammlung derſelben heiße Goniometrie.
2. Reihen für die Winkel oder Bogen und ihre zugehörigen Linien, und für dieſe durch jene, was man Cyklometrie nennen mag.
3. Cyklotechnie, d. i. die Methode alle am Kreiſe vorkommende Größen leicht und mit der überflüſſigſten Genauigkeit zu berechnen.
4. Vergleichungen der circularen und hyperboliſchen oder logarithmiſchen Functionen.

Anm. Der Kreis gehört freylich urſprünglich der Geometrie zu, allein durch die analytiſche Behandlung wird er ein Gemeingut der Geometrie und Analyſis. Die zum Kreiſe gehörigen Formeln und Functionen erfordern, auſſer bey der erſten Gründung, gar keine weitere Hülfe der Geometrie, und werden ganz durch analytiſche Rechnung entwickelt. Man könnte, wenn man von der Differentialgleichung zwiſchen Sinus und Winkel, als bloße Größen betrachtet, ausgienge, die Geometrie bey den circularen Functionen ganz entbehren. Dieſe werden oft gebraucht, wo gar nicht von Linien und Winkeln die Rede iſt, als allgemeine Größen.

X. Anwendung der circularen Functionen auf die Zerlegung einer Function in dreytheilige mögliche Factoren, wenn ſie in zweytheilige einfache und mögliche nicht zerlegt werden kann.

Coteſiſcher Lehrſatz.

XI. Reihen, zur Fortſetzung des zweyten Abſchnitts.

1. Verwandlung der Reihen.
2. Allgemeines Glied einer Reihe, oder das Geſetz derſelben.
3. Summirung der Glieder einer Reihe. Bernoulliſche Zahlen.
4. Umkehrung einer Reihe.

5. Interpolation der Glieder einer Reihe.

XII. **Gleichungen zwiſchen** zwey oder mehreren **veränderlichen Größen.**

1. Eintheilung in algebraiſche und transſcendente.
2. Eintheilung der algebraiſchen Gleichungen in Ordnungen und Claſſen.
3. Entwickelung des Werthes einer von zwey veränderlichen Größen durch eine Reihe, die nach den Potenzen der andern geordnet iſt.
   Newtons Parallelogramm.

XIII. **Analyſis der krummen Linien**, in welcher alle Sätze aus den Eigenſchaften der Gleichungen mit Zuziehung der analytiſchen Trigonometrie und der Formeln für circulare Functionen hergeleitet werden. Sie iſt zur Verſinnlichung der allgemeinen Theorie in dem vorhergehenden Abſchnitte nothwendig, und verſchafft dem Geiſte eine ſo wohl für die Anwendung nützliche, als auch ohne Rückſicht darauf angenehme Beſchäftigung. Die Behandlungsart ſetzt ſie mit der Analyſis in die engſte Verbindung.

XIV. **Endliche Differenzen-Rechnung.**
Die Vorbereitung zur Differentialrechnung, ſehr wichtig zur genauern Einſicht in die Beſchaffenheit der Functionen.

XV. **Verbindung** der Analyſis endlicher Größen **mit der Differentialrechnung.**

1. Durch den Taylorſchen Lehrſatz, und einige Anwendungen in der Lehre von den Reihen.
2. Durch den allgemeinen Satz von la Grange, für die Umkehrung und Verwandlung der Functionen, (ſ. la Grange's Satz).
3. Durch die Beſtimmung der größten und kleinſten Werthe einer Function.
4. In der Geometrie der krummen Linien durch Beſtimmung der Berührungslinien, der Normalen und ausgezeichneter Puncte; durch die Formeln für verſchiedene Erzeugungsarten der Linien, als

Evolution, Rotation, Zurückwerfung der aus einem gegebenen Puncte oder auch unter ſich parallel an eine Linie gezogenen geraden Linien, Trajection, u. a.

XVI. **Unbeſtimmte** oder diophanteiſche **Analytik**, welche man auch als das zweyte Hauptſtück der Algebra anſehen mag.

Der zweyte Haupttheil der Analyſis, welcher durch die große Allgemeinheit und Fruchtbarkeit der Methoden die Quelle ſo großer Entdeckungen in der neuern Mathematik geworden iſt, iſt die **Analyſis der unendlichen Größen.** Sie beſchäftigt ſich mit den Gränzverhältniſſen der Unterſchiede der veränderlichen Größen in zwey oder mehrern zuſammen geordneten Reihen. Sie beſteht aus zwey Haupttheilen.

1. Die **Differentialrechnung** ſucht die Gränzverhältniſſe aus der gegebenen Relation der Größen, (ſ. Differentialrechnung).

2. Die **Integralrechnung** ſucht dieſe Relation aus den Gränzverhältniſſen. Sie iſt der bey weitem ſchwerere, aber auch höchſt wichtige Theil, der immerfort noch Erweiterungen erhält, (ſ. Integralrechnung).

Die Analyſis wird durch die Vorſchriften zur Auflöſung der Gleichungen, durch ihre Methoden zur Umwandlung der Formen und Entwickelung der Größen, durch ihre allgemeinen Sätze über die Relationen der Größen in ihren mannichfaltigen Verbindungen unter einander ſelbſt, und die gegenſeitige Abhängigkeit derſelben von der Relation der Unterſchiede oder Veränderungen, ein vortreffliches Hülfsmittel zur Auflöſungs- und Erfindungskunſt. Daher hat die neuere Mathematik, ſowohl die reine als die angewandte, in einem Zeitraume von weniger als zweyhundert Jahren, beſonders in dem letzten Jahrhundert, ſo große und ſchnelle Fortſchritte gemacht. Wo die ſchon bekannten Methoden nicht zureichten, gaben ſie doch Veranlaſſung zur Erfindung neuer Wege. Wer aber auch nur die leichtern Methoden zu benutzen zufrieden ſeyn muß, hat durch die Analyſis das Vergnügen manches ſelbſt zu

erfinden, ohne es andern, vielleicht auf eine für ihn nicht bequeme Art, ſchuldig zu ſeyn. Man braucht nicht ſehr viele Formeln und Methoden im Gedächtniſſe zu behalten, um ſich gewöhnlich ſelbſt helfen zu können, wohin man immer zu ſtreben hat, um die Analyſis ſich recht eigen zu machen. Die Kunſt, welche zur Erfindung aller analytiſchen Lehrſätze und Methoden angewandt iſt, verdient ſehr die Aufmerkſamkeit des Philoſophen, weil man dadurch von einer beſondern Art der Unterſuchungskraft belehrt wird, und des Mathematikers insbeſondere darum, weil er dadurch dieſe Kraft mit Überlegung anwenden lernt. Die Bezeichnungsart macht es allein möglich, weitläufige und verwickelte Verhältniſſe zu überſehen. Dadurch, daß die verſchiedenen Größen durch beſtimmte Symbole, und die Arten ihrer arithmetiſchen Verbindung durch gewiſſe Zeichen, nach unveränderlichen Vorſchriften angedeutet werden, kann man in wenigen Zeilen eine Unterſuchung faſſen, die in Worten vorgetragen ganze Blätter einnehmen, und in den meiſten Fällen ſich durchaus gar nicht vortragen laſſen würde.

Das wichtigſte Werk für die Analyſis endlicher Gröſſen iſt noch immer Eulers Introductio in Analyſin Infinitorum, 2 Tomi. Lauſannae 1748, und zu Leiden 1797, 2 Bde. Es enthält in dem erſten Theile zwar kein völliges Syſtem der eigentlichen Analyſis endlicher Größen, aber viele wichtige Capitel derſelben. Wegen der Verbindung, worin dieſe Unterſuchungen mit der Analyſis der unendlichen Größen ſtehen, und wegen des Gebrauchs, der hier ſelbſt von der Idee des Unendlichen gemacht wird, hat das Werk den Titel bekommen. Der zweyte Theil enthält eine ſehr lichtvolle analytiſche Theorie der krummen Linien, welche man aus keinem Werke beſſer als aus dieſem erlernen wird, deſſen Verfaſſer immer Tiefſinn mit Deutlichkeit zu vereinigen wußte. Ein zweytes hierher gehöriges Werk von Euler iſt ſeine Differentialrechnung (Inſtitutiones Calculi differentialis, Petrop. 1755), wovon der zweyte und größere Theil die Anwendung der Differentialrechnung auf die Analyſis endlicher Größen, beſon-

ders auf die Theorie der Reihen, enthält. Dieſes muß man vorzüglich zur Hand nehmen, wenn man tiefer in die Analyſis dringen will. Michelſen hat es ins Deutſche überſetzt. Die genaue Verbindung der Analyſis endlicher Größen mit der Rechnung des Unendlichen kennen zu lernen, dient ein neues ſehr ſcharfſinniges Werk, Théorie des fonctions analytiques par I. L. la Grange, à Paris an V. Es enthält ſchätzbare Anwendungen auf die Geometrie und reine Mathematik. Man muß dazu gute Fertigkeit für allgemeine und ſehr abſtracte Rechnungen mitbringen. Das neueſte Werk über die Analyſis endlicher Größen iſt: Du calcul des Dérivations par L. F. A. Arbogaſt, à Strasbourg, An. VIII. (1800). 404 pag. 4. Die wichtigſten und ſchwerſten Rechnungen werden darin nach einer neuen Methode ausgeführt, die mit der Combinations-Theorie in enger Verbindung ſteht, (ſ. Derivations Rechnung.)

Analyſis, als Methode bey mathematiſchen Unterſuchungen, iſt die Entwickelung des Zuſammenhanges der geſuchten Größen mit den gegebenen, oder der veränderlichen unter einander und mit den unveränderlichen Größen. Zur Auflöſung irgend einer Aufgabe iſt es nothwendig, den Zuſammenhang der dazu gehörigen Größen, auch derer, die nicht unmittelbar gegeben werden, zu erforſchen. Die Erfindung der Lehrſätze beruht eben darauf. Die mathematiſche Analyſis vollſtändig kennen zu lernen, muß man die von den Alten gebrauchte, und die bey den Neuern übliche unterſcheiden. Die **Analyſis der Alten** bezog ſich auf die Geometrie, und bediente ſich alſo bloß geometriſcher Hülfsmittel; die **Analyſis der Neuern** erſtreckt ſich auf alle meßbaren Gegenſtände, und gebraucht die allgemeine Arithmetik, indem ſie den Zuſammenhang der Größen in Gleichungen bringt.

Von der Analyſis der Alten giebt **Pappus** in ſeiner Sammlung geometriſcher Unterſuchungen, in der Vorrede zu dem 7ten Buche einen guten Unterricht. Dieſer Theil ſeines Werks enthält die Hülfsſätze und manche Bey-

ſpiele aus den analytiſchen Schriften der Alten, Lemmata de loco reſoluto, (λεμματα τȣ 'αναλυομενȣ τοπȣ). Er ſcheint unter aufgelöſeten Ort die Sammlung von Lehrſätzen, die zur Auflöſung dienlich ſind, zu verſtehen, unter Analyſis aber die Methode. Hier folgen ſeine Worte ſelbſt.

„Was man die Lehre (den Ort) von der Auflöſung nennt, iſt ein Vorrath von Sätzen, der denjenigen zum Gebrauch beſtimmt iſt, welche ſich mit den Anfangsgründen bekannt gemacht haben, und nun die Auflöſung der ihnen vorkommenden Aufgaben ſelbſt zu finden wünſchen. Zu dieſem Zweck allein iſt die Sammlung eingerichtet. Drey Männer haben dazu ihre Beyträge geliefert, Euklides, der Verfaſſer der Elemente, Apollonius von Pergä, und der ältere Ariſtäus. Das dabey gebrauchte Verfahren iſt theils analytiſch, theils ſynthetiſch. Die **Analyſis** iſt diejenige Methode, da man von dem Geſuchten, als zugeſtanden angenommen, durch die daraus gezogenen Folgerungen auf etwas Gegebenes kommt, welches zu der Syntheſis führt. Bey der Auflöſung nämlich betrachtet man das Geſuchte als gefunden, und forſcht, woraus es zunächſt folget; dann, woraus dieſes ſich ergebe, und ſo immer weiter, bis daß man auf dieſem Rückwege etwas trifft, das gegeben iſt, oder zum Grunde gelegt werden kann. Dieſes Verfahren heißt Analyſis, gleichſam eine umgekehrte Auflöſung. Bey der **Syntheſis** hingegen macht man mit demjenigen, was bey der Analyſis zuletzt erhalten ward, als etwas gegebenen, den Anfang, und läßt das, was dort folgte, nun vorangehen, in der natürlichen Ordnung nach einander, bis man zu der Darſtellung des Geſuchten gelangt. Dieſes nennt man die **Syntheſis**. Es iſt aber die **Analyſis** von gedoppelter Art, die theoretiſche, welche richtige Sätze ſucht, und die problematiſche, welche Aufgaben aufzulöſen bemüht iſt. Nach der **theoretiſchen Analyſis** ſieht man den Satz den man prüft, als wahr an, und zieht aus dieſer Vorausſetzung Folgerungen, bis daß man auf einen ausgemacht wahren oder falſchen Satz kommt. Iſt das

erſte, ſo iſt auch der Satz, von dem die Frage iſt, wahr, und der Beweis geht den umgekehrten Weg der Analyſis. Iſt der gefundene Schlußſatz falſch, ſo iſt auch der angenommene Satz irrig. Bey der **problematiſchen Gattung** wird man von dem Geſuchten als bekannt angenommen, durch das, was daraus eins nach dem andern richtig gefolgert wird auf etwas beſtimmtes geführt. Iſt dieſes etwas mögliches, was ſich darſtellen läßt (πορισον), was die Mathematiker ein **Datum** nennen, ſo iſt die vorgelegte Aufgabe aufzulöſen möglich, und der Beweis nimmt den Weg der Analyſis rückwärts. Kommt man aber auf etwas offenbar unmögliches, ſo iſt auch die Aufgabe unmöglich. **Diorismus** iſt die Beſtimmung, ob und wie, und auf wie mancherley Art einer Aufgabe Genüge geleiſtet werden mag.“

Hierauf macht Pappus die zur Analyſis gehörigen Schriften namhaft. Sie ſind: die Data, die Porismata, und die Schrift von den Örtern an einer Oberfläche, von Euklides, die Schriften des Apollonius de ſectione rationis, (eine von Newton ſehr geſchätzte Schrift) de ſectione ſpatii, de ſectione determinata, de tactionibus, de inclinationibus, de locis planis, und von den Kegelſchnitten; die Schrift des Ariſtaeus de locis ſolidis, und des Eratoſthenis de mediis proportionalibus. Aus dieſen Schriften hat Pappus viele Beyſpiele in dem 7ten Buche ſeiner Sammlung angeführt. Sie ſind alle, auſſer die Data des Euklides, die in einer arabiſchen Überſetzung erhaltene Schrift des Apollonius de ſectione rationis, und das Hauptwerk deſſelben von den Kegelſchnitten, verloren gegangen. In dem 17ten Jahrhundert, vor der Anwendung der Analyſis des Unendlichen, wurde die geometriſche Analyſis mit Fleiß bearbeitet, als von Vieta, Fermat, Viviani, Ghetaldi, Snellius, Huygens, Burrow, u. m. Man bemühte ſich die verlornen geometriſchen Schriften der Alten wieder herzuſtellen. Die Engländer lieben die geometriſche Analyſis ſehr, und ſind gegenwärtig die Meiſter in derſelben. Newton, der in ſeinen ſchweren Unterſuchungen über die höhere Mechanik die geometriſche Einkleidung und Syntheſis gebraucht, pflegte die Anwendung der algebraiſchen Rechnung

auf die Geometrie zu tadeln. In dem 18ten Jahrh. haben ſich die Engländer noch häufig mit den verlornen Schriften des Apollonius beſchäftigt. Halley gab die Bücher de ſectione rationis und ſectione ſpatii heraus, Oxford 1706; Robert Simſon, die loca plana, Glasgow 1749 (deutſch von Camerer in Leipzig 1796), Horsley, die Bücher de inclinationibus, Oxford 1770; Lawſon, die Bücher de tactionibus, Lond. 1771. und die de determinata ſectione Lond. 1772; Walis, die letztern gleichfalls, London 1772. Dieſelben ſind von Robert Simſon wieder hergeſtellt und mit zwey Büchern vermehrt, nach deſſen Tode auf Koſten des Grafen Stanhope, nebſt dem Eukli-diſchen Werke über die Porismata, und einigen andern von Simſon nachgelaſſenen Schriften, zu Glasgow 1776 herausgekommen. Burrow gab die Bücher de inclinationibus, Lond. 1779 heraus.

Die Erfindung der geometriſchen Analyſis wird von Diogenes Laertius und Proklus (Commentar über das erſte Buch des Euklides) dem Plato zugeſchrieben. Wir haben von dieſem berühmten Philoſophen keine mathematiſche Schrift, daher man ſein Verfahren nicht beſtimmt kennt. Einige merkwürdige Anwendungen der geometriſchen Analyſis finden ſich in dem zweyten Buche von der Kugel und dem Cylinder des Archimedes, beſonders bey der dritten Aufgabe oder 5ten Satze (S. 76 der ſchätzbaren Ausgabe dieſer Archimediſchen Schrift von Hauber, Tübingen 1798). Archimedes vergleicht die Größen mit einander, ohne Unterſchied, ob ſie gegeben oder unbekannt ſind, und kommt durch eine Verbindung von Sätzen, die auf den Eigenſchaften der Kugel und des Kegels beruhen, endlich auf eine Proportion, die in die algebraiſche Sprache überſetzt, unmittelbar eine Gleichung vom dritten Grade geben würde, von welcher die Auflöſung der Aufgabe abhängt. Man ſieht aber auch hier, daß die Analyſis der Alten in jedem Falle eigenthümliche Kunſtgriffe erforderte.

Die theoretiſche Analyſis, deren Pappus erwähnt, wird kaum anders brauchbar ſeyn, als bey der Prüfung eines

Satzes, den ein Schriftſteller aufſtellt oder anwendet, ohne ihn zu beweiſen. Denn man wird nicht leicht durch Vermuthung auf einen mathematiſchen Satz gerathen. Man pflegt ſich auch dieſer Beweisart in mathematiſchen Schriften nicht zu bedienen, kaum anders als bey der Umkehrung eines erwieſenen Satzes, da man zeigt, daß das Gegentheil des aufgeſtellten umgekehrten Satzes falſch iſt, (ſ. Beweis). Der Leſer würde nicht einſehen, welcher Weg zu dem aufgeſtellten Satze geführt habe, dagegen man bey einem directen Beweiſe bemerken kann, welche Sätze zu dem gegenwärtigen geleitet haben. Ein Beyſpiel einer theoretiſchen Analyſis findet man in Pappi Coll. math. L. VII. prop. 26, worauf aber in prop. 27. eine ſynthetiſche folgt.

Zu der Anwendung der alten Analyſis auf geometriſche Aufgaben laſſen ſich keine beſtimmten Vorſchriften geben; man kann hier keine ſo unveränderlichen Anweiſungen ertheilen, daß dadurch in allen Fällen das Geſuchte gefunden würde. Immer iſt eine gewiſſe Vorbereitung nöthig, die Aufſpürung und Einführung der Hülfsgrößen oder Mittelglieder, um die gegebenen Größen mit den geſuchten zu verbinden. Man muß aufmerkſam auf dasjenige ſeyn, was durch das unmittelbar Gegebene beſtimmt wird, um dadurch ſich den Weg zu dem Geſuchten zu bahnen. Hier bleibt es der Erfindungskraft eines jeden überlaſſen, wie er ſich zu helfen habe, da die Mittel zum Zwecke mancherley ſind, ſo wie die Beſchaffenheit der Aufgaben ſehr verſchieden iſt. Übung iſt hier hülfreicher als Regeln. Man muß, ehe man die Auflöſungen geometriſcher Aufgaben von andern lernt, ſeine Kräfte daran verſuchen. Die Sätze der Elementar-Geometrie muß man vollkommen gegenwärtig haben, beſonders die Eigenſchaften des Kreiſes, die häufig große Dienſte thun. Folgende Bemerkungen werden bey dieſem Geſchäfte von Nutzen ſeyn. Sie ſind von einem mit dem Verfahren der alten Geometern ſehr bekannten Manne, Newton in der Arithm. univ. pag. 87. edit. Lugd.

Man hat oft einige der gegebenen Linien zu verlängern, bis ſie andere ſchneiden, oder von einer beſtimmten Länge

wenden. Oder man ziehe von einem ausgezeichneten Puncte Parallelen oder Perpendikel, oder verbinde Puncte durch Linien. Wenn zwey nicht parallele Linien mit einer dritten gegebene Winkel machen, ſo verlängere man ſie bis zu ihrem Durchſchnitte, wodurch ein der Art nach gegebenes Dreyeck (ſpecie datum) erhalten wird, worin die Verhältniſſe der Seiten gegeben ſind. Wenn ein Winkel gegeben wird, oder einem andern gleich iſt, ſo bilde man mit demſelben ein Dreyeck, das der Art nach gegeben, oder einem andern ähnlich iſt, entweder durch Verlängerung einiger Linien, oder durch eine andere Legung der gegenüber ſtehenden Seite. Iſt das Dreyeck ſchiefwinklicht, ſo iſt es oft in zwey rechtwinklichte zu zerlegen. Vielſeitige Figuren ſind durch Diagonalen in Dreyecke zu zertheilen. Überhaupt hat man dahin zu ſehen, daß man die ganze Zeichnung in Dreyecke, gegebene, ähnliche oder rechtwinklichte zerlege.

Einige Beyſpiele werden zur Erläuterung nöthig ſeyn.

1. Aufg. Eine gegebene Linie AB Fig. 2. (Tab. I.) ſo einzutheilen, daß das unter der ganzen und einem der beiden Abſchnitte enthaltene Rechteck dem Quadrate des übrigen Abſchnittes gleich ſey.

Aufl. Es ſey P der geſuchte Punct. Über AB und BP beſchreibe man die Quadrate ABCD, PBNO, und verlängere OP bis M auf CD, ſo iſt das Rechteck AM = Quadr. PN, oder AP × PM = PBq, daher das Rechteck CO oder CN × NO = BCq, oder eine gegebene Größe. Es werde BC in E halbirt, ſo iſt (Eukl. II. 6) CN × NO + BEq = ENq, das iſt ABq + BEq = ENq. Man ziehe AE, ſo iſt AEq = ABq + BEq. Daraus iſt AE = EN, alſo BN der geſuchte Abſchnitt BP.

Hieraus wird man leicht die ſynthetiſche Aufloͤſung finden, die Euklides in ſeinen Elementen II. 11. giebt.

2. Aufg. In dem gegebenen Kreisabſchnitte APB (Fig. 3. Tab. I.) von den Endpuncten der Chorde AB

an einen Punct des Umfangs P zwey Linien AP, BP zu ziehen, deren Verhältniß einem gegebenen F:G gleich ſey.

Aufl. Es ſey P der geſuchte Punct. Der Winkel APB iſt gegeben, weil der Abſchnitt des Kreiſes gegeben iſt, worin alle Winkel am Umfange ſich gleich ſind. Man verlängere AP, und mache den W. ABC = APB, ſo erhält man die ähnlichen Dreyecke APB und ABC, in welchen iſt AP : BP = AB : BC. Alſo iſt das Verhältniß AB : BC gegeben, und dadurch die Linie BC, welche den Kreis in dem verlangten Puncte ſchneidet.

Hieraus ergiebt ſich die ſynthetiſche Auflöſung ganz leicht. Pappus giebt L. VII. prop. 155 eine andere Auflöſung, die nicht ſo leicht iſt. Er zieht durch P eine den Kreis berührende. Der Durchſchnittspunct derſelben mit der verlängerten AB iſt gegeben.

3. Aufg. Zwey Linien AB, AC, (Fig. 4. Tab. I.) ſind der Lage nach gegeben, nebſt einem Puncte D innerhalb des ſpitzen W. BAC; es ſoll ein Kreis beſchrieben werden, der durch D geht, und die beiden Linien berührt.

Aufl. Es ſey P der Mittelpunct des geſuchten Kreiſes, und PM, PN ſeyn ſenkrecht auf AB, AC, ſo ſind PM, PN Halbmeſſer des Kreiſes, M, N die Berührungspuncte der Linien AB, AC mit dem Kreiſe, und der Mittelpunct P liegt auf der Linie AE, welche den Winkel BAC halbirt. Man verbinde die Puncte A, D, und P, D durch AD, PD. In dem Dreyecke APM iſt das Verhältniß AP, PM gegeben, weil der W. PAM nebſt dem rechten Winkel darin gegeben ſind: daher auch in dem Dreyecke APD das Verhältniß AP : PD. Es iſt alſo nun die Lage der durch den gegebenen Punct D gehenden DP zu ſuchen. Man nehme auf AE irgend einen Punct F, ziehe FG parallel mit PM, oder ſenkrecht auf AB, und FH parallel mit DP, ſo iſt AP : PM = AF : FG; wie auch AP : PD = AF : FH, daher FG = FH.

Hieraus wird die Conſtruction der Aufgabe hergeleitet. Denn man ziehe, wie hier geſchehen iſt, FG

ſenkrecht auf AB, und lege von F an AD die Linie FH, welche FG gleich iſt, ſo iſt DP mit dieſer parallel, und der Durchſchnitt der mit FH parallelen DP und der gegebenen AE iſt der geſuchte Mittelpunkt des Kreiſes. Weil FH noch eine Lage, nach A hin, haben kann, ſo iſt auch noch ein DP, und ein Mittelpunct eines Kreiſes möglich, wodurch die Forderung erfüllt wird.

4. Aufg. Aus dem Winkelpuncte A eines Quadrats ABCD (Fig. 5. Tab. I.) eine Linie zu ziehen, auf welcher die Seite BC und die verlängerte DC ein gegebenes Stück MN abſchneiden.

Aufl. Man muß auf der verlängerten AB einen Punct ſuchen, deſſen Abſtand von A oder B durch die gegebenen Linien AB und MN gegeben ſey, und durch welchen zugleich einer der Puncte M oder N gegeben werde. Es ſey geſchehen, was verlangt wird, und N der Durchſchnittspunct mit der verlängerten DC. Man ziehe von N auf die verlängerte AB die lothrechte NP, und zugleich durch N auf AN die ſenkrechte NQ, welche die verlängerte AB in Q treffe. Da der W. PNQ = QAN, und PN = AB, ſo ſind die rechtwinklichten Dreyecke NPQ und ABM ſich gleich, und PQ = BM.

Nun iſt CNq + CMq = MNq, alſo eine gegebene Größe. Da CM ein Theil einer gegebenen Linie CB iſt, ſo addire man das Quadrat der letztern zu den gleichen Größen. Es iſt CBq = CMq + BMq + 2CM × MB, alſo iſt CNq + 2CMq + BMq + 2CM × MB = MNq + CBq, eine gegebene Größe, oder CNq + BMq + 2BC × CM = MNq + CBq = MNq + ABq. In den ähnlichen Dreyecken ABM, NCM iſt AB : BM = CN : CM, alſo iſt AB × CM (= BC × CM) = BM × CN. Daher iſt CNq + BMq + 2BM × CN = MNq + ABq, das iſt, (weil CN = BP, und BM = PQ iſt) BPq + PQq + 2BP × PQ = MNq + ABq, oder BQq = MNq + ABq. Solchergeſtalt iſt BQ eine gegebene Größe.

Hieraus folgt nun die Conſtruction. Man nehme auf AD das Stück AE gleich der gegebenen MN, ziehe BE, mache BQ = BE, beſchreibe über AQ als Durchmeſſer einen Halbkreis, welcher DN in N ſchneide, ziehe AMN, ſo iſt das Stück MN auf AN der gegebenen AE gleich.

Der Kreis ſchneidet die Linie DN noch in einem Puncte R. Zieht man durch A und R die Linie ARS bis an die verlängerte BC in S, ſo iſt RS = MN. Denn weil die Bogen QN und AR gleich ſind, ſo ſind auch die Bogen QR und AN gleich, und daher der W. RAQ = NQA, und ihre Complemente zum Rechten, DAR = BAM. Daher iſt DR = BM, und RC = CM. Ferner iſt der W. SRC = DRA = AMB = CMN; alſo iſt Δ SCR = NCM, und RS = MN.

Die Aufgabe, durch den Winkelpunct A eines Quadrats ABCD eine Linie zu legen, auf welcher von den Schenkeln des Winkels BCD ein Stück von gegebener Länge abgeſchnitten werde, wird auf dieſelbe Art wie die vorgetragene aufgelöſet. Die Aufgabe kann unmöglich ſeyn.

Pappus trägt den erſten Fall der Aufgabe, auf welchen hier die Analyſis gerichtet iſt, allein vor, L. VII. prop. 72. Seine Analyſis gründet ſich auf einen vorher bewieſenen Satz, daß $BQ^2 = BC^2 + MN^2$ iſt.

5. **Aufg.** Ein Kreis PMN und eine gerade Linie AB (Fig. 6. Tab. I.) ſind der Lage und Größe nach gegeben; es iſt auf dem Umfange des Kreiſes der Punct P zu finden, der ſo liegt, daß die Durchſchnittspuncte M, N der Linien AP, BP mit dem Kreiſe in einer mit AB parallelen Linie MN liegen.

Aufl. Es liege AB ganz auſſerhalb des Kreiſes, und es ſey P der geſuchte Punct. Da ein Winkel am Umfange, wie hier MPN iſt, dem Winkel der Berührungslinie mit der Chorde des Bogens, worauf jener Winkel ſteht, und zwar auf der entgegengeſetzten Seite, gleich iſt (Eucl. III. 32.) ſo ſey MQ die berührende in M. Dadurch iſt der W. NMQ = MPN. Wegen der

parallelen MN, AB iſt W. NMQ = AQM, alſo W. MPN = AQM. Demnach iſt das Dreyeck PAB ähnlich dem Dreyecke QAM, und es iſt AB : AP = AM : AQ. Man ziehe aus A die berührende AC an den Kreis, ſo iſt AP : AC = AC : AM (Eucl. III. 36.); alſo iſt, durch Zuſammenſetzung der Verhältniſſe (ex aequo, Eucl. V. 22.), AB : AC = AC : AQ. Da AC gegeben wird, ſo iſt nun AQ auch gegeben, und dadurch M, der Berührungspunct einer durch Q an den Kreis gezogenen Berührungslinie. Die mit AB parallele MN iſt dadurch auch gegeben.

Da durch Q noch eine berührende an den Kreis gezogen werden kann, ſo giebt es für die Linien AB, BP noch eine Lage, bey welcher der Punct P auf derſelben Seite der mit AB parallelen Chorde liegt, auf welcher AB ſich befindet.

Andere Aufloͤſung.

Man ziehe noch durch B die berührende BD an den Kreis, ſo iſt BP : BD = BD : BN. Aus dieſer Proportion folgt BP : BN = BPq : BDq, (durch die Zuſammenſetzung des Verhältniſſes BP : BN aus den beiden BP : BD und BD : BN, oder BP : BD und BP : BD). Eben ſo iſt AP : AM = APq : ACq. Da wegen der beiden Parallelen iſt AP : AM = BP : BN; ſo iſt APq : ACq = BPq : BDq, und daher AP : AC = BP : BD, oder verwechſelt, AP : BP = AC : BD. Folglich iſt über der gegebenen AB ein Dreyeck APB zu zeichnen, worin die Seiten AP, BP ein gegebenes Verhältniß haben, und deſſen Spitze in den Umfang des gegebenen Kreiſes falle. Für die erſte Bedingung iſt ein Kreis, deſſen Größe und Lage durch AB und das gegebene Verhältniß beſtimmt wird, der geometriſche Ort (ſ. Kreis und Ort, geometriſcher.). Die beiden Durchſchnitte dieſes Kreiſes mit dem gegebenen ſind jeder der verlangte Punct, wie P, an welchen die Linien AB, BP zu ziehen ſind.

6. Aufg. Ein Kreis PMN und eine gerade Linie (Fig. 7. Tab. I.) ſind der Lage und Größe nach gegeben, es iſt auf dem Kreiſe der Punct P zu finden, der ſo liegt, daß die Linie durch die Durchſchnittspuncte M, N der Linien AP, BP mit dem Kreiſe nach einem gegebenen Puncte C auf den verlängerten AB gehe.

Aufl. Es ſey geſchehen, was verlangt wird. Man ziehe MR parallel mit AB, und verlängere die Linie zwiſchen R und N bis nach Q auf AB. Es iſt der W. MPN = MRN (Eucl. III. 27.) und der W. MRN = RQB wegen der parallelen MR, AB; alſo iſt der W. MPN = NQB, und die beiden entgegengeſetzten Winkel APN, AQN des Vierecks APNQ ſind zwey Rechten gleich, wodurch auch die beiden Winkel A und PNQ zwey Rechten gleich ſind. Die Puncte A, P, N, Q liegen daher auf dem Umfange eines Kreiſes (Eucl. III. 22.) und daher iſt BA × BQ = BP × BN, indem beide Rechtecke oder Producte dem Quadrate der aus B an den Kreis durch A, Q, N, P gezogenen Berührungslinie gleich ſind, (Eucl. III. 36.) Nun ſey an den Kreis MPN von B aus die berührende BD gezogen, ſo iſt BP × BN = BDq; alſo iſt BA × BQ = BDq, und daher iſt, weil BD gegeben wird, auch BQ gegeben, oder der Punct Q. Folglich ſind von zwey gegebenen Puncten C und Q zwey Linien CN, QN an den Kreis gelegt, ſo daß MR, die Linie durch ihre beiden andern Durchſchnittspuncte mit dem Kreiſe, der Linie ABC parallel iſt. Wie dieſes bewerkſtelligt wird, iſt in der 5ten Aufgabe gewieſen. Demnach iſt der Punct N gegeben, und da B gegeben iſt, ſo iſt die Linie BP der Lage nach gegeben, alſo der Punct P in dem gegebenen Kreiſe, und dadurch auch die Lage von AP.

Die Syntheſis iſt dadurch folgende: Man ziehe von B an den gegebenen Kreis die berührende BD, und ſuche zu BA und BD die dritte Proportionallinie BQ. Aus den Puncten C und Q lege man die Linie CN, QN an den Kreis ſo, daß die Linie MR durch ihre beiden andern Durchſchnittspuncte parallel mit CQ ſey, ziehe BN, und

verlängere ſie bis an den Kreis in P. Zieht man nun AP, ſo geht dieſe durch M. Denn da die Rechtecke oder Producte $BP \times BN$ und $BA \times BQ$ dem Quadrate von BD gleich ſind, ſo ſind ſie einander gleich, und die Puncte P, N, Q, A, liegen auf dem Umfange eines Kreiſes. In dieſem iſt der Winkel der geraden Linie durch A und P mit PN gleich dem Nebenwinkel von AQN oder dem W. NQB. Es iſt aber auch in dem gegebenen Kreiſe der W. MPN = MRN, und wegen der parallelen MR, CQ, der Winkel MRN = RQB, oder NQB, alſo der W. MPN = NQB. Daher iſt der W. APN = MPN und die Linien AP, MP liegen in derſelben geraden Linie.

Die Aufgabe ſteht in der Sammlung von Pappus L. VII. prop. 117.

Dieſes mag hinreichend ſeyn, einen Begriff von der geometriſchen Analyſis zu geben, wenn gleich die Beyſpiele nur in einzelnen Aufgaben beſtehen konnten, worin der Geiſt der Alten nicht ſo ſichtbar ſeyn kann, als in einem Syſtem von Sätzen. Die arithmetiſche oder algebraiſche Analyſis ſucht ebenfalls die Verbindungen der Größen, ohne einen Unterſchied zwiſchen gegebenen und geſuchten zu machen. Sie ſtellt die Art der Verbindung durch eine Gleichung dar. Jede Gleichung iſt als eine Bedingung in Betreff der Verbindung einiger Größen anzuſehen. Giebt es mehrere Bedingungen, ſo wird man dadurch auf eben ſo viele unabhängige Gleichungen geleitet. Dieſe mit einander zu combiniren, daraus neue Gleichungen zu ſchaffen, beſonders zu dem Zwecke, eine der unbekannten Gröſſen allein in eine Gleichung mit den gegebenen Größen zu bringen, und eine Gleichung aufzulöſen, lehrt die Algebra durch Vorſchriften. Die Bedingungen zu erfinden und ſie rechnungsfähig zu machen, erfordert oft Erfindungskraft und Scharfſinn, wenn ſie nicht unmittelbar gegeben werden. Die Lehrſätze für die Verwandlungen der Formen und andere Lehrſätze der Analyſis, beſonders die allgemeinen Formeln der Differential- und Integralrechnung ſind ein reicher Vorrath von Hülfsmitteln,

Bayerische Staatsbibliothek München

um ſehr verwickelte Relationen zu entdecken und aus einander zu ſetzen. Die Analyſis der Alten hat keine allgemeinen Methoden zur Entdeckung von Lehrſätzen und Auflöſung der Aufgaben; ſie hat auch wenige und geringe Hülfsmittel: deſto ſinnreicher mußte ſie aber auch in der Anwendung derſelben ſeyn, und in jedem Falle faſt ein eigenes Verfahren gebrauchen. Darum iſt das Studium der alten Geometrie zur Übung des mathematiſchen Geiſtes ſehr wichtig. Die Gewandtheit, welche man ſich dadurch verſchaffen mag, iſt Gewinn genug, wenn auch viele Sätze von keinem Nutzen weder in der theoretiſchen noch angewandten Mathematik ſeyn werden.

Einer der größten Analyſten unſerer Zeit ſagt von der geometriſchen Methode der Alten, die man ſehr uneigentlich Syntheſis nenne, daß ſie in einigen Fällen der algebraiſchen Analyſis vorzuziehen ſeyn möchte, ſowohl wegen ihrer einleuchtenden Darſtellungsart, als auch wegen der Eleganz und Leichtigkeit ihrer Auflöſungen. Es gebe ſogar Fälle, wo die algebraiſche Analyſis gewiſſermaßen unzureichend, und die geometriſche Methode allein anwendbar ſcheinen möge. Er führt als Beyſpiel die Aufgabe an, die Anziehung eines elliptiſchen Sphäroids auf einen innerhalb deſſelben oder auf der Oberfläche befindlichen Punct zu beſtimmen. Maclaurin hat dieſe Aufgabe nach einer rein geometriſchen Methode aufgelöſet, wobey er bloß einige Eigenſchaften der Ellipſe und der elliptiſchen Sphäroiden zum Grunde legt. Seine Auflöſung (in der Preißſchrift über Ebbe und Fluth) iſt ein Meiſterſtück, das man den ſchönſten Werken des Archimedes zur Seite ſtellen kann. (La Grange in den Mem. de Berlin 1773, wo er dieſe Aufgabe rein analytiſch auflöſet).

Die algebraiſche Rechnung macht nicht die analytiſche Methode aus. Man kann auch bey der Anwendung der Rechnung ſynthetiſch verfahren, wenn man bey Lehrſätzen ihren Beweis bloß aus den vorher erwieſenen Sätzen conſtruirt; und bey der Auflöſung von Aufgaben, wenn man zeigt, wie man bloß aus gegebenen Größen zu den unbekannten gelangt. Die theoretiſche Analyſis wird man

auch beym Gebrauche der Rechnung nicht zum Vortrage, ſondern nur für ſich anwenden, wenn man unbewieſene Sätze eines andern prüfen will. Zu der Auflöſung von Aufgaben pflegt man ſich faſt immer der Analyſis der Alten zu bedienen, wozu man gewöhnlich dadurch genöthigt wird, weil ſchon in wenig ſchwierigen Fällen das Unbekannte mit dem Bekannten zugleich in Gleichungen und Reihen eingehüllt iſt, oder erſt durch Integrationen gefunden werden muß.

Wenn man ſich die Analyſis der Alten geläufig machen will, ſo ſtudiere man die Anfangs angeführten Schriften derſelben. Die Sammlung des Pappus, beſonders das 7te Buch, iſt dazu ſehr brauchbar.

Der deutſchen Überſetzung von den Datis des Euklides, nach der Ausgabe durch Robert Simſon, hat der Überſetzer, J. C. Schwab, eine lehrreiche Sammlung geometriſcher, nach der analytiſchen Methode der Alten aufgelöſeten Probleme beygefügt, die zugleich als Beyſpiele der Anwendung von den Datis dienen. Stuttgardt 1780, in 8.

Ein weitſchweifiges Werk über die mathematiſche Analyſis und Syntheſis ſind: Caroli Renaldinii de reſolutione et compoſitione mathematica Libri duo. Patavii 1668. 535 pag. Fol. Es iſt ein reicher Vorrath von Beyſpielen, auch aus der angewandten Mathematik, darin enthalten. Die Data des Euklides ſind darin aufgenommen.

Die Lehre von den geometriſchen Örtern thut große Dienſte bey der geometriſchen Analyſis. Sie ſind das, was die Gleichungen zwiſchen zwey veränderlichen Größen in der Analyſis. So wie in dieſer die Verbindung zweyer ſolcher Gleichungen eine determinirte Aufgabe auflöſet, ſo geſchieht ſolches in der Geometrie durch die Durchſchnittspuncte zweyer Örter.

Analyſis der krummen Linien, ſ. krumme Linien.

Analyſis der Potenzen wird bisweilen das Verfahren genannt, aus einer Zahl, die als Potenz eines gegebenen Grades betrachtet wird, die dazu gehörige Wurzel zu finden, oder ſie auf dieſelbe Art zu zerlegen, wie ſie als Potenz aus den Theilen der Wurzel zuſammengeſetzt wird. Man nennt dies ſonſt auch **Evolution.**

Analyſis Diophantea, ſ. unbeſtimmte Analytik.

Analyſis endlicher Größen, ſ. Analyſis.

Analyſis unendlicher Größen, ſ. Unendlich; Differentialrechnung; Integralrechnung.

Analytik, entweder einerley mit Analyſis, oder der Inbegriff aller Verfahrungsarten bey der Entwickelung der Verbindungen der Größen, der Auflöſung der Aufgaben, Entdeckung neuer Methoden, und Erweiterung der Unterſuchungen in der Mathematik, kurz die **analytiſche Kunſt**. Dieſe läßt ſich nur unvollkommen in Bemerkungen, Maximen oder Vorſchriften faſſen. Man muß ſie durch fleißige und genaue Beobachtung des Verfahrens der Meiſter in der Kunſt ſich erwerben, vorausgeſetzt, daß man mathematiſches Talent beſitze.

Analytiſch, was zur Analyſis gehört, oder wobey die Analyſis gebraucht und angewandt wird, oder was als Hülfsmittel in der Analyſis dient, als analytiſche Gleichung, Formel; analytiſche Auflöſung, Rechnung, Beweisart, Unterſuchung, Methode; analytiſche Geometrie, Trigonometrie, Mechanik, Optik; analytiſches Parallelogramm, Dreyeck; analytiſche Tafeln.

Man ſehe insbeſondere die Artikel: Gleichung, Formel, Methode, Geometrie, Trigonometrie, Newtoniſches Parallelogramm.

Anatomie der Zahlen (**anatomia numerorum**) iſt eine Tafel, worin alle Factoren der ganzen

theilbaren Zahlen neben denſelben verzeichnet ſind. Eine ſolche hat zuerſt John Pell im 17ten Jahrhundert geliefert, ſ. Theilbare Zahl.

Angewandte Mathematik ſ. Mathematik.

Anguinea hyperbola iſt ein Name, den Newton einem hyperbelartigen Zweige mehrerer krummen Linien aus der dritten Ordnung der Linien giebt, weil der Zweig mit beiden Schenkeln an derſelben geradlinichten Aſymptote, die er irgendwo ſchneidet, mit entgegengeſetzten Wendungen, der eine Schenkel auf der einen Seite, der andere auf der andern, ſich ins Unendliche hin erſtreckt. Die krumme Linie hat entweder dieſe einzige Aſymptote, oder noch zwey andere. Newton giebt dem hyperboliſchen Zweige auch den angeführten Namen, wenn er zwiſchen zwey parallelen Aſymptoten nach entgegengeſetzten Richtungen hin ſich erſtrecket. Die ſchlangenförmige Hyperbel findet ſich in den Gattungen 9, 26, 27, 33, 34, 35, 36, 52, 58, 59, 61, 62.

Anliegende Theile eines ſphäriſchen rechtwinklichten Dreyecks. S. Nepers Regel für ſphäriſche Dreyecke.

Anliegender Winkel, iſt der Winkel, der eine benannte Seite einer Figur zu einem ſeiner Schenkel hat; oder auch der neben einem andern Winkel liegt, insbeſondere, wenn beide zuſammen zwey Rechte ausmachen, in welchem Falle ſie am gewöhnlichſten **Nebenwinkel** heißen.

Anmerkung (Scholium) iſt in dem förmlichen Vortrage der Mathematik, wenn jeder Satz mit dem ihm zukommenden Namen, Lehrſatz, Aufgabe, u. ſ. bezeichnet wird eine Einſchaltung, worin dasjenige, was Dunkelheit, oder Zweifel, oder Mißverſtand veranlaſſen könnte, gehoben wird worin; man ferner bey wichtigen Sätzen den Gang der Erfindung bemerklich macht, hiſtoriſche Nachrichten von derſelben und der Erfindung mittheilt, andere Beweiſe

und Auflöſungen anzeigt, die Anwendung eines Satzes lehrt, Schriften, die eine weitere Ausführung enthalten, empfiehlt, Inſtrumente beſchreibt, u. dergl.

Antecedens rationis, das Vorderglied eines Verhältniſſes, wie 7 in 7 : 5.

Antecedentalis Calculus iſt Differential- oder Fluxionen-Rechnung auf eine andere als die gewöhnliche Art aufgeſtellt, von einem Engländer, **James Glenie**, der ſie in einer Schrift beſchrieben, betitelt: **The antecedental Calculus: or, a geometrical methodus of reaſoning, without any conſideration of motion or velocity, applicable to every purpoſe to which Fluxions have been, or can be applied, London 1793, 16 pag. 4.** Die Schrift bezieht ſich auf eine Abhandlung des Verfaſſers in den Tranſactionen 1777, und eine andere lateiniſche, die 1776 herausgekommen iſt, wie auch auf ſeine Doctrine of univerſal Compariſon, or general Proportion, 1789. worin der Grund zu der Theorie in jener Schrift gelegt iſt. Glenie glaubt, daß Bewegung, Zeit und Geſchwindigkeit Begriffe ſeyn, die nicht in die reine Geometrie und abſtracte Theorie gehören. Darum will er eine Methode, die allgemeiner als die Fluxionenrechnung, und zugleich auch als die Differentialrechnung ſey, gebrauchen. In der That iſt Glenie's Verfahren nur eine ganz unweſentliche Veränderung in der Herleitung der Differentialrechnung mit einer neuen Benennung. Es iſt folgendes:

Es ſey $x : B = A^m : B^m$

und $x + e : B = (A + N)^m : B^m$,

ſo iſt

$$e = \frac{m A^{m-1} N + \frac{m.m-1.}{1.2} A^{m-2} N^2 + \text{etc.}}{B^{m-1}}$$

Iſt aber

$x + e : B = A^m : B^m$,

und $x : B = (A - N)^m : B^m$,

ſo iſt

$$e = \frac{mA^{m-1}N - \frac{m.m-1.}{1.2}A^{m-2}N^2 + \text{etc.}}{B^{m-1}}.$$

Wenn nun die Verhältniſſe A + N : B und A — N : B der Gleichheit näher kommen, als nur jede angebliche Größe eben der Art, ſo wird jeder der beiden Werthe $= \frac{mA^{m-1}N}{A^{m-1}}$. Dieſen Werth nennt Glenie the antecedental der Größe, welche zu B daſſelbe Verhältniß hat, als das Verhältniß m : 1 zu dem Verhältniſſe A : B. Man redet ſonſt nicht von einem Verhältniſſe eines Verhältniſſes zu einem andern. Doch ſieht man wohl, was es hier bedeuten ſoll, nämlich die Vervielfachung eines Verhältniſſes. Die Bezeichnungen ſind in dieſer Vorſtellung etwas geändert, um ſie bequemer zu machen.

Archiv der reinen und angewandten Mathematik, 3tes und 4tes Heft. S. 352 und 481.

Ant-Evoluta einer krummen Linie iſt eine ſolche, die dieſer auf eine entgegengeſetzte Art zugeordnet iſt, als es die Evolute iſt. Die Evolute iſt der Ort aller Mittelpuncte der Krümmungskreiſe an einer krummen Linie. Werden die Krümmungshalbmeſſer über die krumme Linie hinaus verlängert, ſo weit als es die Länge jedes beträgt, ſo liegen die Endpuncte der Verlängerungen auf der Ant-Evoluta. Jakob Bernoulli hat dieſe Erzeugung einer krummen Linie erdacht, die aber nur bey der logarithmiſchen Spirale angewandt werden mag, deren Ant-Evolute, ſo wie ihre Evolute, dieſelbe Spiral-Linie iſt. Jac. Bernoulli Opp. T. I. nr. 49. Acta Erud. 1692.

Anthapſologarithmus iſt eine nicht üblich gewordene aus der griechiſchen Sprache genommene, (von

αντι und απτειν) Benennung des Logarithmen der Cotangente eines Winkels, in der Trigonometria Sphaericorum logarithmica, adornata a Nicolao Kauffmann Holſato, 1651, in 8. Der Logarithme der Tangente heißt daſelbſt Hapſologarithmus; der Logarithme des Coſinus Antilogarithmus. Der Herausgeber dieſer Tafeln iſt der wegen ſeiner Conſtruction der Seecharten berühmte Mercator.

Anticauſtica einer krummen Linie iſt eine ſolche, die dieſer auf eine entgegengeſetzte Art, als die Cauſtica, zugeordnet iſt. Die von einer krummen Linie nach Art der Lichtſtrahlen zurückgeworfenen Linien berühren die Cauſtica. Verlängert man dieſe über die zurückwerfende Linie hinaus, und nimmt die Verlängerung ſo groß als den zurückgeworfenen Strahle, von dem Zurückwerfungspuncte bis an den Berührungspunct an der Cauſtica, ſo iſt der Endpunct der Verlängerung auf der Anticauſtica. Auch dieſe Entſtehungsart einer krummen Linie aus einer andern hat Jacob Bernoulli erdacht, (a. a. O.). Die Anticauſtica der logarithmiſchen Spiral linie, iſt, ſo wie ihre Cauſtica, ſie ſelbſt.

Antilogarithmus iſt eine von Neper gebrauchte Benennung des Logarithmen eines Coſinus, in Beziehung auf den Logarithmen des zugehörigen Sinus, die darin ihren Grund hat, daß in den Tafeln die Coſinus und ihre Logarithmen den Sinus und deren Logarithmen gegen über ſtehen. Neperi logar. canonis deſcriptio L. I. c. 3. Kepler bedient ſich auch dieſer Benennung. Tabularum Rudolphin. praecepta, Cap. VIII. Sie iſt jetzt nicht üblich.

Wallis verſteht unter Canon Anti-Logarithmicus ſolche logarithmiſche Tafeln, worin die Logarithmen in arithmetiſcher Progreſſion verzeichnet wären, von 0 bis 100, 000, mit Beyfügung der zugehörigen Zahlen, zu dem Ende, daß man daraus eben ſo leicht zu jedem Logarithmen die Zahl finden könnte, als man aus dem gewöhnlichen Canon zu einer Zahl den Logarithmen, und die Proportionaltheile

durchs Einſchalten findet. Wallisii Algebra in Opp. Vol. II. p. 63. Er ſcheint ſich nicht beſtimmt genug ausgedruckt zu haben, da er die Kennziffern welche die Logarithmen haben ſollen, nicht feſtſetzt.

In dem Dictionnaire encyclopédique wird Antilogarithme erklärt als das Complement des Logarithmen eines Sinus, einer Tangente oder Secante, das iſt, als der Unterſchied dieſes Logarithmen von dem Logarithmen des Sinus totus. Dieſes hat Hutton nachgeſchrieben.

Antiparallele Linien ſind ein Syſtem von vier geraden convergirenden Linien in einer Ebene, A, B, C, D, von welchen A und C ſich unter denſelben Winkeln ſchneiden, wie B, und D, als in (Fig. 8. Tab. I.) die Linien PA, PB, QC, QD. Hier iſt der W. PEQ = QHB, und weil der W. CQD den beiden Dreyecken EQF, GQH, gemein iſt, auch der W. QFE = QGH. Die äußern Winkel QGH, QHG ſind den innern verwechſelt genommen, nämlich QFE und QEF, gleich. Wären PA, PB parallel, ſo würden der äußere und innere Winkel auf derſelben Seite der ſchneidenden QC, QD ſich gleich ſeyn. Daher die Benennung, antiparallele. Leibnitz hat ſie zuerſt gebraucht. Acta Erud. 1691. p 279.

Der Fall iſt häufig, daß zwey Linien von zwey andern auf die hier angegebene Art geſchnitten werden. Es entſtehen dadurch ähnliche Dreyecke, in welchen aber die gleichnamigen Glieder der Verhältniſſe ihrer Seiten nicht eine gleiche Lage haben. Es iſt

$$PE : PG = PH : PF,$$
$$QE : QF = QH : QG.$$

Ein Kreis, der durch drey der vier Puncte, E, F, G, H, beſchrieben wird, geht auch durch den vierten. Denn an dem Kreiſe haben eben dieſe Proportionen zwiſchen den Segmenten zweyer Linien von ihrem Durchſchnittspuncte an genommen Statt.

Wenn ein ſchiefer Kegel durch eine mit der Grundfläche antiparallele Ebene geſchnitten wird, ſo iſt der Durchſchnitt ein Kreis wie die Grundfläche. Gewöhnlich nennt man einen ſolchen Schnitt eine ſectio ſubcontraria (Wechſelſchnitt). Die ſtereographiſche Projection beruht darauf.

Antitheſis iſt Verſetzung der Glieder einer Gleichung aus einem Theile derſelben in den andern mit verwechſelten Vorzeichen. Vieta und nach ihm Harriot gebrauchen dieſes nicht mehr übliche Kunſtwort.

Anwendung der Analyſis auf die Geometrie beſteht darin, daß man die geometriſchen Größen durch Rechnung, für eine angenommene, oder unbeſtimmt gelaſſene Einheit bey jeder Art der Größen, findet.

Die reine Geometrie findet alle Größen durch Conſtructionen, das iſt durch intellectuelle Zeichnung von Linien, deren Durchſchnitte die verlangten Größen geben. Ihre Hülfsmittel ſind vorzüglich die Lehre von der Gleichheit und Ähnlichkeit der Dreyecke, einige Lehrſätze über die Zuſammenſetzungen der Seiten, Segmente und anderer Linien in den Dreyecken, und die Eigenſchaften der Linien, die anſtatt der unbeſtimmten Gleichungen mit veränderlichen Größen dienen, und die geometriſchen Örter heißen. Die Analyſis kann alles dieſes gebrauchen, und hat noch überdem die Eigenſchaften der Gleichungen, die Methoden ſie zu verbinden, die Mittel, die unbekannten Größen auszuſondern, und mancherley Rechnungsweiſen, wodurch das Geſuchte, auch bey ſehr verwickelten Relationen, leicht gefunden wird. Die Analyſis des Unendlichen macht manche Aufgabe zu einem Spiele, zur Übung für Anfänger, wozu die Alten die ganze Kraft ihres Geiſtes anwenden mußten. Das Rechnen macht die Aufſöſung leichter, als wenn man erſt ſuchen muß, welche Hülfslinien zur Verbindung des Bekannten und Unbekannten gezogen werden müſſen, und läßt ſich oft faſt mechaniſcher Weiſe ausführen, da man bey der geometriſchen Conſtruction immer die

Augen auf die oft ſehr durch einander laufenden Linien richten muß. Durch die Lehre von den entgegengeſetzten Größen kann man mehrere Fälle in einer Rechnungsformel begreifen, welche die Geometrie einzeln durchgehen muß. Zur Anwendung in der praktiſchen Geometrie und allenthalben, wo geometriſche Größen vorkommen, beſonders in der Aſtronomie, iſt die Rechnung nothwendig, weil Conſtructionen nie die erforderliche Schärfe geben, oft höchſt unſicher ſind, wenn Linien ſich unter ſehr kleinen Winkeln ſchneiden, und unausführbar werden, wenn die Durchſchnittspuncte, welche die geſuchten Größen beſtimmen, ſehr weit über die Gränzen des zu einer Zeichnung beſtimmten Raums hinausfallen.

Die Anwendungen der Analyſis ſind, 1) die Berechnung aller Formeln für die Functionen der Winkel, oder die trigonometriſchen Linien; 2) in der Trigonometrie, der ebenen und ſphäriſchen, wenn darin alles auf Gleichungen gebracht wird, 3) bey der Berechnung der regulären Vielecke, ſowohl ebener als ſphäriſcher; 4) auf die Cyklometrie; 5) in der ganzen Theorie der krummen Linien, worin die Eigenſchaften derſelben aus ihren Gleichungen entwickelt werden. Die Eintheilung der Linien in Ordnungen, Claſſen und Geſchlechter gründet ſich allein auf die analytiſche Betrachtung der Gleichungen. Die Theorie der krummen Linien bey den Neuern tritt an die Stelle der geometriſchen Örter der Alten. 6) In der Lehre von den Projectionen, daher eine analytiſche Perſpectiv entſteht, welche der zeichnenden oft zu Hülfe kommen muß. Die ſtereographiſche Projection verbindet in der Ausübung das geometriſche und analytiſche Verfahren. 7) Bey vielen einzelnen Lehrſätzen und Aufgaben, die durch Hülfe der Algebra mit Vortheil behandelt werden.

Newton hat in der Arithm. univerſali, in dem Abſchnitte, wie geometriſche Fragen auf Gleichungen gebracht werden, ſehr gute Vorſchriften und Bemerkungen zu dieſem Zwecke vorgetragen. Die allgemeine, auch bey andern analytiſchen Unterſuchungen zu beobachtende, Vorſchrift iſt, daß man den Anfang damit mache, zu unterſuchen, wie

die Größen, welche die Aufgabe betrifft, von einander abhangen, ohne darauf zu ſehen, ob ſie gegeben ſind, oder geſucht werden, damit man erfahre, welche unter ihnen diejenigen ſind, wodurch die übrigen, mittelſt einer fortſchreitenden Verknüpfung, gefunden werden können. Unter dieſen zur Syntheſis ſchicklichen Größen nehme man diejenigen als bekannt an, von welchen es ſich ergiebt, daß man durch ſie am leichteſten auf die übrigen kommen möge. Mit dieſen macht man den Anfang der Rechnung, und ſchreitet zu den übrigen Größen fort, ſo wie es ihre Verbindungen, zufolge der Bedingungen der Frage und anderer Umſtände, an die Hand geben, bis man zwey Werthe derſelben Größe erhält, es ſey nun daß einer dieſer Werthe eine in der Aufgabe als gegeben oder geſucht mit einem Buchſtaben bezeichnete Größe iſt, der andere ein durch die Rechnung gefundener, aus den Größen der Frage zuſammengeſetzter Werth, oder daß beyde zwey ſolche, auf verſchiedene Art zuſammengeſetzte Ausdrücke von gleicher Quantität ſind. Man muß hiebey wohl in Acht nehmen, welche Verbindungen ſich am leichteſten algebraiſch ausdrücken laſſen, da es nicht ſelten ſich ereignet, daß Größen, welche ſich durch die Geometrie leicht aus einander beſtimmen, der Algebra ſchwer fallen.

Bey der Berechnung hat man zuerſt darauf zu ſehen, wie die Größen aus andern, als aus Theilen, zuſammengeſetzt werden, oder durch Abziehung einiger Größen von andern entſtehen.

Die Proportionalität der Linien iſt für die Rechnung ein wichtiges Hülfsmittel, da das vierte Glied einer Proportion durch die drey andern gegeben wird, und da das Product der beiden äußern Glieder dem Producte der beiden mittlern gleich iſt. Darum muß man die Sätze, aus welchen gleiche Winkel, für ähnliche Dreyecke, ſich ergeben (1. und 3. Buch des Euklides), wohl gegenwärtig haben.

Zur Ausführung der Rechnung dient oft, daß Quadrate von Linien addirt werden, oder eins von einem andern ſubtrahirt wird. Dazu muß man ſich rechtwinklichte Drey=

ecke durch Perpendikel verſchaffen. Hierher gehören auch die Sätze 4 bis 10 im 2ten Buche Euklids. Die beiden Sätze 12 und 13 daſelbſt ſind oft zu Vergleichungen dienlich. Auch ſind folgende Sätze brauchbar: Wenn der Scheitelwinkel eines Dreyecks halbirt wird, ſo ſind die Segmente der Grundlinie in dem Verhältniſſe der Seiten (Eukl. VI. 3.); und das Rechteck der Seiten iſt gleich der Summe von dem Rechteck der Segmente und dem Quadrat der den Winkel halbirenden Linie, (ſ. Dreyeck.) Auch iſt in einem Dreyeck das Rechteck zweyer Seiten ſo groß, als das Rechteck von dem Perpendikel auf die dritte Seite und dem Durchmeſſer des umſchriebenen Kreiſes. Wo Figuren in einem Kreiſe eingeſchrieben vorkommen, iſt der Satz brauchbar, daß das Rechteck der Diagonalen einer eingeſchriebenen vierſeitigen Figur gleich iſt der Summe der beiden Rechtecke aus den einander gegen über liegenden Seiten.

Um dieſe Sätze anzuwenden, ſind oft noch Hülfszeichnungen zu machen, wodurch die Größen mit einander verbunden werden. Die Bemerkungen, welche Newton wegen dieſes Geſchäftes macht, ſind ſchon in dem Artikel Analyſis, als Methode, angeführt.

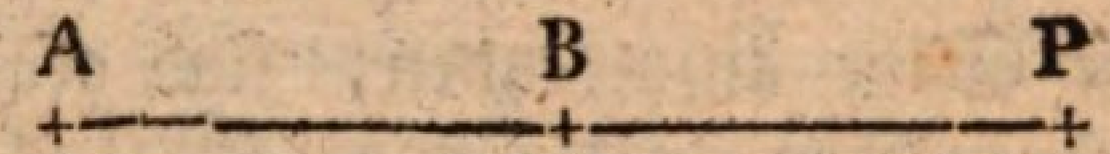
Die Abſicht bey der Anwendung der Analyſis auf die Geometrie iſt oft, daß man in ſchwerern Fällen durch die Rechnung auf eine geometriſche Conſtruction zu kommen ſucht, wie es Newton in ſeinen Principien gemacht hat, worin die Sätze und Auflöſungen durch Rechnung gefunden zu ſeyn ſcheinen, aber darauf durch die Geometrie allein bewieſen und ausgeführt ſind.

Die Beyſpiele, welche nun folgen, ſind Aufgaben, welche größtentheils mit andern Fragen und Sätzen nicht in Verbindung ſtehen, und hauptſächlich nur zur Übung in der Auflöſungskunſt dienen. Die wichtigen Anwendungen der allgemeinen Rechnung kommen in den Artikeln vor, welche die Materien, wo ſie gebraucht wird, enthalten.

1. Aufg. Eine gerade Linie AB in P ſo zu theilen, daß $BP^2 = AB \times AP$ ſey.

Dieſe Aufgabe iſt in dem Artikel, Analyſis als Methode, geometriſch aufgelöſet. Die algebraiſche iſt folgende. Man ſetze, (Fig. 2. Tab. I.) $AB = a$; $BP = x$, ſo iſt $AP = a - x$. Es iſt beſſer BP durch x zu bezeichnen, als AP, damit man nicht nöthig habe, das Quadrat einer zweytheiligen Größe zu machen. Der Forderung gemäß iſt $x^2 = a(a - x)$, alſo $x^2 + ax = aa$. Die Algebra giebt die Auflöſung dieſer Gleichung, nämlich $x = \sqrt{(aa + \frac{1}{4}aa)} - \frac{1}{2}a$, (ſ. Gleichung II.). Daraus ergiebt ſich ſogleich die geometriſche Conſtruction. Zur Berechnung iſt $x = \frac{1}{2}a(\sqrt{5} - 1)$. Dieſer Werth iſt auch $x = 2a \sin 18°$ (ſ. Geometrie IX.)

Die Algebra giebt für x noch einen Werth, und zwar einen negativen $x = -\frac{1}{2}a\sqrt{5} - \frac{1}{2}a$, der hier nicht brauchbar iſt, aber für eine andere Aufgabe, der Quantität nach, gehört. Dieſe iſt folgende:



Zu einer Linie AB eine BP zu ſetzen, daß $BP^2 = AB \times AP$ ſey. Setzt man wiederum $AB = a$; $BP = x$, ſo iſt $x^2 = a(a \times x)$ und $x^2 - ax = aa$, woraus ſich ergiebt $x = \sqrt{(aa + \frac{1}{4}a^2)} + \frac{1}{2}a$, oder $x = \frac{1}{2}a(\sqrt{5} + 1) = 2a \sin 54°$. Dieſer Werth iſt die negative Wurzel in dem erſten Falle, entgegengeſetzt genommen. Die Algebra begreift Addiren und Subtrahiren in eine Rechnung, daher ihre mehrfache Antwort auf eine Frage. Die Geometrie ſondert die Fragen von einander, welche verſchiedene Fälle in Abſicht aufs Addiren und Subtrahiren enthalten.

2. Aufg. Es iſt gegeben ein Halbkreis AEB (Fig. 9. Tab. I.) man ſoll an die berührende BD von A aus eine Linie AD ziehen, von welcher das Stück DE zwiſchen der berührenden und dem Kreiſe einer gegebenen Linie BF gleich ſey.

Zwey geometriſche Sätze verhelfen zu einer Gleichung. Erſtlich iſt $AD^2 = AB^2 + BD^2$; zweytens iſt $DA \times DE = DB^2$, (Eucl. III. 36.) Man ſetze $AB = a$;

$BF = DE = b$; $DA = x$, ſo iſt $DB^2 = x^2 - a^2$, und $DB^2 = bx$, alſo $x^2 - a^2 = bx$, und $x^2 - bx = a^2$. Daraus iſt $x = \frac{1}{2} b + \sqrt{(a^2 + \frac{1}{4} b^2)}$. Hieraus ergiebt ſich folgende Conſtruction. Man halbire BF in C, ziehe ACG, auf welcher man CG = CB nehme, beſchreibe mit AG um A als Mittelpunct einen Kreis, welcher BD in D ſchneide, ziehe AD, die den Kreis in E treffe, ſo iſt geſchehen, was verlangt ward.

Geometriſche Aufl. Es ſey geſchehen, was verlangt wird. Man ziehe BE, ſo iſt wegen des rechten Winkels E das Dreyeck AEB ähnlich dem ABD, und es iſt AE : AB = AB : AD, daher $AE \times AD = ABq$. Man beſchreibe über BF als Durchmeſſer den Kreis BGFH, und ziehe durch den Mittelpunct C die AC, welche den Kreis in G und H ſchneide, ſo iſt $AH \times AG = ABq$. Folglich $AE \times AD = AH \times AG$. Macht man nun AD = AG, ſo iſt AE = AH, und ED = HG = der gegebenen BF.

3. Aufg. Das Dreyeck ABC (Fig. 10. Tab. I.) aus der Seite BA, dem Verhältniſſe der Seiten AC : BC, und dem Winkel C zu beſtimmen.

Dieſes iſt die 2te Aufgabe in dem Artikel, Analyſis als Methode; denn der gegebene Kreisabſchnitt beſtimmt den Winkel, welcher AB gegen über liegt. Es ſey $AB = a$; $AC : BC = m : n$, und $AC = x$, ſo iſt $BC = \frac{n}{m} x$. Nun iſt (ſ. Trigonometriſche Formeln) $a^2 = x^2 + \frac{nn}{mm} x^2 - \frac{2n}{m} x^2 \cos C$, alſo $x^2 = \frac{mm\,aa}{mm + nn - 2mn \cos C}$ Die Quadratwurzel aus dieſer Größe iſt der Werth von x, der hier einzig und poſitiv iſt.

4. Aufg. In dem Halbkreiſe ACDB (Fig. 11. Tab. I.) ſind drey an einanderſtoßende Chorden eingeſchrieben, man ſoll die Gleichung zwiſchen denſelben und dem Durchmeſſer finden.

Dieſe Aufgabe gebraucht Newton, um daran zu zeigen, wie man auf mancherley Arten zu einer Gleichung zwiſchen den gegebenen und geſuchten Größen gelangen könne. Das eichteſte Verfahren iſt, daß man die Diagonalen AD, BC ziehe, ſo hat man, zufolge der Anfangs angeführten Eigenſchaft des Kreiſes der Gleichung

$$AB \times CD + AC \times BD = AD \times BC.$$

Ferner iſt wegen der rechten Winkel ACB, ADB, ſowohl $AB^2 = AC^2 + BC^2$, als auch $AB^2 = AD^2 + BD^2$. Es ſey AB die geſuchte Größe, ſo würde man von den gegebenen nicht auf ſie directe kommen können. Behandelt man aber den Durchmeſſer als gegeben, ſo wird man eine Gleichung für denſelben aus den drey gefundenen herleiten können. Es ſey $AC = a : CD = b$; $DB = c$, und $AB = x$; ſo iſt $BC = \sqrt{(x^2 - a^2)}$; $AD = \sqrt{(x^2 - c^2)}$, alſo iſt

$$bx + ac = \sqrt{(x^2 - a^2)} . \sqrt{(x^2 - c^2)}$$

uud quadrirt

$$b^2x^2 + 2abcx + a^2c^2 = (x^2 - a^2)(x^2 - c^2),$$

das iſt

$$x^3 - (a^2 + b^2 + c^2)x = 2abc.$$

Aus dieſer Gleichung wird der Durchmeſſer gefunden, wenn die drey Chorden gegeben werden, und eine der Chorden durch die beiden andern mit dem Durchmeſſer. Die cubiſche Gleichung für den Durchmeſſer hat, wegen der Vorzeichen, wenn alle drey Wurzeln möglich ſind, zwey negative Wurzeln, (ſ. Gleichung III. 9). Ein negativer Werth des Durchmeſſers hat keine Statt, und die negativen Wurzeln dienen nur die Gleichung für x rational zu machen. Drey gegebene Chorden können nur einen Halbkreis beſpannen. Daher nur eine einzige poſitive Wurzel der Gleichung. Eben ſo erhält eine Chorde in der quadratiſchen Gleichung, wodurch ſie gefunden wird, zwar einen poſitiven und einen negativen Werth, letzterer aber kann hier nicht gebraucht werden.

Den Durchmeſſer aus den Chorden durch eine geometriſche Conſtruction zu finden, wird in dem Artikel von der Anwendung der Geometrie auf die Algebra gezeigt.

5. Aufg. Zwey Linien AB, AC (Fig. 4. Tab. I.) ſind der Lage nach gegeben, nebſt dem Puncte D innerhalb des ſpitzen W. BAC; es ſoll ein Kreis beſchrieben werden, der durch D geht, und die beiden Linien berührt.

In dem Dreyecke APD iſt gegeben der W. PAD, die Seite AD, und das Verhältniß der Seiten AP : PD = m : n, (ſ. Analyſis als Methode, 3. Aufg.). Nun iſt (ſ. Trigonom. Formeln)

$$DP^2 = AD^2 + AP^2 - 2\,AD.\,AP.\cos DAP,$$

oder, wenn $AD = a$; $AP = x$, und $DAP = \alpha$ geſetzt wird, da $DP = \frac{nx}{m}$ iſt,

$$\frac{m^2 - n^2}{m^2}x^2 - 2ax\cos\alpha + a^2 = 0.$$

D ſe Gleichung giebt zwey poſitive Werthe für x, wie die Conſtruction a. a. O. Die Wurzeln der Gleichung ſind möglich, wenn $\cos\alpha^2 > \frac{m^2 - n^2}{m^2}$, oder $\cos\alpha^2 > \cos PAM^2$, welches Statt hat, wenn PAD kleiner iſt, als PAB. Es iſt $\frac{n}{m} = \sin MAP$, da $PM = PD$ iſt, alſo $\frac{m^2 - n^2}{m^2} = \cos PAM^2$.

Setzt man A für MAP, ſo iſt die Gleichung,

$$\cos A^2 . x^2 - 2a\cos\alpha . x + a^2 = 0.$$

6. Aufg. Zwey gerade Linien Bb, Cc, (Fig. 12. Tab. I.) die ſich in A ſchneiden, ſind der Lage nach gegeben; auf Bb wird ein Punct D, auf Cc ein Punct E genommen, und innerhalb des Winkels BAC wird ein Punct F gegeben; es ſoll durch F eine Linie MN an die beiden Linien Bb, Cc gezogen werden, welche darauf die Stücke DM, EN abſchneidet, deren Verhältniß einem gegebenen, der Linien, P, Q, gleich iſt.

Man ziehe FG parallel mit AC, und HF parallel mit AB, ſo iſt AN : AM = GF : GM. Hier ſind

$GF = AH$, und $HF = AG$ gegeben; und es iſt $AN = EN - EA$; $AM = DM - DA$; $GM = DM - DA - AG$, alles für den Fall der Figur. Man ſetze $DA = a$; $EA = b$; $AG = c$; $AH = d$; $DM = x$; $EN = y$, und $x : y = 1 : m$, ſo daß $y = mx$. Nun iſt

$$y - b : x - a = d : x - a - c,$$

woraus die Gleichung folgt,

$$mx^2 - (m(a + c) + b + d)x + b(a + c) + ad = 0.$$

Dieſe Gleichung mag entweder durch Rechnung oder durch eine Conſtruction aufgelöſet werden. Für den Fall der Figur ſind entweder zwey poſitive Werthe von x oder gar keine möglich.

Der in der Zeichnung angenommene Fall iſt der Normalfall, mit welchem alle übrigen Fälle in Abſicht auf die Lage der Linien zu vergleichen ſind. Diejenigen Linien, die in einem andern Falle eine entgegengeſetzte Lage in Beziehung auf die ihr gleichnamigen in dem Normalfalle haben, ſind negativ, und ändern ihr Vorzeichen, wenn ihre Symbole bloß die Quantität anzeigen. Wenn alſo D und E auf der andern Seite von A liegen, als in der Figur, ſo ſind a und b negativ. Die Lage von AG und AH kann man immer als poſitiv anſehen, weil man dem Winkel, in welchem ſich der gegebene Punct befindet, immer die Lage, welche er in dem Normalfalle hat, geben kann. Wenn DM nach der Richtung von AG, und DN nach der Richtung von AH genommen werden, ſo ſind ſie poſitiv, in dem entgegengeſetzten Falle negativ. Iſt eine derſelben poſitiv, die andere negativ, ſo iſt m negativ.

Dieſe Aufgabe iſt von Apollonius ſehr umſtändlich behandelt worden, in einer Schrift de ſectione rationis (περι λογου ἀποτομης), welche Halley aus einer arabiſchen Überſetzung lateiniſch herausgegeben hat, Oxford 1706. 8. Es werden darin alle Fälle vorgenommen, daher die Schrift 138 Seiten ſtark iſt.

7. Aufg. Zwey gerade Linien Bb, Cc, (Fig. 13. Tab. I.), die ſich in A ſchneiden, ſind der Lage nach

gegeben, und innerhalb des Winkels BAC ein Punct D; durch dieſen ſoll an die beiden Schenkel des Winkels eine Linie MN gelegt werden, welche darauf die Stücke AM, AN abſchneide, die ein Rechteck von einem gegebenen Inhalte einſchließen.

Man ziehe durch D mit AC die parallele DE an AB, und mit AB die parallele DF. Das gegebene Rechteck habe die Seiten P, Q. Nun ſuche man zu der Linie AF und den Linien P, Q, die vierte Proportionallinie AG, ſo iſt $AF \times AG = P \times Q$. Es iſt aber auch $AM \times AN = P \times Q$, alſo iſt $AF \times AG = AM \times AN$. Ferner iſt $AM : AN = FD : FN$, ſo daß $AM \times FN = FD \times AN$ iſt. Man ſetze $AE = a$; $AF = b$; $AG = c$; $AM = x$; $AN = y$, ſo iſt erſtlich $bc = xy$; zweytens $x(y - b) = ay$, oder $xy - bx = ay$; oder $bc - bx = ay$. Dieſe Gleichung multiplicire man mit x, ſetze für xy ſeinen Werth, dividire alle Glieder durch b, und bringe ſie zuſammen auf eine Seite, ſo erhält man die Gleichung

$$x^2 - cx + ac = 0.$$

Die beiden Wurzeln dieſer Gleichung ſind die beiden Werthe von AM, durch welche der Aufgabe Genüge geleiſtet wird. Soll ſie möglich ſeyn, ſo muß $\frac{1}{4}c^2$ größer als ac, oder c größer als 4a ſeyn, (ſ. Gleichung II. 4.).

Nimmt man AM auf dem Schenkel Ab des Nebenwinkels, ſo erhält man die Gleichung $x^2 - cx - ac = 0$; und nimmt man AN auf dem Schenkel Ac des andern Nebenwinkels, ſo erhält man die Gleichung $x^2 + cx - ac = 0$. Die Wurzeln beider Gleichungen ſind der Quantität nach dieſelben, aber ſich entgegengeſetzt. Daher bedeutet die negative Wurzel der einen die poſitive Wurzel der andern, und die Algebra giebt mit der Auflöſung für den Fall, da die Linie MN innerhalb des Winkels CAb gelegt wird, auch die Auflöſung für den Fall, da MN innerhalb des W. BAc gelegt wird.

Man kann die Aufgabe allgemeiner nach Art der 6ten abfaſſen. Wenn nämlich auf Bb ein Punct H, und

auf Cc ein Punct K gegeben wird, ſo ſoll das Rechteck von den Stücken HM und KN, welche die Linie NDM abſchneidet, einen gegebenen Inhalt haben. Apollonius hat auch dieſe Aufgabe nach allen beſondern Fällen in einer Schrift abgehandelt, die den Titel hat, de ſectione ſpatii (περι χωριου ἀποτομης). Halley hat ſie nach den Anzeigen bey Pappus wieder hergeſtellt, und ſie der Schrift de ſectione rationis beygefügt.

Die hier vorgetragene Aufgabe iſt einerley mit folgender: Innerhalb des gegebenen Winkels BAC ein Dreyeck MAN zu zeichnen, deſſen Inhalt gegeben iſt, und deſſen Seite MN durch einen gegebenen Punct D geht. Denn das Dreyeck MAN iſt gleich dem Dreyeck GAF, und dieſes gleich dem Dreyeck von den Seiten P und Q, mit dem eingeſchloſſenen Winkel BAC. (Eucl. VI. 15.)

8. Aufg. Innerhalb des rechten Winkels BCN (Fig. 14. Tab. I.) eine Linie MN von gegebener Länge zu legen, welche durch den gegebenen Punct A geht, der von dem Schenkel CB des rechten Winkels und der Verlängerung CD des andern Schenkels gleichen Abſtand hat.

Die geſuchte Linie ſey AMN, welche CB in M ſchneide. Die Lage wird durch BM beſtimmt. Dieſe als die Größe zu nehmen, für welche eine Gleichung geſucht werde, iſt nicht rathſam, weil eben ſo gut CM geſucht werden könnte. Aus dieſem Grunde wähle man auch für die unbekannte Größe weder AM noch AN, obgleich durch jede derſelben die Lage der geſuchten Linie beſtimmt wird. Vielmehr nehme man AR, wenn $MR = RN$ iſt, als unbekannte Größe an. Es ſey $AB = a$; MR oder $NR = b$, und $AR = x$. Nun haben wir die Gleichungen

$$AN^2 = AD^2 + DN^2,$$
$$DN = DC + CN,$$

und die Proportion

$$AM : AB = MN : CN.$$

Aus der Proportion iſt $CN = \frac{2ab}{x-b}$, daher

DN $= \frac{a(x+b)}{x-b}$, und die erſtere Gleichung iſt

$$(x+b)^2 = a^2 + \frac{a^2(x+b)^2}{(x-b)^2},$$

oder $(x^2 - b^2)^2 = 2a^2x^2 + 2a^2b^2$,

das iſt $x^4 - 2(a^2 + b^2)x^2 + b^4 - 2a^2b^2 = 0$.

Dieſe biquadratiſche Gleichung iſt eine quadratiſche für x^2. Es iſt

$$x^2 = a^2 + b^2 \pm a\sqrt{(a^2 + 4b^2)}.$$

Demnach hat x vier Werthe, von welchen zwey und zwey ſich gleich und entgegengeſetzt ſind. Es kann nämlich die Linie MN auf viererley Art gelegt werden, erſtlich in dem W. BCN, zweytens in dem Scheitelwinkel DCE, ganz auf dieſelbe Art wie in dem W. BCN, drittens in dem Winkel DCB, nämlich die Linie nm = NM, deren Hälfte mr = nr iſt, wo aber Ar der Werth des andern Paars der Wurzeln iſt; viertens in demſelben Winkel bey Vertauſchung der Schenkel Cm, Cn. Die Doppelheit der Lage derſelben Linie wird in der Algebra durch die Doppelheit des Vorzeichens angedeutet. Die Wurzeln für die Lage innerhalb der Winkel BCN und DCE ſind immer möglich, es mag b für einen Werth haben, welcher es auch ſey. Allein innerhalb des W. DCB iſt der kleinſte Werth von nm derjenige, der in einem gleichſchenklichten Dreyecke nCm iſt. In dieſem iſt $b^2 = 2a^2$. Kleiner darf b^2 nicht ſeyn. Daſſelbe beſagt der Werth von x^2 mit dem untern Vorzeichen der Wurzelgröße. Dieſer muß poſitiv ſeyn, wenn x möglich iſt. Alſo iſt $a^2 + b^2 > a\sqrt{(a^2 + 4b^2)}$, oder $a^4 + 2a^2b^2 + b^4 > a^4 + 4^2b^2$, das iſt $b^4 > 2a^2b^2$, und $b^2 > 2a^2$.

Hieraus ergiebt ſich die in dem Artikel, Analyſis als Methode, 4. Aufgabe gefundene Conſtruction der Aufgabe. In dem gefundenen Werthe von x^2 ſetze man b^2 auf die andere Seite des Gleichheitszeichens, ſo iſt

$$x^2 - b^2 = a^2 + a\sqrt{(a^2 + 4b^2)}$$

oder $(x-b)(x+b) = a(a+\sqrt{(a^2+4b^2)})$ für den Fall der Fig. 5. Hieraus entſteht die Proportion

$$a : x-b = x+b : a+\sqrt{(a^2+4b^2)}.$$

Man ziehe NQ ſenkrecht auf AN in Fig. 5, welche die verlängerte AB in Q ſchneide, ſo iſt, wegen der ähnlichen Dreyecke ABM, ANQ,

$$AB : AM = AN : AQ.$$

Alſo iſt $AQ = a+\sqrt{(a^2+4b^2)}$. Nimmt man nun $BQ = \sqrt{(a^2+4b^2)}$, und beſchreibt über AQ einen Halbkreis, ſo liegt der Endpunct N von der einen der geſuchten Linien auf dem Umfange des Halbkreiſes. Er liegt aber auch auf dem Schenkel CN oder DC des rechten W. BCN oder BCD, alſo in dem Durchſchnitte deſſelben mit dem Halbkreiſe. Die Lage der geſuchten Linie in dem Winkel DCB wird auf ähnliche Art durch eine Conſtruction gefunden. Für dieſe Lage iſt

$$b^2 - x^2 = a\sqrt{(a^2+4b^2)} - a^2,$$

und $a : b-x = b+x : \sqrt{(a^2+4b^2)} - a$.

Eine ähnliche Auflöſung und Conſtruction findet auch Statt, wenn anſtatt des Quadrats ein Rhombus genommen wird. Um ein Beyſpiel zu geben, wie das Verfahren für einen beſondern Fall allgemeiner gemacht werden mag, folgt die Auflöſung für dieſen Fall mit einiger Abänderung des Verfahrens.

9. **Aufg.** Aus dem Winkelpuncte A eines Rhombus ABCD (Fig. 15. Tab. I.) innerhalb des äußern Winkels BCN eine Linie AN zu legen, auf welcher durch die Schenkel deſſelben das Stück MN von einer gegebenen Länge abgeſchnitten wird.

Man mache den W. ANQ = ABC, und verlängere AB bis an NQ, ſo iſt das △ABM ähnlich dem △ANQ. Noch mache man den W. PNQ = BAM, ſo iſt das △ABM ähnlich dem △PNQ. Wegen der gleichen Winkel ABC, QPN ſind auch CBP und NPB gleich, und daher ſind in dem Vierecke BCNP, mit zwey parallelen Seiten die beiden andern BC, PN ſich gleich; daher

iſt Δ PNQ = BAM, ſo daß NQ = AM, und PQ = BM iſt.

Iſt AQ gefunden, ſo hat man nur über AQ einen Kreisbogen zu beſchreiben, deſſen Segment über AQ den ſtumpfen Winkel ANQ faßt. (Eucl. III. 33.) Dieſen Kreis berührt die Seite DA des Rhombus, weil der Winkel, den die Chorde AQ mit der berührenden in A auf der Seite des entgegengeſetzten Kreisabſchnittes macht, dem W. ANQ in dem Abſchnitte ANQ gleich iſt. (Eucl. III. 32.)

Man ſetze AB oder AD = a; MN = 2b; MR = b; AR = x, und AQ = y. Jene unbekannte Größe iſt nur Hülfsgröße für die letztere. Der Winkel BAD ſey = A. Es iſt erſtlich AB : AM = AN : AQ, zweytens $AQ^2 = AN^2 + NQ^2 + 2AN \times NQ.\ \mathrm{coſ}\ A$, (Trigon. Formeln). Daraus haben wir die Gleichungen,

$$x^2 - b^2 = ay.$$

$$y^2 = (x + b)^2 + (x - b)^2$$
$$+ 2(x + b)(x - b)\ \mathrm{coſ}\ A,$$

oder $y^2 = 2x^2 + 2b^2 + 2(x^2 - b^2)\ \mathrm{coſ}\ A$.
und für x^2 ſein Werth $ay + b^2$ geſetzt,

$$y^2 = 2ay + 4b^2 + 2ay\ \mathrm{coſ}\ A.$$

Das Quadrat der Diagonale des Rhombus, BD, iſt = $2a^2 + 2a^2\ \mathrm{coſ}\ A$. Dieſes ſey = c^2, ſo iſt
$c^2 = 2a^2(1 + \mathrm{coſ}\ A)$, und es iſt alſo

$$y^2 - \frac{c^2}{a} y = 4b^2, \text{ und}$$

$$y = \frac{c^2}{2a} \pm \sqrt{\left(4b^2 + \frac{c^4}{4a^2}\right)}$$

Dieſen Werth von AQ ſuche man nun durch eine Conſtruction. Der erſte Theil iſt die dritte Proportionallinie zu 2a und c; der zweyte iſt die Hypotenuſe eines rechtwinklichten Dreyecks, deſſen Katheten 2b, und jene Proportionallinie ſind.

10. Aufg. Innerhalb des Winkels ECF (Fig. 16. Tab. I.) durch den gegebenen Punct A eine Linie MN von gegebener Länge zu legen.

Dieſe Aufgabe begreift beide vorhergehende in ſich. Man ziehe durch A die Linie AB parallel mit CF, und AD parallel mit CE, ſo iſt BM : BA = CM : CN, und $MN^2 = CM^2 + CN^2 - 2CM \times CN.\ \cos ECF$. Man ſetze AB = a; AD = b; MN = c; CM = x, ſo iſt $CN = \frac{ax}{x-b}$;

und $c^2 = x^2 + \frac{a^2x^2}{(x-b)^2} - \frac{2ax^2}{x-b} \cos C$.

Dieſe Gleichung gehörig reducirt, iſt

$$x^4 - 2(a\cos C + b)x^3 + (a^2 + b^2 + 2ab\cos C - c^2)x^2 + 2bc^2x - b^2c^2 = 0.$$

Man ziehe die Diagonale AC, ſo iſt $AC^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos C$. Es ſey AC = d, ſo iſt die Gleichung dieſe,

$$x^4 - 2(a\cos C + b)x^3 + (d^2 - c^2)x^2 + 2bc^2x - b^2c^2 = 0$$

Dieſe Gleichung hat aus den oben angeführten Urſachen vier Wurzeln, von welchen zwey unmöglich ſeyn können. Denn wenn MN innerhalb des W. ECF von der gegebenen Länge gelegt werden kann, ſo kann dieſes auf zweyerley Art geſchehen, es müßten denn die Winkel bey M und N gleich groß ſeyn. Ferner iſt eine Lage der Linie innerhalb der Nebenwinkel MCf allemahl möglich; dieſes giebt noch einen Werth der Wurzel, auf dem Schenkel CE. Viertens kann MN auch in dem Nebenwinkel FCe allemahl gelegt werden, für welche Lage aber der Werth von x auf Ce negativ iſt. Die drey Werthe von CM, welche von C nach E hinfallen, ſind die poſitiven Wurzeln der Gleichung, die nach e hinfallende iſt die negative. Die Verbindungen der Vorzeichen in der Gleichung zeigen bey vier möglichen Wurzeln drey poſitive und eine negative an, (ſ. Gleichung IV. 6.).

Dieſe Aufgabe gehört unter eine noch allgemeinere, nämlich die, zwiſchen zwey gegebenen Linien, geraden oder krummen, eine gerade Linie von gegebener Länge zu legen, die durch einen gegebenen Punct geht. Mit dieſer Aufgabe haben ſich die Alten viel beſchäftigt. Apollonius hat zwey Bücher darüber geſchrieben, die er nennt περι νευσεων, de inclinationibus. Sie ſind verloren gegangen. Doch hat Pappus in dem 7. B. ſeiner Sammlungen eine Anzahl Aufgaben, die dahin gehören, aufgenommen. In der Vorrede giebt er eine kurze Nachricht von einigen unter der allgemeinen Aufgabe begriffenen beſondern, worunter auch die hier befindliche 7te iſt, welche er aber in ſeinem Werke nicht vorträgt. Das Werk des Apollonius haben mehrere Mathematiker wieder herzuſtellen verſucht; Ghetaldus in dem Buche, das er Apollonius redivivus betitelt, Venedig 1607; Anderſon in Supplemento Apollonii redivivi, Paris. 1612; Horsley zu Oxford 1770, und Burrow zu London 1779.

11. Aufg. Aus zwey gegebenen Puncten A, B, (Fig. 17. Tab. I.) an einen gegebenen Kreis die Linien AP, BP zu ziehen, welche ſich in einem Puncte P des Umfanges ſchneiden, und den Kreis auſſer dieſem Puncte in zweyen Puncten M, N treffen, ſo daß MN parallel mit AB ſey. Es iſt die Lage der beiden Linien AP, BP durch Rechnung zu finden.

Man ziehe aus dem gegebenen Mittelpuncte die ſenkrechte CD auf AB, ſo ſind AD, BD, CD, nebſt dem Halbmeſſer CM oder CN gegebene Größen. Ferner ziehe man die berührenden AE, BF, ſo iſt $AE^2 = AM \times AP$, und $BF^2 = BN \times BP$. (Eucl. III. 36.). Wegen der Parallelen AB, MN iſt $AM : AP = BN : BP$, alſo $AM^2 : AM \times AP = BN^2 : BN \times BP$. Daher iſt $AE^2 : BF^2 = AM^2 : BN^2$,

oder $AE : BF = AM : BN = AP : BP$.

Es kommt nun auf die Wahl der unbekannten Größe an, wodurch die Puncte P, M, N, beſtimmt werden mögen. Die Linien AM, AP, BN, BP ſind dazu nicht

ſchicklich, weil eine ſo gut als die andere genommen werden kann, und weil ſie mit dem gegebenen Halbmeſſer des Kreiſes nicht in Verbindung ſtehen. Man nehme CQ von C bis an MN auf der ſenkrechten CD für die unbekannte Größe, welche durch eine Gleichung gefunden werden ſoll. Man ziehe MR, NS ſenkrecht auf AB. Durch MC und CQ ſind MQ = QN gegeben, das iſt RD = DS; dadurch AR und BS; dadurch und durch MR = NS, ſind AM, BN gegeben, deren Verhältniß bekannt iſt.

Es ſey CM = a; CD = b; AD = c; BD = d; AE = e; BF = f; CQ = x. Es iſt nun
$MQ = \sqrt{(a^2 - x^2)}$; $AR = c - \sqrt{(a^2 - x^2)}$;
$MR = b - x$; $BS = d - \sqrt{(a^2 - x^2.)}$ Alſo iſt
$AM^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2bx - 2c\sqrt{(a^2 - x^2)}$,
$BN^2 = a^2 + b^2 + d^2 - 2bx - 2d\sqrt{(a^2 - x^2)}$.

Wenn man noch die (in der Figur nicht ausgezogenen) Linien AC, EC, zieht, ſo iſt $AD^2 + DC^2 = AC^2 = AE^2 + CE^2$, alſo iſt
$b^2 + c^2 = e^2 + a^2$; und eben ſo $b^2 + d^2 = f^2 + a^2$
Daher iſt
$AM^2 = e^2 + 2a^2 - 2bx - 2c\sqrt{(a^2 - x^2)}$;
$BN^2 = f^2 + 2a^2 - 2bx - 2d\sqrt{(a^2 - x^2)}$.
Zufolge der anfangs gefundenen Proportion iſt nun

$$e^2(f^2 + 2a^2 - 2bx - 2d\sqrt{(a^2 - x^2)}) = f^2(e^2 + 2a^2 - 2bx - 2c\sqrt{(a^2 - x^2)}),$$

oder

$$e^2(a^2 - bx - d\sqrt{(a^2 - x^2)}) = f^2(a^2 - bx - c\sqrt{(a^2 - x^2)}).$$

oder

$$(e^2 - f^2)(a^2 - bx) = (e^2 d - f^2 c)\sqrt{(a^2 - x^2)}.$$

Man ſetze $\frac{e^2 d - f^2 c}{e^2 - f^2} = g$, ſo iſt

$$a^2 - bx = g\sqrt{(a^2 - x^2)}.$$

alſo durch Quadrirung und Reduction

$$(b^2 + g^2)\, x^2 - 2a^2bx + a^2(a^2 - g^2) = 0,$$

Aus dieſer Gleichung werden zwey Werthe von CQ gefunden, (ſ. Gleichung, II. 1.).

Die Auflöſung durch Rechnung iſt beſchwerlich, wie es gewöhnlich der Fall iſt, wenn das Geſuchte die Beſtimmung einer Lage iſt. Die Geometrie giebt ſie leichter an. Man ſehe die Auflöſung in dem Artikel, Analyſis als Methode, 5. Aufg.

Boſſut, in dem Cours des Mathem. T. II. p. 233. ſetzt $AM = x$; $MQ = y$, geräth aber dadurch auf eine Gleichung vom vierten Grade für x, da AM nicht bloß die in der Figur dadurch bezeichnete, ſondern auch AP, und noch zwey ſolche Linien, bey einer andern Chorde MN, bezeichnet.

12. **Aufg.** In dem rechtwinklichten Dreyecke ACB (Fig. 18. Tab. I.) iſt aus der Spitze des rechten Winkels C das Perpendikel CD auf AB gezogen, und es iſt darin gegeben $AD + DC = a$, und $DB + BC = b$; man ſoll das Dreyeck ACB beſtimmen.

Wegen der rechten Winkel ACB und ADC iſt $AD : DC = DC : DB$ (Eucl. VI. 8.); auch iſt $BC^2 = CD^2 + DB^2$. Man ſetze $DC = x$, ſo iſt

$$AD = a - x; \quad DB = \frac{x^2}{a - x}. \quad BC = b - \frac{x^2}{a - x}$$

$$= \frac{ab - bx - x^2}{a - x}, \text{ alſo } x^2 + \frac{x^4}{(a - x)^2}$$

$$= \frac{(ab - bx - x^2)^2}{(a - x)^2}.$$ Hieraus entſteht durch Multiplication mit dem Nenner, und gehörige Reduction die Gleichung

$$x^4 - 2(a + b)x^3 + (a^2 + 2ab - b^2)x^2$$
$$+ 2ab^2x - a^2b^2 = 0.$$

Das gegebene Glied hat die Factoren a und b. Da es das Product aller vier Wurzeln der Gleichung iſt, (ſ. Gleichung IV. 7.) ſo verſuche man, ob dieſe Factoren für x

geſetzt der Gleichung ein Genüge thun. Setzt man $x = a$, ſo heben ſich alle Glieder auf, und es iſt a eine Wurzel der Gleichung. Sie hat daher den Factor $x - a$ (a. a. O. 8); den andern giebt die Diviſion durch $x - a$, nämlich, $x^3 - (a + 2b)x^2 - b^2x + abb$. Weil nun nicht seyn ſoll $x - a = 0$, da in dieſem Falle CB mit AB parallel wäre, ſo iſt die Wurzel $x = a$ unbrauchbar, und es muß der andere Factor Null ſeyn, ſo daß die geſuchte Gleichung iſt

$$x^3 - (a + 2b)x^2 - b^2x + ab^2 = 0.$$

Die zuerſt gefundene Gleichung hat durch die Quadrirung der beiden Werthe von BC einen höhern Grad erhalten, als ihr zukommt, nach der Anzahl der Werthe, welche x haben kann; daher ſie einen Factor bekommen hat, der ſich abſondern läßt.

Die Aufgabe läßt nur einen Werth für x zu. Denn BD und BC wachſen beide mit x zugleich, daher giebt es nicht zwey verſchiedene x, für welche ihre Summe dieſelbe Größe bekäme. Die cubiſche Gleichung hat alſo entweder zwey unmögliche Wurzeln, oder, wenn alle drey möglich ſind, ſo ſind zwey derſelben Antworten auf eine andere, aber mit der vorgelegten verwandte Frage.

Man verändere die Aufgabe in die folgende: Es iſt gegeben $DC - DA = a$, und $BC - BD = b$, ſo ſoll das Dreyeck daraus beſtimmt werden. Setzt man wiederum $DC = x$, ſo kommt man auf dieſelbe Gleichung, wie vorher, da es bey dem Quadriren gleichgültig iſt, ob die Wurzel das eine oder das andere Vorzeichen hat.

Noch verändere man die Aufgabe folgendergeſtalt. Es ſey $AD - DC = a$; $BC + BD = b$, und $DC = x$, ſo bleibt die Rechnung dieſelbe, auſſer daß die Vorzeichen des Gliedes, welches x^2 enthält, und des gegebenen ſich ändern. Die Gleichung iſt nämlich

$$x^3 + (a + 2b)x^2 - b^2x - ab^2 = 0.$$

Die Wurzeln dieſer Gleichung ſind denjenigen der zuerſt gefundenen gleich, aber entgegengeſetzt.

Die Gleichung für den erſten Fall,

$$x^3 - (a + 2b)x^2 - b^2x + ab^2 = 0.$$

hat, zufolge der Verbindungen der Vorzeichen, zwey poſitive Wurzeln und eine negative. Jene beiden gehören für die erſte und zweyte Aufgabe; die negative als poſitiv betrachtet iſt der Werth des Perpendikels DC in der dritten Aufgabe. Die Algebra begreift die Auflöſungen dreyer Aufgaben in eine einzige Formel. Zwey Fälle werden zugleich unmöglich.

Eine andere Auflöſung.

Man ſuche das Verhältniß AD : CD, als woraus ſich auch das von DB ; BC ergiebt, und woraus ferner die Größen ſelbſt, vermittelſt ihres Verhältniſſes zu den Summen, gefunden werden. Da es hier bloß auf die Verhältniſſe ankommt, ſo laſſe man ACB ein dem geſuchten Dreyeck ähnliches ſeyn, in welchem $AD = 1$ iſt, und $DC = t$. Nun iſt $AC^2 = 1 + t^2$; $DB = t^2$; $BC = t\sqrt{(1 + t^2)}$, weil $AD : CD = AC : BC$ iſt. Zufolge der Bedingung in der Aufgabe iſt

$$1 + t : t^2 + t\sqrt{(1 + t^2)} = a : b,$$

woraus iſt

$$b(1 + t) = at(t + \sqrt{(1 + t^2)}).$$

Hieraus ergiebt ſich

$$2abt^3 + (a^2 + 2ab - b^2)t^2 - 2b^2t - b^2 = 0.$$

Dieſe Gleichung hat zufolge der Vorzeichen ihrer Glieder nur eine poſitive Wurzel. Die negativen Wurzeln ſind die entgegengeſetzten der poſitiven Wurzeln in der Gleichung

$$2abt^3 - (a^2 + 2ab - b^2)t^2 - 2b^2t + b^2 = 0,$$

auf welche man geräth, wenn $DA - DC = a$ und $BC \pm BD = b$ geſetzt wird.

Man kann vielerley Aufgaben über Dreyecke vorlegen, wenn man aus den Seiten, Winkeln, Perpendikeln und Segmenten der Grundlinie und gewiſſer Verbindungen

derſelben gegebene Größen macht, die gerade zureichen, das Dreyeck zu beſtimmen. Die hier vorgetragene wird eine der lehrreichſten ſeyn.

13. Aufg. Auf einem um den Mittelpunct C beſchriebenen Kreiſe, (Fig. 19. Tab. I.) nehme man einen Bogen AB, ziehe BD ſenkrecht auf den Halbmeſſer AC, halbire den Bogen AB in E, und ziehe ED; es ſoll aus dem Winkel BDE das Verhältniß von BD zu AD (d. i. des Sinus ACB zum Querſinus) gefunden werden.

Da AE die Hälfte des Bogens AB iſt, ſo ſind durch BD und CD für dieſen Bogen EF und CF für den Bogen AE, nebſt dem Unterſchiede DF der Linien CF, CD, gegeben. Hieraus wird erhalten tang BDE = tang DEF $= \frac{DF}{EF}$, eine gegebene Größe. Die Gleichung zwiſchen dieſer Tangente und dem Quotienten $\frac{BD}{AD}$ zu erhalten dient der Winkel ACE als vermittelnde Größe.

Man ſetze $\frac{BD}{AD} = u$; $\frac{DF}{EF} = t$, und $ACE = \varphi$; $ACB = 2\varphi$, ſo iſt $u = \frac{\sin 2\varphi}{1 - \operatorname{coſ} 2\varphi}$, und $t = \frac{\operatorname{coſ}\varphi - \operatorname{coſ} 2\varphi}{\sin\varphi}$, wo die trigonometriſchen Größen wegzuſchaffen ſind. Es iſt $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi \cdot \operatorname{coſ}\varphi$, und $1 - \operatorname{coſ} 2\varphi = 2\sin\varphi^2$, ſ. (Goniometrie, 35. 36.), alſo $u = \frac{\operatorname{coſ}\varphi}{\sin\varphi}$, und $t = u - \frac{\operatorname{coſ} 2\varphi}{\sin\varphi}$.

Ferner iſt $\operatorname{coſ} 2\varphi = \operatorname{coſ}\varphi^2 - \sin\varphi^2$, und

$$u^2 + 1 = \frac{\operatorname{coſ}\varphi^2 + \sin\varphi^2}{\sin\varphi^2} = \frac{1}{\sin\varphi^2};$$ auch

$$u^2 - 1 = \frac{\operatorname{coſ}\varphi^2 - \sin\varphi^2}{\sin\varphi^2},$$ ſo daß

$\cos 2\varphi = \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}$, und $\frac{\cos 2\varphi}{\sin\varphi} = \frac{u^2 - 1}{\sqrt{(u^2+1)}}$.

Demnach $t = u - \frac{u^2 - 1}{\sqrt{(u^2+1)}}$. Durch Wegſchaffung der Irrationalität entſteht die Gleichung,

$$u^3 - \frac{t^2 + 3}{2t} u^2 + u + \frac{1 - t^2}{2t} = 0.$$

Dieſe Gleichung als eine für zwey zuſammengehörige Größen, t, und u, betrachtet, liefert für einen gegebenen Quotienten u zwey Werthe von t, aber für ein gegebenes t drey Werthe von u. Nämlich, wenn der Bogen AB durch den Quotienten BD : AD gegeben wird, ſo iſt die Hälfte deſſelben nicht allein der Bogen AE = EB, ſondern auch die Hälfte der Summe jedes Vielfachen des ganzen Umfanges und des Bogens AB. Bey geraden Vielfachen trifft die Halbirung immer auf den Punct E, bey ungeraden auf den Punct e des Umfanges, der von dem Endpuncte a des Durchmeſſers um den Bogen ae = AE abſteht, und für dieſen iſt $t = \frac{Df}{ef}$, wenn ef ſenkrecht auf Aa iſt, poſitiv, wenn f zwiſchen D und a liegt.

Daß u drey Werthe für daſſelbe t haben kann, hat folgenden Grund. Der Werth von t iſt = 0 für $\varphi = 0$ und für $\varphi = 120°$. Es giebt alſo für die zwiſchen dieſen beiden befindlichen Werthe von φ je zwey gleiche poſitive t, zu welchen zwey verſchiedene φ, alſo auch zweyerley u gehören. Wird φ zwiſchen 120 und 180 Grad genommen, ſo iſt t negativ, und wächſt von 0 bis zum Unendlichen, daher hier wieder Werthe von t vorkommen, die in Abſicht auf die Quantität allein für Werthe von φ unter 120° ſich ſchon gefunden haben. In der Gleichung zwiſchen t und u kann man aber, ohne ſie zu ändern, t und u beyde negativ nehmen, daher auch umgekehrt zwey zuſammengehörige negative Werthe von

t und u beide als poſitiv betrachtet werden können. Der Werth von u für ein negatives t iſt negativ, weil φ alsdann größer als ein Rechter iſt. Der größte Werth von den poſitiven t iſt $= 1, 18$ nahe, (ſ. Größtes und Kleinſtes), und das dazu gehörige $\varphi = 68^\circ\ 32'$; hat t einen größern Werth, ſo hat die Gleichung für u nur eine mögliche Wurzel. Iſt t kleiner, ſo hat ſie drey mögliche Wurzeln, und zwar alle drey poſitiv, wenn t kleiner als 1 iſt, aber eine negative mit zwey poſitiven, wenn t größer als 1 iſt, (ſ. Gleichung III. 9). Man bemerke, daß $t = 1$ für $\varphi = 45^\circ$ und $\varphi = 90^\circ$ iſt.

Die Aufgabe kommt bey der Unterſuchung über die ſcheinbare Geſtalt des Luftgewölbes vor. Smith in ſeiner Optik, (S. 56. der deutſchen Überſ.) nimmt dieſe Wölbung für das Segment einer Halbkugel, woran ein verticaler Bogen durch eine Linie halbirt wird, die mit dem Horizont einen Winkel von 23° macht. Wenn demnach der Bogen BAb, deſſen Chorde Bb horizontal iſt, einen verticalen Bogen des Luftgewölbes darſtellt, ſo ſoll aus dem Winkel BDE = 23° das Verhältniß BD : AD gefunden werden. Es iſt $t = 0{,}424475$; $\log t = 9{,}627519$; $\log t^2 = 9{,}255703 8$. Wenn man hieraus die Coefficienten der Gleichung berechnet, ſo wird man finden

$$u^3 - 3{,}74601\,u^2 + u + 0{,}96569 = 0.$$

Setzt man $u = 3{,}3$, ſo iſt der Werth der Gleich. $= -0{,}592$.

" " $u = 3{,}4$. " " " " $= +0{,}365$

alſo iſt nahe $u = 3{,}36$. Smith findet $u : 1 = 10 : 3$; Käſtner $u : 1 = 52 : 180$.

14. Aufg. Ein Halbkreis ABC (Fig. 20. Tab. I.) iſt gegeben, und auf dem Durchmeſſer ein Punct D; man ſoll durch D einen Halbkreis wie DEF, aus einem Mittelpuncte G auf AC, beſchreiben, ſo daß auf der berührenden CEB das Stück EB von dem Berührungspuncte bis an den Umfang des gegebenen Kreiſes dem Stück AD gleich ſey.

Es ſey $AD = BE = a$; $DC = b$; $DF = 2x$, und der Mittelpunct von DEF in G, ſo iſt $FC = b - 2x$, $GC = b - x$. Nun iſt erſtlich $CE^2 = CD \times CF$. Zieht man GE an den Berührungspunct, und AB von A nach B; ſo ſind beide auf die Linie CEB ſenkrecht, und es iſt zweytens, $CE : CG = EB : AG$. Daher entſteht die Gleichung

$$b(b - 2x)(a + x)^2 = x^2(b - x)^2,$$

welche gehörig reducirt, dieſe wird

$$2bx^2 + (a^2 + 4ab - b^2)x - 2ab^2 = 0.$$

Die Gleichung hat arithmetiſch betrachtet zwey mögliche Wurzeln, von welchen eine negativ iſt, da das letzte Glied das Vorzeichen − hat (Gleichung II. 3.). Dieſe iſt aber hier nicht brauchbar. Denn wenn DG negativ genommen würde, ſo würde AG kleiner als AD, oder kleiner als EB ſeyn, welches nicht möglich iſt. Durch die Quadrirung iſt die Gleichung auf einen höhern Grad gebracht, als der Frage zukommt. Sie ward zuerſt ſelbſt vom dritten Grade mit einer Wurzel, $x = 0$. Die negative Wurzel dient nur als Mittel, die Relation von x gegen a und b rational darzuſtellen, und iſt für die geometriſche Frage als eine fremde **Wurzel** anzuſehen. Dieſes Beyſpiel dient zur Erläuterung von dem, was in dem Artikel, Gleichung VI. von Wurzeln dieſer Art geſagt wird.

Setzt man $FC = x$, ſo erhält man die Gleichung

$$(2a + b - x)^2 bx = a^2(b + x)^2,$$

und daraus

$$bx^3 - (a^2 + 4ab + 2b^2)x^2 + (2a^2b + 4ab^2 + b^3)x - a^2b^2 = 0.$$

Nimmt man $x = b$, ſo werden die beiden Producte in der erſtern Form der Gleichung identiſch, und die Gleichung wird durch dieſen Werth von x auf Null gebracht. Sie läßt ſich daher durch $x - b$ dividiren, und um einen Grad erniedrigen, (Gleichung, VI.). Der Quotient iſt

$$bx^2 - (a^2 + 4ab + b^2)x + a^2b = 0,$$

wenn x nicht = b ſeyn ſoll, als welches den Durchmeſſer des geſuchten Kreiſes Null machen würde. Die Wurzel b iſt eine fremde zur Frage nicht gehörige. Die quadratiſche Gleichung hat zwey poſitive Wurzeln, von welchen aber nur die kleinere hier brauchbar iſt. Die brauchbare Wurzel iſt kleiner als b. Setzt man x = b, ſo wird der Werth der Gleichung negativ. Dieſer Werth liegt daher zwiſchen den beiden Wurzeln, (Gleichung II. 11.).

Manche Aufgaben von der Art, wie die hier vorgetragenen findet man in folgenden Schriften:

Franc. a Schooten exercitationum mathematicarum libri quinque, Lugd. Bat. 1657. 4.

Ejusd. Tractatus de concinnandis demonſtrationibus geometricis ex calculo algebraico, bey der Ausgabe von Carteſii Geometria, Amſteld. 1683.

Newtoni Arithmetica univerſalis, Lugd. Bat. 1732, p. 82 — 179.

Guisnée Application de l' Algébre à la Géometrie, à Paris 1705. 4. Zweyte Ausg. 1733.

Thom. Simpſon's ſelect exerciſes for young proficients in Mathematicks, London 1752. 8.

Anwendung der Geometrie auf die Algebra, iſt die Auflöſung der Gleichungen durch Hülfe der Geometrie, der conſtruirenden, oder der analytiſchen. Die erſtere Art heißt insbeſondere die Conſtruction der Gleichungen.

Wie die arithmetiſchen Ausdrücke einer Linie, als $\frac{ab}{c}$; $\sqrt{ab}$; $\sqrt{(a^2 \pm b^2)}$ und andre conſtruirt werden, wird in dem Artikel, Conſtruction, gezeigt. Hier ſoll von der Conſtruction der Gleichungen gehandelt werden.

Dieſe beſteht darin, daß zwey Linien gefunden werden, deren Durchſchnittspuncte durch die zugehörigen Ordinaten, die für beide Linien in den Durchſchnittspuncten dieſelben ſind, die Wurzeln der Gleichung geben. Eine dieſer Linien kann eine gerade ſeyn, die krumme Linie muß alsdann von demſelben Grade ſeyn, von welchem die Gleichung iſt, da eine krumme Linie von einer geraden in ſo vielen Puncten geſchnitten werden kann, als die Zahl ihres Grades anzeigt, aber nicht in mehreren. Zwey Kegelſchnitte, worunter auch der Kreis gehört, können ſich in vier Puncten ſchneiden, und dienen daher zur Auflöſung cubiſcher und biquadratiſcher Gleichungen. Höhere Gleichungen werden durch die Durchſchnitte zweyer Linien conſtruirt, deren Grade mit einander multiplicirt den Grad der Gleichung geben. Man hat überhaupt die Linien von einem ſo niedrigen Grade zu nehmen als möglich iſt, wenn nicht die Leichtigkeit der Zeichnung eine Linie von einem höhern Grade zu nehmen veranlaßt. So hat Newton die Conchoide, eine Linie vom vierten Grade, zur Conſtruction cubiſcher und biquadratiſcher Gleichungen angewandt (Arithmet. univ. p 216.), weil dieſe Linie ſich leicht beſchreiben läßt. Bey höhern Gleichungen als denen vom vierten Grade iſt die geometriſche Auflöſung ſchwieriger als die arithmetiſche, weil die Zeichnung der krummen Linien von höheren Graden als die Kegelſchnitte zu mühſam iſt. Sie gewährt auch in der ſinnlichen Zeichnung nicht die Genauigkeit, die man in der Rechnung erreichen mag. Die Conſtructionen der Gleichungen vom dritten und vierten Grade durch zwey Kegelſchnitte ſind zwar in der ſinnlichen Ausführung auch nicht ſcharf genug, allein ſie können doch zur Annäherung in der Rechnung bequem dienen, und ſtellen alle Wurzeln einer Gleichung auf einmahl in ihrer Verbindung dar, da ſie durch die Rechnung ohne Zuſammenhang einzeln gefunden werden. Der Kreis und die Parabel genügen für alle Fälle, und dieſelbe Parabel läßt ſich für alle Gleichungen vom dritten und vierten Grade gebrauchen. Bey allen Conſtructionen kann ſich die Unbequemlichkeit ereignen, daß man die Einheit für

die Linien, als Halbmeſſer oder Parameter, entweder ſehr klein nehmen muß, oder nicht Raum genug für die ganze Zeichnung hat.

Allgemein iſt das Verfahren folgendes. Man hat für die eine gewählte Linie eine Gleichung zwiſchen ihren Coordinaten x und y, für die andere eine Gleichung zwiſchen ihren Coordinaten x und z. Man ſetzt $z = y$, ſo hat man zwey Gleichungen zwiſchen x und y; aus welchen man durch die Wegſchaffung der x eine beſtimmte Gleichung für die gemeinſchaftlichen Ordinaten y in den Durchſchnittspuncten erhält. Dieſe Gleichung hält man gegen die gegebene, ſo laſſen ſich die zur Zeichnung der beiden Linien nöthigen unveränderlichen Größen dadurch beſtimmen. Für Gleichungen vom zweyten Grade iſt dieſes Verfahren nicht nöthig. Sie werden durch die Durchſchnitte einer geraden Linie mit einem Kreiſe conſtruirt, und der Kreis ſchneidet auf jener ſogleich die geſuchten Wurzeln von einem gegebenen Puncte an ab.

Descartes hat zuerſt die geometriſche Auflöſung der Gleichungen vom dritten und vierten Grade durch den Kreis und die Parabel gelehrt, in dem dritten Buche ſeiner Geometrie. Hier zeigt er auch, wie Gleichungen vom fünften und ſechſten Grade durch die Durchſchnitte eines Kreiſes mit einer paraboliſchen Conchoide, einer Linie vom dritten Grade, aufgelöſet werden. Nach ihm beſchäftigten die Mathematiker ſich viel mit der geometriſchen Auflöſung der Gleichungrn, und ſuchten die Conſtruction der Gleichungen vom dritten und vierten Grade noch auf mancherley Art abzuändern. (ſ. Algebra). Da die Geometrie von ihnen als der weſentlichſte Theil der Mathematik angeſehen ward, ſo ſuchten ſie auch arithmetiſche Aufgaben auf geometriſche Art, als welche ihnen die vollkommenſte war, aufzulöſen. Gegenwärtig, da die algebraiſche Auflöſungskunſt weiter gebracht iſt, wird die Conſtruction weniger geachtet. Sie iſt aber als eine Methode ſchätzbar, welche die Verbindung zweier unbeſtimmten Gleichungen, durch die Elimination einer der veränderlichen Gröſſen, und die Entſtehung der gegebenen beſtimmten Gleich-

ung, auf einmahl anſchaulich darſtellt. Sie dient auch zur Erläuterung der Eigenſchaften der Gleichungen.

I. Conſtruction quadratiſcher Gleichungen.

1. Aufg. Die Gleichung $x^2 - ax + bc = o$ zu conſtruiren.

Aufl. Man ziehe (Fig. 21. Tab. I.) zwey gerade Linien AP, AQ unter einem beliebigen Winkel A, nehme auf AP die Theile AB = b; AC = c, und auf AQ den Theil AD = a. Man halbire BC in E, und AD in F, ziehe die Perpendikel EO, FO, welche ſich in O ſchneiden, beſchreibe aus O als Mittelpunct mit dem Halbmeſſer OB = OC einen Kreis, welcher auf AQ die Theile AG, AH abſchneidet, ſo ſind AG, AH die Wurzeln der Gleichung. Denn nach der Eigenſchaft des Kreiſes (ſ. Kreis), iſt $AG \times AH = AB \times AC$. Setzt man $AG = x$, ſo iſt $AH = a - x$, alſo $ax - xx = bc$, welches die gegebene Gleichung iſt. Setzt man $AH = x$, ſo iſt $HD = a - x$, das iſt $AG = a - x$, alſo gleichfalls $ax - xx = bc$.

Wenn der Kreis die Linie AQ berührt, ſo hat die Gleichung zwey gleiche Wurzeln. Trifft er ſie gar nicht, ſo ſind beide Wurzeln unmöglich.

2. Aufg. Die Gleichung $x^2 + ax - bc = o$ zu conſtruiren

Aufl. Man ziehe (Fig. 22. Tab. I.) zwey gerade Linien unter einem beliebigen Winkel in A; nehme auf der einen AB = b, und nach der entgegengeſetzten Seite AC = c; ferner auf der andern AD = a. Nun halbire man BC in E, und AD in F, ziehe die ſenkrechten OE, OF, die ſich in O ſchneiden. Aus O beſchreibe man mit dem Halbmeſſer OB = OC einen Kreis, welcher die andere Linie in G und H ſchneidet, ſo ſind AG, AH die Wurzeln der Gleichung $x^2 + ax - bc = o$, und zwar AG die poſitive, und AH die negative. Es iſt zufolge einer Eigenſchaft des Kreiſes $AB \times AC = AG \times AH$, woraus auf dieſelbe Art wie vorher die Gleichung folgt.

Die Gleichung $x^2 - ax - bc = 0$ wird ganz auf dieſelbe Art conſtruirt. Es iſt hier AH die poſitive Wurzel und AG die negative.

Der Kreis ſchneidet die Linie HG in allen Fällen, ſo wie die Gleichung immer zwey mögliche Wurzeln hat.

II. Conſtruction der cubiſchen Gleichungen, worin das zweyte Glied fehlt.

Es ſey AX (Fig. 23. Tab. II.) die Axe einer Parabel MAN, und C der Mittelpunct eines Kreiſes, welcher durch den Scheitelpunct der Parabel geht. Ein anderer Durchſchnittspunct ſey M. Man ziehe von C und M die ſenkrechten CB, MP auf die Axe, und die Halbmeſſer CA, CM. Es ſey $AB = b$; $BC = c$, $AC = r$, der Parameter der Parabel $= p$; die Abſciſſe $AP = x$; die Ordinate $PM = y$. Nun giebt erſtlich die Parabel die Gleichung

$$px = yy.$$

Anſtatt die Abſciſſen für den Kreis auf AX von A aus, und die Ordinaten parallel mit PM zu nehmen, nehme man die Abſciſſen auf der verlängerten CB von C aus, und die Ordinaten darauf ſenkrecht. Für den Punct M iſt die Abſciſſe $CV = c + y$, und die Ordinate $VM = b - x$, alſo

$$r^2 = (c + y)^2 + (b - x)^2,$$

woraus, weil $r^2 = b^2 + c^2$ iſt, die zweyte Gleichung zwiſchen x und y erhalten wird,

$$x^2 + y^2 - 2bx + 2cy = 0.$$

Für x ſetze man den Werth $\frac{yy}{p}$ aus der erſtern Gleichung, ſo iſt

$$y^3 - (2b - p)py + 2cp^2 = 0.$$

Eine gegebene Gleichung ſey

$$y^3 - Apy + Bp^2 = 0,$$

wo wegen der in den Coefficienten Ap, Bp^2 abgeſonderten Factoren p, p^2 die andern Factoren A, B Linien

ſind. Wird p = 1 geſetzt; ſo ſind A, B, die vollſtändigen numeriſchen Coefficienten. Den Parameter p kann man willkührlich annehmen, da hier nur zwey Gleichungen durch die Coefficienten zur Beſtimmung der drey Größen b, c, p, gegeben werden. Der Parameter dient als Maaßſtab, die andern Größen zu beſtimmen. Seine eigene Quantität iſt, wie überhaupt die Maaß-Einheit, willkührlich.

Die Zuſammenhaltung der Normal-Gleichung mit der gegebenen giebt $b = \frac{1}{2}(A + p)$, und $c = \frac{1}{2}B$.

Man nehme alſo in der mit dem Parameter p beſchriebenen Parabel auf der Axe von dem Scheitel an die Länge $AB = \frac{1}{2}(A + p)$, und die darauf lothrechte $BC = \frac{1}{2}B$, und beſchreibe mit dem Halbmeſſer CA einen Kreis. Schneidet dieſer die Parabel auſſer in A noch in drey Puncten, wie in M, m, N, ſo hat die Gleichung drey mögliche Wurzeln, welche durch die Ordinaten MP, mp, NQ dargeſtellt werden. Die Ordinaten, welche die Lage, wie PM haben, ſind poſitive Wurzeln, diejenigen, welche eine dieſer entgegengeſetzte Lage haben, wie QN, ſind negative Wurzeln. Denn wenn man in der Rechnung den Durchſchnittspunct N ſtatt M genommen hätte, ſo wäre die Gleichung folgende:

$$y^3 - (2b - p)py - 2cp^2 = 0.$$

Dieſe hat dieſelben Wurzeln als jene in Rückſicht der Quantität, aber von entgegengeſetzter Beſchaffenheit. Ihre poſitiven Wurzeln ſind alſo die Ordinaten, welche wie QN liegen; ihre negativen diejenigen, welche die Lage wie PM haben.

Hat die gegebene Gleichung zwey gleiche Wurzeln, ſo berührt der Kreis die Parabel in einem Puncte, welcher nun für zwey Puncte, die darin zuſammenfallen, gilt, ſo wie die beiden gleichen Wurzeln in der Aufzählung der Wurzeln der Gleichung für zwey gerechnet werden. Schneidet der Kreis die Parabel nur in einem einzigen Puncte, auſſer dem Puncte A, ohne ſie irgend wo zu be-

rühren, ſo hat die Gleichung nur eine einzige mögliche Wurzel.

Wenn A in der Gleichung das Vorzeichen +, und B das − hat, ſo iſt jenes und dieſes negativ. Ein negatives B macht c negativ, daher BC nach der andern Seite der Axe hin genommen wird. Ein negatives b wird in einer derjenigen Lage entgegengeſetzten genommen, welche AB in der Figur hat. Die Lage von AB und BC in der Figur gilt für poſitive Werthe dieſer Linien.

Es entſteht hier eine Frage, die der Mühe werth iſt ſie zu beantworten, nämlich was für eine Linie der Ort ſey, in welchem die Mittelpuncte der die Parabel irgendwo berührenden Kreiſe liegen, die zugleich durch den Scheitelpunct A gehen.

Man ſetze die beiden gleichen Wurzeln einer cubiſchen Gleichung, worin das zweyte Glied fehlt, jede $= \alpha$, die dritte $= \beta$, beiderſeits nach der abſoluten Größe genommen. Sind jene poſitiv, ſo iſt dieſe negativ, da ihr Aggregat, wegen des fehlenden zweyten Gliedes, Null iſt. Nun iſt jeder Werth der Gleichung ein Product aus den Factoren $(y - \alpha)^2$ und $(y + \beta)$, (ſ. Gleichung III. 10). Alſo iſt, wenn y irgend eine der Wurzeln bedeutet, $(y - \alpha)^2 (y + \beta) = 0$, das iſt

$$y^3 - (2\alpha - \beta) y^2 + (\alpha^2 - 2\alpha\beta) y + \alpha^2\beta = 0.$$

Die Zuſammenhaltung mit der Gleichung
$y^3 - (2b - p) py + 2cp^2 = 0$
giebt I. $2\alpha - \beta = 0$. II. $\alpha^2 - 2\alpha\beta = (p - 2b)p$; III. $\alpha^2\beta = 2cp^2$. Schafft man mittelſt der erſten Gleichung aus den beiden andern β weg, ſo erhält man IV. $(3\alpha^2 = 2b - p)p$; V. $\alpha^3 = cp^2$. Daraus iſt

VI. $\alpha = \frac{3cp}{2b - p}$, und VII. $\alpha^2 = \frac{9c^2p^2}{(2b - p)^2}$. Aus IV. und VII. folgt VIII. $27c^2p = (2b - p)^3$, oder

$$\frac{27}{8} pc^2 = (b - \tfrac{1}{2}p)^3.$$

Dieſes iſt die Gleichung für die ſemicubiſche oder Neiliſche Parabel, in welcher b — $\frac{1}{2}$p und c die Coordinaten für den Anfang der Abſciſſen D ſind. Sie iſt in Fig. 24. Tab. II. mit ihren beiden unendlichen Zweigen DE, De gezeichnet. Die zugehörige Parabel iſt GAg, die Axe derſelben und der Paraboloide EDe iſt AX; der Brennpunct der Parabel F; der Abſtand AF = $\frac{1}{4}$ p, und der Abſtand AD der Spitze der Paraboloide von dem Scheitel der Parabel AD = $\frac{1}{2}$ p. Die rechtwinklichten Coordinaten an der Paraboloide seyn AT = t; TU = u. Dieſe ſetze man ſtatt b und c in der gefundenen Gleichung für dieſe beiden Größen, ſo iſt die Gleichung für den verlangten Ort, $27\,pu^2 = 8\,(t - \frac{1}{2}p)^3$. Ein Kreis aus einem Puncte U als Mittelpuncte durch den Scheitel A beſchrieben, berührt die Parabel irgendwo in M. Nimmt man den Mittelpunct eines Kreiſes durch A innerhalb des Raumes EDe, ſo ſchneidet derſelbe die Parabel auſſer dem Puncte A noch dreymahl; nimmt man ihn auſſerhalb dieſes Raumes, ſo ſchneidet der Kreis die Parabel auſſer in A nur noch einmahl.

Denn in D iſt t = $\frac{1}{2}$p, das iſt dem Halbmeſſer des Krümmungskreiſes der Parabel im Scheitel, (ſ. Krümmungskreis §. 12.). Daher geht ein Kreis, der aus einem entferntern Puncte der Axe wie T durch A beſchrieben wird, auſſerhalb der Parabel weg, begegnet ihr aber wieder in einem Puncte auf jedem ihrer beiden Zweige. Der Kreis aus einem Puncte U der Paraboloide durch A beſchrieben, ſchneidet die Parabel in A, und liegt von A bis M innerhalb derſelben, da er den Zweig in M berührt. Folglich muß ein Kreis, der aus einem Puncte von TU zwiſchen T und U durch A beſchrieben wird, den Zweig AG zweymahl treffen, auf der einen und auf der andern Seite von M, dagegen ein Kreis aus einem von T entferntern Puncte als U auf TU den Zweig AG nicht treffen wird. Nämlich die berührende an dem erſtern dieſer Kreiſe in A liegt zwiſchen den berührenden an der Parabel und dem Kreisbogen AM in demſelben Puncte A. Der Kreis geht daher zwiſchen beiden durch, und trifft den, mit UM be-

ſchriebenen zum zweytenmahle in dem Durchſchnitte mit der Abſciſſenlinie AX.

Die Gleichung $y^3 - Apy + Bp^2 = 0$ hat alſo drey mögliche Wurzeln, wenn $27pc^2 < (2b - p)^3$; zwey gleiche, wenn $27pc^2 = (2b - p)^3$; zwey unmögliche, wenn $27pc^2 > (2b - p)^3$ iſt. Setzt man für b und c ihre vorher gefundenen Werthe, welche ſie dieſer Gleichuug gemäß haben, ſo iſt die Bedingung für die Möglichkeit aller drey Wurzeln, daß $\frac{27p}{4}B^2 < A^3$ ſey. Oder wenn $p = 1$ genommen wird, damit A und B die numeriſchen Coefficienten bedeuten können, ſo hat die Gleichung $y^3 - Ay + B = 0$ drey mögliche Wurzeln, oder zwey gleiche, oder zwey unmögliche, nachdem $27B^2$ kleiner, ſo groß oder größer als $4A^3$ iſt. Dieſes ſtimmt mit dem überein, was in dem Artikel, Gleichung III. 13. auf einem andern Wege gefunden wird.

Die Evolute der Parabel iſt auch eine ſemicubiſche Parabel, aber darin von dem hier gefundenen Orte der Mittelpuncte der berührenden Kreiſe verſchieden, daß ihre Gleichung iſt, $27pu^2 = 16(t - \frac{1}{2}p)^3$. Beide unterſcheiden ſich nur in ihren Parametern.

III. Conſtruction biquadratiſcher Gleichungen und vollſtändiger cubiſcher.

Es ſey MAN (Fig. 25. Tab. II.) eine Parabel, deren Axe AQ und Scheitel A iſt. Mit der Axe parallel in dem Abſtande DE iſt die Abſciſſenlinie DX gezogen, auf welcher der Anfang der Abſciſſen in der Parabel in D genommen werde. Ein Kreis aus C beſchrieben ſchneide die Parabel in den Puncten M, m, N, n, von welchen Durchſchnittspuncten in andern Fällen zwey wegfallen mögen, ſo wie auch gar keiner Statt haben mag. Von dem Mittelpuncte des Kreiſes C iſt CB ſenkrecht auf DX gezogen, von dem einen Durchſchnittspuncte des Kreiſes mit

der Parabel eben ſo MP, und MV von M auf die verlängerte BC.

Der Parameter der Parabel iſt = p; der Halbmeſſer des Kreiſes = r; der Abſtand der Abſciſſenlinie von der Axe DE = a; der Abſtand des Mittelpunctes des Kreiſes von der Abſciſſenlinie, CB = c; und DB = b. Die Coordinaten ſeyn DP = x; PM = y. Die Ordinate PM treffe die Axe in R.

Für die Parabel iſt die Gleichung

$$p\left(\frac{a^2}{p} + x\right) = (y - a)^2,$$

weil $DE^2 = p.AE$. Die Entwickelung dieſer Formel giebt

$$\text{I. } px = y^2 - 2ay.$$

An dem Kreiſe iſt

$$\text{II. } r^2 = (y - c)^2 + (x - b)^2.$$

Setzt man in dieſer Gleichung für x ſeinen Werth, ſo iſt

$$\text{III. } r^2 = (y - c)^2 + \left(\frac{yy}{p} - \frac{2ay}{p} - b\right)^2$$

Dieſe mit p^2 multiplicirt, und entwickelt, wird

$$\text{IV. } y^4 - 4ay^3 + \begin{matrix} 4a^2y^2 \\ -2bp \\ +p^2 \end{matrix} + \begin{matrix} 4abpy \\ -2cp^2 \end{matrix} + \begin{matrix} b^2p^2 \\ +c^2p^2 \\ -r^2p^2 \end{matrix} = 0,$$

Mit dieſer Gleichung vergleiche man eine gegebene biquadratiſche,

$$y^4 - Ay^3 + Bpy^2 + Cp^2y - Dp^3 = 0.$$

Beide Gleichungen ſind als Normal-Gleichungen anzuſehen; alle Größen ſind in ihnen poſitiv, oder bloß der Quantität nach zu nehmen. Ändern dieſe in andern Fällen ihre Vorzeichen, ſo ſind ſie negativ, und wenn ſie negativ werden, bekommen ſie eine entgegengeſetzte Lage in Beziehung auf diejenige, welche ſie in der Figur haben.

Die Zuſammenhaltung beider Gleichungen giebt
I. $4a = A$; II. $4a^2 - 2bp + p^2 = Bp$;
III. $4ab - 2cp = Cp$; IV. $r^2 - b^2 - c^2 = Dp$.

Daraus wird erhalten

$$a = \tfrac{1}{4} A$$

$$b = \frac{2aa}{p} + \tfrac{1}{2} p - \tfrac{1}{2} B$$

$$c = \frac{2ab}{p} - \tfrac{1}{2} C$$

$$r^2 = b^2 + c^2 + Dp$$

Der Terminus $\frac{2aa}{p}$ iſt $= 2AE$; ferner iſt $\frac{2ab}{p}$ die vierte Proportional-Linie zu p, a, 2b; und Dp iſt das Quadrat der mittlern Proportional-Linie zwiſchen D und p.

Mit einem willkührlichen Parameter zeichne man eine Parabel MAN, und ziehe in dem Abſtande $DE = \tfrac{1}{4} A$ mit der Axe derſelben die Parallele DX, wie in der Figur, wenn A poſitiv iſt, das iſt, das Vorzeichen — hat. Von dem Puncte D, wo ſie die Parabel trifft, ziehe man DE ſenkrecht auf die Axe, nehme von E aus $EF = \tfrac{1}{2} p$, und von F aus $FG = 2AE \left(= \frac{2aa}{p}\right)$, dann von G rückwärts $GH = \tfrac{1}{2} B$, wenn B poſitiv iſt. So iſt $EH = b$, das iſt $DB = b$, wenn HB ſenkrecht auf DX iſt. Dann ziehe man durch D und F eine gerade Linie, welche die verlängerte BH in J ſchneide, ſo iſt $BJ = \frac{2ab}{p}$, da $EF : ED = DB : BJ$ iſt. Auf BJ nehme man $JC = \tfrac{1}{2} C$ nach B hin, wenn C poſitiv iſt, ſo iſt C der Mittelpunct des zu beſchreibenden Kreiſes, deſſen Halbmeſſer noch zu finden iſt. Man ſuche zuerſt die Linie, deren Quadrat dem Rechtecke von D und p oder dem Producte Dp gleich iſt.

Iſt D poſitiv, ſo zeichne man ein rechtwinklichtes Dreyeck CDK (Fig. 26. Tab. II.), worin die Kathete $DC = \sqrt{(b^2 + c^2)}$, und die ander Kathete DK der Seite jenes Quadrats gleich iſt; die Hypotenuſe CK iſt der geſuchte Halbmeſſer. Iſt aber D negativ, ſo beſchreibe man über DC einen Halbkreis, trage darin die Chorde DL gleich der Seite jenes Quadrats, und ziehe CL, ſo iſt CL der geſuchte Halbmeſſer. Das erſtere iſt der Fall mit der Normal-Gleichung, die durch unſere Figur conſtruirt wird, wenn ſie vier mögliche Wurzeln hat. Sie hat, wegen der drey Abwechslungen der Vorzeichen drey poſitive Wurzeln, nämlich die drey poſitiven Ordinaten in M, m, n, und eine negative, die Ordinate in N, (ſ. Gleichung, IV. 6.)

Mit dem gefundenen Halbmeſſer beſchreibe man nun einen Kreis, welcher die Parabel in vier verſchiedenen Puncten ſchneidet, wenn die Gleichung vier verſchiedene mögliche Wurzeln hat. Er ſchneidet ſie in zweyen, und berührt ſie in einem Puncte, wenn die Gleichung unter den vier möglichen Wurzeln zwey gleiche hat. Er ſchneidet ſie in nicht mehr als zwey Puncten, wenn die Gleichung nur zwey mögliche verſchiedene Wurzeln hat, und berührt ſie in einem einzigen, wenn die beiden einzigen möglichen ſich gleich ſind. Schneidet der Kreis die Parabel gar nicht, ſo hat die Gleichung gar keine mögliche Wurzel. Iſt D negativ, und Dp größer als $b^2 + c^2$, ſo iſt r^2 negativ, welches ſogleich, ohne Conſtruction, zu erkennen giebt, daß die Gleichung keine mögliche Wurzeln habe. Segner hat ſich geirrt, da er in den Elem. Anal. finit. pag. 475. ſagt, daß man r immer möglich machen könne, weil man die Einheit nach Gefallen annehmen, und dadurch b^2 immer groß genug machen möge. Die Einheit iſt durch den Parameter, den er = 1 ſetzt, beſtimmt. — In dem Falle, da eine Gleichung drey gleiche Wurzeln hat, giebt unſere Conſtruction ſie nur als einzeln auſſer der vierten Wurzel an. Für dieſen Fall müßte die Abſciſſenlinie gegen die Axe geneigt ſeyn, damit für den Berührungspunct und einen der

Durchſchnittspuncte die Ordinaten gleich groß ſeyn mögen.

Die für biquadratiſche Gleichungen angewieſene Conſtruction iſt auch auf vollſtändige cubiſche anwendbar. Eine ſolche ſey $y^3 - Ay^2 + By + C = 0$. Man multiplicire ſie mit y, ſo wird ſie dieſe: $y^4 - Ay^3 + By^2 + Cy = 0$, in welcher eine Wurzel $= 0$ iſt. Demnach ſetze man in der vorher behandelten biquadratiſchen Gleichung $D = 0$, ſo erhält man die veränderte cubiſche. In der Conſtruction iſt CD der Halbmeſſer, und der Kreis geht durch den Anfang der Abſciſſen, ſo daß die Ordinate in dieſem Puncte die hinzugefügte Wurzel $y = 0$ bedeutet.

Bakers Centralregel iſt im Weſentlichen das für die biquadratiſchen Gleichungen hier gewieſene Verfahren; allein die Vorſchriften wegen der Lage der Linien erfordern zu viele Aufmerkſamkeit, um ſich nicht zu irren, weil es an einer beſtimmten Regel fehlt, was poſitiv, und was negativ ſeyn ſoll. Die Regel trifft man in Tob. Mayers mathematiſchem Atlas, Supplement, Tab. VI. an. Man mag auch Wolfs Elementa Matheſeos, T. I. Analyſis Finit. §. 622 vergleichen. Bey dieſem Artikel ſind zwey Abhandlungen von Halley aus den Tranſactionen, die auch in der 's Graveſandſchen Ausgabe von Newtons Arithm. univ. befindlich ſind, benutzt worden. Die Regeln wegen des Poſitiven und Negativen daſelbſt ſind nicht einfach genug. Die Beweiſe der Conſtructionen ſind nicht beygefügt.

IV. Arithmetiſch-geometriſche Conſtruction der Gleichungen.

Man berechne einige Werthe einer gegebenen Gleichung für gewiſſe Werthe der unbekannten Größe, und ſetze dieſe, für eine beliebige lineariſche Einheit, als Ordinaten auf eine Abſciſſenlinie, in den Puncten, welche von dem Anfange der Abſciſſen den Abſtand haben, der in den Werthen der Gleichung für die unbekannte Größe geſetzt

iſt. Durch dieſe Puncte ziehe man aus freyer Hand eine krumme Linie mit möglichſter Beobachtung der allmähligen Krümmung, ſo erhält man an den Stellen, wo die Endpuncte der aufgetragenen Ordinaten nahe genug liegen, die krumme Linie, deren Ordinaten die Werthe der Gleichung für jede Abſciſſe darſtellen. Die Abſtände ihrer Durchſchnittspuncte mit der Abſciſſenlinie von dem Anfange der Abſciſſen geben die Wurzeln der Gleichung, deſto genauer, je vollkommner die Zeichnung iſt.

Z. B. Es iſt (Fig. 27. Tab. II.) die Abſciſſenlinie XY, und darauf der Anfang in A. Die Abſciſſen nach der rechten Hand hin bedeuten die poſitiven Werthe von x in der Gleichung für x; die nach der andern Seite hin die negativen. Man ſetze auf dieſe die zu verſchiedenen Werthen von x gehörigen Werthe der Gleichung, als in A ſelbſt den Werth Aa, oberhalb der Abſciſſenlinie, wenn der Werth poſitiv iſt, unterhalb, wenn er negativ iſt. So iſt der zu AB gehörige Werth Bb negativ, der zu AC gehörige Cc poſitiv. Nach Beſchaffenheit der Umſtände hat man mehr oder weniger Werthe der Gleichung zu berechnen und aufzutragen. Die durch die gefundenen Puncte gezogene krumme Linie ſchneide die Abſciſſenlinie in M, N, P, ſo ſind AM und AN poſitive Wurzeln der Gleichung, und AP eine negative. Iſt die Gleichung eine cubiſche, ſo ſind nicht mehr Durchſchnitte möglich, und die krumme Linie erſtreckt ſich mit zwey Zweigen NQ, PR ins Unendliche auf beiden Seiten der Abſciſſenlinie nach entgegengeſetzten Gegenden fort. Letzteres iſt der Fall bey allen Gleichungen von einem ungeraden Grade. Die Anzahl der möglichen Durchſchnitte mit der Abſciſſenlinie iſt nicht größer als die Zahl, welche den Grad der Gleichung ausdrückt, kann aber kleiner ſeyn; es kann ſelbſt nur ein einziger Durchſchnitt Statt haben, wenn nämlich die Abſciſſenlinie oberhalb oder unterhalb aller Biegungen der krummen Linie liegt, oder die krumme Linie gar keine Biegung hat.

In Fig. 28. Tab. II. iſt eine Gleichung vom vierten Grade durch den Zug einer krummen Linie abgebildet.

Die Zeichnung iſt aber, ſo wie die vorhergehende, nach keiner beſtimmten Gleichung entworfen, weil die Ordinaten der krummen Linie für den Raum der Zeichnung zu groß werden würden, wenn die Wurzeln eine hinlängliche Größe erhalten. Die Abſciſſenlinie iſt XY; der Anfang der Abſciſſen iſt in A; die Durchſchnitte der krummen Linie mit der Abſciſſenlinie ſind M, N, P, Q, welche drey poſitive Wurzeln und eine negative geben. Zwiſchen den Abſciſſen, wodurch die Wurzeln der Gleichung dargeſtellt werden, liegen die Abſciſſen AB, AC, AD, deren zugehörige Ordinaten Bb, Cc, Dd größte ſind, nämlich in Beziehung auf die nächſt vorhergehenden und folgenden. Die negativen Ordinaten, welche der Quantität nach Größte ſind, heißen aber, als negative Größen, Kleinſte, weil ſie aus den vorhergehenden durch die Hinzuſetzung einer ſubtractiven Größe entſtehen, und daher in Rückſicht dieſer kleiner ſind. Die krumme Linie geht mit zwey Zweigen PS, QT nach derſelben Gegend von der Abſciſſenlinie an ins Unendliche fort, da das höchſte Glied der Gleichung für eine negative Abſciſſe poſitiv iſt, und von einem gewiſſen Werthe an ſchon allein größer bleibt als alle ſubtractiven Glieder der Gleichung zuſammen genommen. Das iſt der Fall bey allen Gleichungen von einem geraden Grade. Iſt die Ordinate Aa in dem Anfangspuncte negativ, wie in der Figur, ſo hat die Gleichung wenigſtens zwey mögliche Wurzeln, da die Abſciſſenlinie die beiden unendlichen Zweige ſchneiden muß, wenn ſie auch über allen Biegungen der krummen Linie weg geht. Iſt aber die Ordinate in A poſitiv, ſo hat die Gleichung gar keine mögliche Wurzeln, wenn die Abſciſſenlinie unterhalb aller Biegungen liegt.

Die geometriſche Abbildung der Gleichungen iſt ſehr geſchickt die Theorie derſelben auf eine ſinnliche Art zu erläutern. Wenn in der Folge der Ordinaten unter den vorhergehenden und nachfolgenden eine abſolut Kleinſte ſich findet, ſo geht daſelbſt die Abſciſſenlinie unter oder über einer Biegung weg, unter, wenn das Kleinſte poſitiv, über, wenn das Kleinſte, abſolut genommen, negativ iſt.

Man lege in Fig. 28. die Abſciſſenlinie ſo, daß ſie unter dem Puncte c und über d liege, in einer der vorigen parallelen Lage. Dadurch fallen zwey mögliche Wurzeln weg, und die Ordinate in C iſt ein poſitives Kleinſtes. Liegt die Abſciſſenlinie auch unterhalb des Punctes d, ſo ſind alle vier Wurzeln der biquadratiſchen Gleichung, welche die Zeichnung abbildet, unmöglich. Man ſieht, wie bey der parallelen Verrückung der Abſciſſenlinie, das iſt, bey einer Veränderung des abſoluten Gliedes der Gleichung, zwey ungleiche Wurzeln ſich immer näher kommen, und bey der Berührung mit der krummen Linie an dem Biegungspuncte, wie b oder c oder d, ſich gleich werden, bey weiterer Verrückung aber ſich in unmögliche verwandeln. Der Übergang von der Möglichkeit zur Unmöglichkeit geſchieht alſo hier durch die Gleichheit zweyer Wurzeln. Die Summe zweyer nächſten Wurzeln, wie AN, AP, iſt $= 2AC - CN + CP$, wenn C der zu einer größten oder kleinſten Ordinate gehörige Punct der Abſciſſe iſt. Der Theil AC hängt nicht von dem abſoluten Gliede der Gleichung ($= Aa$) ab, oder wenn dieſes in den irrationalen Theilen von AC enthalten iſt, muß es bey der Entwickelung herausgehen. Aber CN und CP hängen von dem abſoluten Gliede ab, ſo daß ſie Null ſind, wenn die Abſciſſenlinie durch c geht.

Die krumme Linie, welche eine Gleichung vom nten Grade abbildet, kann $n - 1$ Biegungen, nicht mehrere, haben. Es können aber eine oder mehrere Biegungen wegfallen. Wenn z. B. in Fig. 28. die poſitiven Ordinaten von M an beſtändig zunehmen, ſo behält die krumme Linie nur eine einzige Biegung, und iſt parabelförmig. Die zu der Linie gehörige Gleichung kann gar nicht mehr als zwey Wurzeln haben, wie auch das abſolute Glied verändert werden mag. Wenn die Biegung NcP wegfällt, ſo wird AC eine unmögliche Größe. Eine Linie zu einer Gleichung eines ungeraden Grades kann alle Biegungen verlieren, und mit zwey Zweigen, die entgegengeſetzte Krümmung haben, (der eine concav, der andere nach derſelben Gegend convex,) ins Unendliche hin ſich erſtrecken.

Die Gleichung kann alsdann nicht mehr als eine einzige Wurzel haben. Mit jeder wegfallenden Biegung fallen zwey Durchſchnitte mit der Abſciſſenlinie weg, daher die Anzahl der unmöglichen Wurzeln einer Gleichung immer gerade iſt.

Man kann die lineariſchen Werthe einer Gleichung auch durch eine Conſtruction finden, welches an dem Beyſpiele einer cubiſchen Gleichung gezeigt werden wird. Dieſe ſey $\frac{ax^3}{p^3} + \frac{bx^2}{p^2} + \frac{cx}{p} + d = 0$, wo p der Parameter der krummen Linie heißen mag. Die Größen a, b, c, d ſind Linien, wie p und x. Setzt man $p = 1$ ſo werden die übrigen Linien Zahlen, und zwar die Exponenten des Verhältniſſes des Parameters zu ihnen. Man zeichne (Fig. 29. Tab. II.) ein Rechteck AEFK, woran die Grundlinie $EK = p$, und die Seite $AE = a + b + c + d$ iſt, nämlich $AB = a$; $BC = b$; $CD = c$; $De = d$. Man nehme auf der Grundlinie das Stück $ET = x$, und ziehe TP parallel mit AE. Nun ziehe man BF, und durch ihren Durchſchnittspunct Q auf PT die mit EK parallele Gg; darauf CG, welche PT in R ſchneidet, und durch R die parallele Hh mit EK; dann DH, und durch ihren mit TP gemeinſchaftlichen Punct S die mit EK parallele Ji. Dieſes geſchehen, ſo iſt

$$TS = \frac{ax^3}{p^3} + \frac{bx^2}{p^2} + \frac{cx}{p} + d,$$ als der Werth der gegebenen Gleichung für $x = ET$.

Denn es iſt $AB : Bg = p : x$, alſo $Bg = \frac{ax}{p}$.

Ferner iſt $Cg : Ch = p : x$, alſo $Ch = Cg \cdot \frac{x}{p}$

$= (CB + Bg)\frac{x}{p}$, das iſt $Ch = \frac{bx}{p} + \frac{ax^2}{p^2}$.

Noch iſt $Dh : Di = p ; x$, alſo $Di = Dh \cdot \frac{x}{p}$

$= (DC + Ch)\,\frac{x}{p}$, das iſt $Di = \frac{cx}{p} + \frac{bx^2}{p^2} + \frac{ax^3}{p^3}$. Da $TS = Ei$, und $DE = d$ iſt, ſo iſt

$$TS = d + \frac{cx}{p} + \frac{bx^2}{p^2} + \frac{ax^3}{p^3}.$$

Auf dieſe Art laſſen ſich auch die Werthe anderer Gleichungen conſtruiren. Die Methode iſt aber mühſam, weil man das Rechteck mehrmahls zeichnen muß, damit man unter den vielen Linien keinen Mißgriff thue. In der Zeichnung der Figur ſind die Coefficienten a, b, c alle kleiner als p, und $\frac{x}{p}$ iſt ein Bruch. Wäre jene und x größer als p, ſo kann die Conſtruction unbequem werden, indem TS oder der Werth der Gleichung eine beträchtliche Größe in Vergleichung mit EK erhält.

Wenn einige der Coefficienten a, b, c, d, etc. negativ ſind, ſo hat man die Theile auf AE, welche ſie darſtellen, in entgegengeſetzter Richtung, das iſt von E nach A hin, zu nehmen. Z. B. für die Gleichung $\frac{ax^3}{p^3} - \frac{bx^2}{p^2} + \frac{cx}{p} - d = 0$ hat man BC von B nach A hin, und DE von D nach A hin zu tragen. Für negative Werthe von x wird ET in der entgegengeſetzten Richtung genommen.

Man wird ſich vorſtellen können, wie zu folge dieſer Conſtruction ein Inſtrument aus einigen befeſtigten und mehrern verſchiebbaren Linealen mit Einſchnitten oder Nuthen und Stiften, zuſammen zu ſetzen ſey, das mit einer Reißſpitze in S die krumme Linie durch einen fortgehenden Zug beſchriebe. Ein ſolches Inſtrument iſt in der Encyclopédie méthodique, Mathematique, in dem Artikel, Equation, beſchrieben, und dabey auch abgebildet.

Es iſt für quadratiſche Gleichungen eingerichtet. Die Bewegungen geſchehen mittelſt gezähnter Räder, die in gezahnte Lineale eingreifen. Ein ähnliches Inſtrument hat Rowning in den Engliſchen Tranſactionen 1770 angegeben. Die Conſtrucion, worauf dieſe Inſtrumente beruhen, hat Segner in den neuern Petersburger Comment. T. VII. gelehrt, ſie auch in ſeinen Elem. Analyſeos finit. §. 705 *ſſ*. vorgetragen. Der Beweis iſt in dieſem Artikel ſehr abgekürzt. Die Inſtrumente ſind mehr ſinnreich als brauchbar.

V. Auflöſung quadratiſcher und cubiſcher Gleichungen durch die Goniometrie (trigonometriſche Formeln).

1. Die Formeln für die Sinus, Coſinus und Tangenten vielfacher Winkel durch eben ſolche Functionen des einfachen können angewandt werden, um die letztern aus den erſtern ſehr genau zu finden, da alle dieſe Functionen der Winkel in den Tafeln mit großer Genauigkeit angegeben ſind. Da aber in dieſen Formeln nur zwey Größen unbeſtimmt bleiben, der Sinus totus oder die Tangente von 45 Grad, und die Function des vielfachen Winkels, wenn die Function des einfachen geſucht wird, ſo kann man dadurch nur die Gleichungen vom zweyten und dritten Grade auflöſen, und die letztern nur, wenn das zweyte Glied darin fehlt, wodurch die zwey Coefficienten gegeben werden, welche den Sinus totus und den Sinus oder Coſinus des dreyfachen Winkels beſtimmen. Die goniometriſchen Formeln für die Functionen größerer Vielfachen eines Winkels enthalten gewiſſe Relationen der Coëfficienten, welche in einer gegebenen Gleichung ſich auch finden müſſen, wenn ſie durch die Theilung eines Winkels aufgelöſet werden ſoll.

2. Eine quadratiſche Gleichung ſey

$$x^2 - ax + b = 0,$$

worin die Größen a, b poſitiv oder abſolute, genommen werden. Die Gleichung zwiſchen dem Sinus eines Winkels und dem des doppelten iſt $\sin 2\varphi = 2 \sin\varphi . \cos\varphi$ (Goniometrie; 35). Dieſe werde quadrirt, ſo iſt

$$\sin 2\varphi^2 = 4 \sin\varphi^2 (1 - \sin\varphi^2),$$

das iſt,

$$4 \sin\varphi^4 - 4 \sin\varphi^2 + \sin 2\varphi^2 = 0 .$$

Hier bedeuten $\sin\varphi$ und $\sin 2\varphi$ die numeriſchen Sinus für den Sinus totus = 1. Für den S. totus = r, ſey der Sinus von $\varphi = y$, und der Sinus von $2\varphi = f$, ſo iſt $\sin\varphi = \frac{y}{r}$, und $\sin 2\varphi = \frac{f}{r}$, indem der Ausdruck $\sin\varphi$ ſich immer auf den Sinus totus = 1 bezieht. Es iſt nun

$$y^4 - r^2 y^2 + \tfrac{1}{4} r^2 f^2 = 0.$$

Dieſe Gleichung halte man gegen die gegebene, $x^2 - ax + b = 0$, ſo iſt $x = y^2$; $r^2 = a$; $\frac{1}{4} r^2 f^2 = b$, folglich $\frac{f}{r} = \frac{2\sqrt{b}}{a}$, das iſt, $\sin 2\varphi = \frac{2\sqrt{b}}{a}$.

Da $y = r \sin\varphi$ iſt, ſo iſt
$x = r^2 \sin\varphi^2$, oder $x = a \sin\varphi^2$.

Es gehört f auch zu dem Winkel $\pi - 2\varphi$, wo π zwey Rechte bedeutet, daher auch dieſer Winkel in zwey Theile zu theilen iſt, (Goniom. V.). Alſo iſt der zweyte Werth von $y = r \sin(\frac{1}{2}\pi - \varphi) = r \cos\varphi$, und $x = a \cos\varphi^2$.

Man ſuche alſo den Winkel 2φ, deſſen Sinus $= \frac{2\sqrt{b}}{a}$ iſt, ſo ſind die beiden Wurzeln der obigen Gleichung, $a \sin\varphi^2$ und $a \cos\varphi^2$. Die Summe derſelben iſt $= a(\sin\varphi^2 + \cos\varphi^2) = a$; ihr Product $= a^2 \sin\varphi^2 \cos\varphi^2 = \frac{1}{4} a^2 \sin 2\varphi^2 = b$, wie es ſeyn muß, (Gleichung I. 8). Es muß aber $2\sqrt{b} < a$ ſeyn, da $\sin 2\varphi < 1$ iſt, oder $b < \frac{1}{4} a^2$, wenn die

Wurzeln möglich ſeyn ſollen, einſtimmig mit (Gleichung I. 4.)

Da $a = \frac{2\sqrt{b}}{\sin 2\varphi} = \frac{\sqrt{b}}{\sin\varphi . \cos\varphi}$ (Goniom. 35), ſo ſind die beiden Wurzeln der Gleichung, $\tan\varphi . \sqrt{b}$ und $\cot\varphi . \sqrt{b}$, (eben daſ. 14.).

2. Exempel. Es ſey die Gleichung $x^2 - 64x + 720 = 0$ aufzulöſen. Es iſt

$$\begin{aligned}
\log\ b &= 2{,}8573325 \\
\log\sqrt{b} &= 1{,}4286662 \\
\log\ 2 &= 0{,}3010300 \\
-\log\ a &= -1{,}8061800 \\
\log\sin 2\varphi &= 9{,}9235162 \quad 2\varphi = 56^\circ 59' 5'' \\
& \qquad\qquad\qquad\quad \varphi = 28.29.32{,}5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log\sin\varphi &= 9{,}6785562 \\
& \quad 9{,}6785562 \\
\log a &= 1{,}8061800 \\
& \quad 1{,}1632924 \ldots \text{I. } 14{,}5644
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log\cos\varphi &= 9{,}9439300 \\
& \quad 9{,}9439300 \\
\log a &= 1{,}8061800 \\
& \quad 1{,}6940400 \ldots \text{II. } 49{,}4356
\end{aligned}$$

Die Summe der beiden Wurzeln iſt = 64; ihr Product, wie durch die Addition ihrer Logarithmen gleich erhellt, iſt = 720.

Nach der zweyten Form der Wurzeln iſt

$\log tg\varphi = 9{,}7346263$	$\log\cot\varphi = 0{,}2653737$
$\log\sqrt{b} = 1{,}4286662$	$\log\sqrt{b} = 1{,}4286662$
$\log. \text{I.} = 1{,}1632925$	$\log \text{II.} = 1{,}6940399$

3. Die quadratiſche Gleichung ſey

$$x^2 + ax - b = 0.$$

Dieſe läßt ſich nicht durch Hülfe des Sinus auflöſen, weil der Sinus des Winkels 2φ für ſie unmöglich wird. Man nehme aber die Formel 46 der Goniometrie

$$\tan 2\varphi = \frac{2 \tan\varphi}{1 - \tan\varphi^2},$$

und ſetze $\tan\varphi = \frac{t}{r}$, $\tan 2\varphi = \frac{f}{r}$, ſo iſt

$$t^2 + \frac{2r^2}{f} t - r^2 = 0.$$

Hält man dieſe Gleichung gegen die für x, ſo iſt $t = x$; $\frac{2r^2}{f} = a$; $r^2 = b$, alſo $\tan 2\varphi = \frac{2\sqrt{b}}{a}$, und $x = \tan\varphi . \sqrt{b}$.

In dieſem Ausdrucke liegt ein doppelter Werth. Iſt 2φ der kleinſte Winkel zu der Tangente f, ſo gehört dieſelbe Tangente auch zu $\pi + 2\varphi$ (Goniom. 8.), und es iſt x ſowohl $\tan \frac{1}{2}(\pi + 2\varphi) . \sqrt{b}$ als $\tan\varphi . \sqrt{b}$. Es iſt aber $\tan \frac{1}{2}(\pi + 2\varphi) = - \tan(\frac{1}{2}\pi - \varphi) = - \cot\varphi$. Demnach iſt, wenn $\tan 2\varphi = \frac{2\sqrt{b}}{a}$ genommen wird,

$x = \tan\varphi . \sqrt{b}$, und $x = - \cot\varphi . \sqrt{b}$.

Die Summe von den entgegengeſetzten dieſer Wurzeln iſt $= (\cot\varphi - \tan\varphi)\sqrt{b}$, das iſt (Goniom. 45) $= 2 \cot 2\varphi . \sqrt{b} = \frac{2\sqrt{b}}{\tan 2\varphi} = a$, wie es ſeyn muß (Gleichung I. 8). Das Product iſt $=$
$- \tan\varphi . \cot\varphi . \sqrt{b} . \sqrt{b} = - b$.

4. Die Gleichung $x^2 - ax - b = 0$ hat dieſelben Wurzeln der Quantität nach mit der Gleichung $x^2 + ax - b = 0$, aber entgegengeſetzt. Setzt man demnach

$\tang 2\varphi = \frac{2\sqrt{b}}{a}$, ſo iſt $x = + \cot\varphi . \sqrt{b}$, und $x = - \tang\varphi . \sqrt{b}$.

5. Die Auflöſungen der beiden Fälle einer quadratiſchen Gleichung haben etwas übereinſtimmendes und auch verſchiedenes. Für die Gleichung $x^2 - ax + b = 0$ wird $\sin 2\varphi = \frac{2\sqrt{b}}{a}$ geſetzt, und die beiden Wurzeln ſind $+ \tang\varphi . \sqrt{b}$ und $+ \cot\varphi . \sqrt{b}$. Für die Gleichung $x^2 + ax - b = 0$ wird $\tang 2\varphi = \frac{2\sqrt{b}}{a}$ genommen, und die beiden Wurzeln ſind $+ \tang\varphi . \sqrt{b}$, und $- \cot\varphi . \sqrt{b}$.

6. Für den Sinus eines dreyfachen Winkels iſt die Formel (Goniometrie IV.)

$$\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin\varphi^3.$$

Es ſey $\sin\varphi = \frac{x}{r}$, und $\sin 3\varphi = \frac{f}{r}$, ſo iſt

$$x^3 - \tfrac{3}{4} r^2 x + \tfrac{1}{4} r^2 f = 0.$$

Hiegegen halte man eine gegebene cubiſche Gleichung, worin das zweyte Glied fehlt,

$$x^3 - bx + c = 0,$$

ſo iſt $\frac{3}{4} r^2 = b$; $\frac{1}{4} r^2 f = c$, alſo $r = \sqrt{\frac{4b}{3}}$, und $\sin 3\varphi = \frac{3c}{2b}\sqrt{\frac{3}{b}} = \sqrt{\frac{27c^2}{4b^3}}$. Damit dieſer Sinus möglich ſey, muß $27c^2 < 4b^3$ ſeyn, welches die Bedingung der Möglichkeit aller drey Wurzeln iſt, (Gleichung III. 13.). Auch darf b nicht negativ ſeyn, oder in der Gleichung das Vorzeichen + haben, da der Halbmeſſer $r = 2\sqrt{\frac{b}{3}}$ iſt.

Iſt $\sin 3\varphi$ und daraus φ durch die Formel,

$$\sin 3\varphi = \sqrt{\frac{27c^2}{4b^3}} = \frac{c\sqrt{6,75}}{b\sqrt{b}}$$ gefunden, ſo iſt

$$x = r\sin\varphi = \sin\varphi.\sqrt{\frac{4b}{3}}.$$

In dieſem Ausdrucke ſind drey verſchiedene Werthe enthalten, nämlich $+ r\sin\varphi$; $+ r\sin(\frac{1}{3}\pi - \varphi)$; $- r\sin(\frac{1}{3}\pi + \varphi)$, nach Goniometrie. V.

7. Die gegebene Gleichung ſey $x^3 - bx - c = 0$. Für dieſe iſt $\sin 3\varphi$ negativ, das iſt, der Winkel 3φ iſt größer als zwey Rechte. Man ſetze $3\varphi = \pi + 3\omega$, ſo ſind die drey Wurzeln, $+ r\sin(\frac{1}{3}\pi + \omega)$; $- r\sin\omega$; $- r\sin(\frac{1}{3}\pi - \omega)$, weil $\sin(\frac{2}{3}\pi + \omega) = \sin(\frac{1}{3}\pi - \omega)$ iſt. Dieſe Werthe entſtehen aus den vorigen, wenn φ mit $-\omega$ vertauſcht wird.

8. Man kann für dieſen Fall ſich auch der Coſinus bedienen. Es iſt (Goniom. IV.)

$$\operatorname{coſ} 3\varphi = 4\operatorname{coſ}\varphi^3 - 3\operatorname{coſ}\varphi$$

Man ſetze $\operatorname{coſ}\varphi = \frac{x}{r}$, und $\operatorname{coſ} 3\varphi = \frac{g}{r}$ ſo iſt

$$x^3 - \tfrac{3}{4}r^2 x - \tfrac{1}{4}r^2 g = 0.$$

Die Vergleichung mit

$$x^3 - bx - c = 0$$

giebt $\frac{3}{4}r^2 = b$; $\frac{1}{4}r^2 g = c$, alſo $r = \sqrt{\frac{4b}{3}}$,

$$\operatorname{coſ} 3\varphi = \frac{3c}{2b}\sqrt{\frac{3}{b}} = \sqrt{\frac{27c^2}{4b^3}}.$$

Auch hier muß $27c^2 < 4b^3$ und b poſitiv ſeyn. Iſt dieſes, ſo ſind die drey Wurzeln der Gleichung, $r\operatorname{coſ}\varphi$; $r\operatorname{coſ}(\frac{2}{3}\pi - \varphi)$; $r\operatorname{coſ}(\frac{2}{3}\pi + \varphi)$. Die beiden letztern ſind negativ, weil die Winkel größer als ein Rechter ſind, da 3φ kleiner als 90 Gr., und φ kleiner als 30 Gr. iſt.

9. **Exempel.** Es ſey $x^3 - 2100x + 24000 = 0$. Hier iſt $b = 2100$; $c = 24000$. Die drey Wurzeln ſeyn x', x'', x'''.

$\log c = 4{,}3802112$		$l.\,b = 3{,}3222193$	
$\frac{1}{2} l.\,6{,}75 = 0{,}4146519$		$\frac{1}{2} l.\,b = 1{,}6611096$	
$4{,}7948631$		$l.\,b\sqrt{b} = 4{,}9833289$	
$4{,}9833289$			
$l.\sin 3\varphi = 9{,}8115342$		$3\varphi = 40^\circ 23' 11''$	
$l.\,b = 3{,}3222193$		$\varphi = 13.\ 27.\ 43''\frac{2}{3}$	
$l.\,0{,}75 = 9{,}8750613$		$\frac{1}{3}\pi - \varphi = 46.\ 32.\ 16\ \frac{1}{3}$	
$l.\,r^2 = 3{,}4471580$		$\frac{1}{3}\pi + \varphi = 73.\ 27.\ 43\ \frac{2}{3}$	
$l.\,r = 1{,}7235790$			
$l.\sin\varphi = 9{,}3669878$			
$l.\,x' = 1{,}0905668$		$x' = 12{,}31875$	

$l.\sin(\frac{1}{3}\pi - \varphi) = 9{,}8608344$

$l.\,x'' = 1{,}5844134 \qquad x'' = +\,38{,}40726$

$l.\sin(\frac{1}{3}\pi + \varphi) = 9{,}9816518$

$l.\,x''' = 1{,}7052308 \qquad x''' = -\,50{,}72602$

Die Summe der beiden poſitiven Wurzeln iſt = 50, 72601, der negativen ſehr genau gleich. Die Summe der Logarithmen aller drey Wurzeln iſt = 4,3802110, welcher von dem log. c faſt gar nicht abweicht. Zur Sicherheit der Berechnung iſt dieſe Probe rathſam. Sie beruht auf (Gleichung III. 5.).

In dem Artikel, Cardaniſche Regel, wird die hier zum Beyſpiel gebrauchte Gleichung auf eine andere Art aufgelöſet, die aber mühſamer iſt.

10. In der Gleichung $x^3 - bx - c = 0$ ſey $27c^2 > 4b^3$, ſo iſt nur eine mögliche Wurzel vorhanden. Man ſetze $x = r(\tang\varphi + \cot\varphi)$ ſo iſt

$x^3 = r^3(\mathrm{tg}\,\varphi^3 + 3\,\mathrm{tg}\,\varphi^2\cot\varphi + 3\,\mathrm{tg}\,\varphi\cot\varphi^2 + \cot\varphi^3)$,

Weil $\cot\varphi = \frac{1}{\tang\varphi}$, ſo iſt

$x^3 = r^3 (tg\,\varphi^3 + 3\,tg\,\varphi + 3\cot\varphi + \cot\varphi^3)$, das iſt

$$x^3 - 3r^2 x - r^3 (tg\,\varphi^3 + \cot\varphi^3) = 0.$$

Die Zuſammenhaltung mit der Gleichung

$x^3 - bx - c = 0$

giebt $3r^2 = b$, und $r^3 (tg\,\varphi^3 + \cot\varphi^3) = c$; alſo

$r = \sqrt{\frac{b}{3}}$, und $tg\,\varphi^3 + \cot\varphi^3 = \frac{3c}{b}\sqrt{\frac{3}{b}}$.

Da $tg\,\varphi^3 . \cot\varphi^3 = 1$, ſo iſt die Summe und das Product der beyden unbekannten gegeben, und es iſt

$tang\,\varphi^3 = \frac{3c}{2b}\sqrt{\frac{3}{b}} \pm \sqrt{\left(\frac{27c^2}{4b^3} - 1\right)}$ zu folge (Gleichung I. 1.) wo die Bedingung, daß $27c^2 > 4b^3$ ſey, der Annahme gemäß iſt. Man ſetze $\frac{3c}{2b}\sqrt{\frac{3}{b}} = \sec A$;

ſo iſt $tang\,\varphi^3 = \sec A + tang\,A = tang\,(45^\circ \pm \frac{1}{2} A)$, (Goniometrie, II. 43). Nimmt man das eine Vorzeichen für $tang\,\varphi^3$, ſo gilt das andere für $\cot\varphi^3$.

Man ſetze $\sqrt[3]{tang\,(45^\circ \pm \frac{1}{2}\,tang\,A)} = B$, ſo iſt $x = r\,(tang\,B + \cot B)$, das iſt $x = 2r\,coſec\,2B$ (Goniom. II. 45.), oder $x = coſec\,2B\sqrt{\frac{4b}{3}}$, oder auch

$$x = \frac{1}{\sin 2B}\sqrt{\frac{4b}{3}}.$$

11. **Exempel.** Die Gleichung ſey

$$x^3 - 13{,}3592\,x - 24{,}6377 = 0.$$

Hier iſt $b = 13{,}3592$; $c = 24{,}6377$, und die Berechnung, wie folget.

$\log c$	$= 1{,}3916001$	$l.\ b$	$= 1{,}1257804$
$\frac{1}{2}\ l.\ 6{,}75$	$= 0{,}4146519$	$\frac{1}{2}\ l.\ b$	$= 0{,}5628902$
	$1{,}8062520$	$l\, b\sqrt{b}$	$= 1{,}6886706$
	$1{,}6886706$	$l.\ 4:3$	$= 0{,}1249387$
$l.\ \sec A$	$= 0{,}1175814$	$l.\ 4b:3$	$= 1{,}2507191$
$l.\ tg(45^\circ - \frac{1}{2}A)$	$= 9{,}6658245$	$\frac{1}{2}\ l.\ 4b:3$	$= 0{,}6253595$
$l.\ tg\, B$	$= 9{,}8886082$	A	$= 40^\circ 17' 15''$
$l.\ \mathrm{coſec}\ 2B$	$= 0{,}0141315$	$\frac{1}{2}A$	$= 20.\ 8.\ 37$
$\frac{1}{2}\ l.\ 4b:3$	$= 0{,}6253595$	$45^\circ - \frac{1}{2}A$	$= 24.51.23$
$l.\ x$	$= 0{,}6394910$	B	$= 37.43.53$
		$2B$	$= 75.27.46$
		x	$= 4{,}36004$

In dem Artikel, Cardaniſche Regel, iſt dieſe Gleichung unmittelbar nach jener Regel aufgelöſet.

12. Die Gleichung $x^3 - bx + c = 0$ hat dieſelbe einzige Wurzel, welche $x^3 - bx - c = 0$ hat, aber entgegengeſetzt oder negativ.

13. Die Gleichung $x^3 + bx - c = 0$ hat nur eine einzige mögliche Wurzel, wie auch b und c ſich gegen einander verhalten mögen. Man ſetze $x = r(\tang\varphi - \cot\varphi)$, ſo iſt $x^3 + 3r^2 x - r^3(\tang\varphi^3 - \cot\varphi^3) = 0$. Nun iſt $3r^2 = b$, und $r^3(\tang\varphi^3 - \cot\varphi^3) = c$, alſo $r = \sqrt{\frac{b}{3}}$, und $\tang\varphi^3 = \frac{3c}{b}\sqrt{\frac{3}{b}}$. Hier iſt der Unterſchied zweyer unbekannten Größen gegeben, deren Product $= 1$ iſt. Der Unterſchied heiße der Kürze wegen d, ſo iſt $\tang\varphi^3 = \sqrt{(\frac{1}{4}d^2 + 1)} + \frac{1}{2}d$, und $\cot\varphi^3 = \sqrt{(\frac{1}{4}d^2 + 1)} - \frac{1}{2}d$. (Gleichung I. 2). Man ſetze $\frac{1}{2}d = (\tang A$, ſo iſt $\sqrt{(\frac{1}{4}d^2 + 1)} = \sec A$, und $\tang\varphi^3 = \sec A + \tang A = \tang(45^\circ + \frac{1}{2}A)$, ſo wie $\cot\varphi^3 = \sec A - \tang A = \tang(45^\circ - \frac{1}{2}A)$.

Ferner ſetze man

$\sqrt[3]{\tang (45^\circ - \frac{1}{2} A)} = \tang B$, ſo iſt

$\sqrt[3]{\tang (45^\circ + \frac{1}{2} A)} = \cot B$, und daher

$x = r (\cot B - \tang B)$, oder $x = 2 r \cot 2 B$.

Die Regel der Auflöſung iſt demnach: man ſuche

$\tang A = \frac{3c}{2b} \sqrt{\frac{3}{b}}$, und $\tang B = \sqrt[3]{\tang (45^\circ - \frac{1}{2} A)}$,

ſo iſt $x = 2 \cot 2 B . \sqrt{\frac{b}{3}}$.

14. Wenn man für die Sinus und Coſinus der Sectoren einer gleichſeitigen Hyperbel ſolche Tafeln hätte, wie für die Sinus und Coſinus der Kreisſectoren durch die Sinus und Coſinus ihrer Bogen, ſo könnte man die cubiſchen Gleichungen mit einer einzigen möglichen Wurzel eben ſo bequem auflöſen, als die mit drey Wurzeln mittelſt der trigonometriſchen Tafeln. Denn wenn a die halbe Axe der gleichſeitigen Hyperbel, x der Coſinus eines Sectors S, g der Coſinus des dreyfachen Sectors, in Beziehung auf a iſt, ſo iſt $x^3 - \frac{3}{4} a^2 x - \frac{1}{4} a^2 g = 0$, (Goniom. VIII.). Die gegebene Gleichung ſey $x^3 - bx - c = 0$, ſo giebt die Vergleichung $a = \sqrt{\frac{4b}{3}}$; $g = \frac{3c}{b}$. Es ſey $\frac{g}{a} = \cos \text{hyp.}\, 3 S$, und $\frac{x}{a} = \cos \text{hyp.}\, S$ für die halbe Axe $= 1$, ſo iſt $\cos \text{hyp.}\, 3 S = \frac{3c}{2b} \sqrt{\frac{3}{b}}$, und $x = \left(\sqrt{\frac{4b}{3}}\right) . \cos \text{hyp.}\, S$. Hier iſt $27 c^2 > 4 b^3$, da der hyperboliſche Coſinus größer als die halbe Axe iſt.

15. Es ſey y der hyperboliſche Sinus eines Sectors S, und f der Sinus des Sectors 3 S für die halbe Axe a, ſo iſt $y^3 + \frac{3}{4} a^2 y - \frac{1}{4} a^2 f = 0$. Die gegebene

die Linien, als Halbmeſſer oder Parameter, entweder ſehr klein nehmen muß, oder nicht Raum genug für die ganze Zeichnung hat.

Allgemein iſt das Verfahren folgendes. Man hat für die eine gewählte Linie eine Gleichung zwiſchen ihren Coordinaten x und y, für die andere eine Gleichung zwiſchen ihren Coordinaten x und z. Man ſetzt z = y, ſo hat man zwey Gleichungen zwiſchen x und y; aus welchen man durch die Wegſchaffung der x eine beſtimmte Gleichung für die gemeinſchaftlichen Ordinaten y in den Durchſchnittspuncten erhält. Dieſe Gleichung hält man gegen die gegebene, ſo laſſen ſich die zur Zeichnung der beiden Linien nöthigen unveränderlichen Größen dadurch beſtimmen. Für Gleichungen vom zweyten Grade iſt dieſes Verfahren nicht nöthig. Sie werden durch die Durchſchnitte einer geraden Linie mit einem Kreiſe conſtruirt, und der Kreis ſchneidet auf jener ſogleich die geſuchten Wurzeln von einem gegebenen Puncte an ab.

Descartes hat zuerſt die geometriſche Aufloͤſung der Gleichungen vom dritten und vierten Grade durch den Kreis und die Parabel gelehrt, in dem dritten Buche ſeiner Geometrie. Hier zeigt er auch, wie Gleichungen vom fünften und ſechſten Grade durch die Durchſchnitte eines Kreiſes mit einer paraboliſchen Conchoide, einer Linie vom dritten Grade, aufgelöſet werden. Nach ihm beſchäftigten die Mathematiker ſich viel mit der geometriſchen Auflöſung der Gleichungrn, und ſuchten die Conſtruction der Gleichungen vom dritten und vierten Grade noch auf mancherley Art abzuändern. (ſ. Algebra). Da die Geometrie von ihnen als der weſentlichſte Theil der Mathematik angeſehen ward, ſo ſuchten ſie auch arithmetiſche Aufgaben auf geometriſche Art, als welche ihnen die vollkommenſte war, aufzulöſen. Gegenwärtig, da die algebraiſche Auflöſungskunſt weiter gebracht iſt, wird die Conſtruction weniger geachtet. Sie iſt aber als eine Methode ſchätzbar, welche die Verbindung zweier unbeſtimmten Gleichungen, durch die Elimination einer der veränderlichen Gröſſen, und die Entſtehung der gegebenen beſtimmten Gleich-

ung, auf einmahl anſchaulich darſtellt. Sie dient auch zur Erläuterung der Eigenſchaften der Gleichungen.

I. Conſtruction quadratiſcher Gleichungen.

1. Aufg. Die Gleichung $x^2 - ax + bc = 0$ zu conſtruiren.

Aufl. Man ziehe (Fig. 21. Tab. I.) zwey gerade Linien AP, AQ unter einem beliebigen Winkel A, nehme auf AP die Theile AB = b; AC = c, und auf AQ den Theil AD = a. Man halbire BC in E, und AD in F, ziehe die Perpendikel EO, FO. welche ſich in O ſchneiden, beſchreibe aus O als Mittelpunct mit dem Halbmeſſer OB = OC einen Kreis, welcher auf AQ die Theile AG, AH abſchneidet, ſo ſind AG, AH die Wurzeln der Gleichung. Denn nach der Eigenſchaft des Kreiſes (ſ. Kreis), iſt $AG \times AH = AB \times AC$. Setzt man $AG = x$, ſo iſt $AH = a - x$, alſo $ax - xx = bc$, welches die gegebene Gleichung iſt. Setzt man $AH = x$, ſo iſt $HD = a - x$, das iſt $AG = a - x$, alſo gleichfalls $ax - xx = bc$.

Wenn der Kreis die Linie AQ berührt, ſo hat die Gleichung zwey gleiche Wurzeln. Trifft er ſie gar nicht, ſo ſind beide Wurzeln unmöglich.

2. Aufg. Die Gleichung $x^2 + ax - bc = 0$ zu conſtruiren

Aufl. Man ziehe (Fig. 22. Tab. I.) zwey gerade Linien unter einem beliebigen Winkel in A; nehme auf der einen AB = b, und nach der entgegengeſetzten Seite AC = c; ferner auf der andern AD = a. Nun halbire man BC in E, und AD in F, ziehe die ſenkrechten OE, OF, die ſich in O ſchneiden. Aus O beſchreibe man mit dem Halbmeſſer OB = OC einen Kreis, welcher die andere Linie in G und H ſchneidet, ſo ſind AG, AH die Wurzeln der Gleichung $x^2 + ax - bc = 0$, und zwar AG die poſitive, und AH die negative. Es iſt zufolge einer Eigenſchaft des Kreiſes $AB \times AC = AG \times AH$, woraus auf dieſelbe Art wie vorher die Gleichung folgt.

Die Gleichung $x^2 - ax - bc = 0$ wird ganz auf dieſelbe Art conſtruirt. Es iſt hier AH die poſitive Wurzel und AG die negative.

Der Kreis ſchneidet die Linie HG in allen Fällen, ſo wie die Gleichung immer zwey mögliche Wurzeln hat.

II. Conſtruction der cubiſchen Gleichungen, worin das zweyte Glied fehlt.

Es ſey AX (Fig. 23. Tab. II.) die Axe einer Parabel MAN, und C der Mittelpunct eines Kreiſes, welcher durch den Scheitelpunct der Parabel geht. Ein anderer Durchſchnittspunct ſey M. Man ziehe von C und M die ſenkrechten CB, MP auf die Axe, und die Halbmeſſer CA, CM. Es ſey $AB = b$; $BC = c$, $AC = r$, der Parameter der Parabel $= p$; die Abſciſſe $AP = x$; die Ordinate $PM = y$. Nun giebt erſtlich die Parabel die Gleichung

$$px = yy.$$

Anſtatt die Abſciſſen für den Kreis auf AX von A aus, und die Ordinaten parallel mit PM zu nehmen, nehme man die Abſciſſen auf der verlängerten CB von C aus, und die Ordinaten darauf ſenkrecht. Für den Punct M iſt die Abſciſſe $CV = c + y$, und die Ordinate $VM = b - x$, alſo

$$r^2 = (c + y)^2 + (b - x)^2,$$

woraus, weil $r^2 = b^2 + c^2$ iſt, die zweyte Gleichung zwiſchen x und y erhalten wird,

$$x^2 + y^2 - 2bx + 2cy = 0.$$

Für x ſetze man den Werth $\frac{yy}{p}$ aus der erſtern Gleichung, ſo iſt

$$y^3 - (2b - p)py + 2cp^2 = 0.$$

Eine gegebene Gleichung ſey

$$y^3 - Apy + Bp^2 = 0,$$

wo wegen der in den Coefficienten Ap, Bp^2 abgeſonderten Factoren p, p^2 die andern Factoren A, B Linien

ſind. Wird p = 1 geſetzt; ſo ſind A, B, die vollſtändigen numeriſchen Coefficienten. Den Parameter p kann man willkührlich annehmen, da hier nur zwey Gleichungen durch die Coefficienten zur Beſtimmung der drey Größen b, c, p, gegeben werden. Der Parameter dient als Maaßſtab, die andern Größen zu beſtimmen. Seine eigene Quantität iſt, wie überhaupt die Maaß-Einheit, willkührlich.

Die Zuſammenhaltung der Normal-Gleichung mit der gegebenen giebt $b = \frac{1}{2}(A + p)$, und $c = \frac{1}{2}B$.

Man nehme alſo in der mit dem Parameter p beſchriebenen Parabel auf der Axe von dem Scheitel an die Länge $AB = \frac{1}{2}(A + p)$, und die darauf lothrechte $BC = \frac{1}{2}B$, und beſchreibe mit dem Halbmeſſer CA einen Kreis. Schneidet dieſer die Parabel auſſer in A noch in drey Puncten, wie in M, m, N, ſo hat die Gleichung drey mögliche Wurzeln, welche durch die Ordinaten MP, mp, NQ dargeſtellt werden. Die Ordinaten, welche die Lage, wie PM haben, ſind poſitive Wurzeln, diejenigen, welche eine dieſer entgegengeſetzte Lage haben, wie QN, ſind negative Wurzeln. Denn wenn man in der Rechnung den Durchſchnittspunct N ſtatt M genommen hätte, ſo wäre die Gleichung folgende:

$$y^3 - (2b - p)py - 2cp^2 = 0.$$

Dieſe hat dieſelben Wurzeln als jene in Rückſicht der Quantität, aber von entgegengeſetzter Beſchaffenheit. Ihre poſitiven Wurzeln ſind alſo die Ordinaten, welche wie QN liegen; ihre negativen diejenigen, welche die Lage wie PM haben.

Hat die gegebene Gleichung zwey gleiche Wurzeln, ſo berührt der Kreis die Parabel in einem Puncte, welcher nun für zwey Puncte, die darin zuſammenfallen, gilt, ſo wie die beiden gleichen Wurzeln in der Aufzählung der Wurzeln der Gleichung für zwey gerechnet werden. Schneidet der Kreis die Parabel nur in einem einzigen Puncte, auſſer dem Puncte A, ohne ſie irgend wo zu be-

rühren, ſo hat die Gleichung nur eine einzige mögliche Wurzel.

Wenn A in der Gleichung das Vorzeichen +, und B das − hat, ſo iſt jenes und dieſes negativ. Ein negatives B macht c negativ, daher B C nach der andern Seite der Axe hin genommen wird. Ein negatives b wird in einer derjenigen Lage entgegengeſetzten genommen, welche A B in der Figur hat. Die Lage von A B und B C in der Figur gilt für poſitive Werthe dieſer Linien.

Es entſteht hier eine Frage, die der Mühe werth iſt ſie zu beantworten, nämlich was für eine Linie der Ort ſey, in welchem die Mittelpuncte der die Parabel irgendwo berührenden Kreiſe liegen, die zugleich durch den Scheitelpunct A gehen.

Man ſetze die beiden gleichen Wurzeln einer cubiſchen Gleichung, worin das zweyte Glied fehlt, jede $= \alpha$, die dritte $= \beta$, beiderſeits nach der abſoluten Größe genommen. Sind jene poſitiv, ſo iſt dieſe negativ, da ihr Aggregat, wegen des fehlenden zweyten Gliedes, Null iſt. Nun iſt jeder Werth der Gleichung ein Product aus den Factoren $(y - \alpha)^2$ und $(y + \beta)$, (ſ. Gleichung III. 10). Alſo iſt, wenn y irgend eine der Wurzeln bedeutet, $(y - \alpha)^2 (y + \beta) = 0$, das iſt

$$y^3 - (2\alpha - \beta)\, y^2 + (\alpha^2 - 2\alpha\beta)\, y + \alpha^2\beta = 0.$$

Die Zuſammenhaltung mit der Gleichung

$$y^3 - (2b - p)\, py + 2cp^2 = 0$$

giebt I. $2\alpha - \beta = 0$. II. $\alpha^2 - 2\alpha\beta = (p - 2b)\, p$; III. $\alpha^2\beta = 2cp^2$. Schafft man mittelſt der erſten Gleichung aus den beiden andern β weg, ſo erhält man IV. $(3\alpha^2 = 2b - p)\, p$; V. $\alpha^3 = cp^2$. Daraus iſt VI. $\alpha = \frac{3cp}{2b - p}$, und VII. $\alpha^2 = \frac{9c^2p^2}{(2b - p)^2}$. Aus IV. und VII. folgt VIII. $27c^2p = (2b - p)^3$, oder

$$\frac{27}{8}\, pc^2 = (b - \tfrac{1}{2}p)^3.$$

Dieſes iſt die Gleichung für die ſemicubiſche oder Neiliſche Parabel, in welcher $b - \frac{1}{2}p$ und c die Coordinaten für den Anfang der Abſciſſen D ſind. Sie iſt in Fig. 24. Tab. II. mit ihren beiden unendlichen Zweigen DE, De gezeichnet. Die zugehörige Parabel iſt GAg, die Axe derſelben und der Paraboloide EDe iſt AX; der Brennpunct der Parabel F; der Abſtand $AF = \frac{1}{4}p$, und der Abſtand AD der Spitze der Paraboloide von dem Scheitel der Parabel $AD = \frac{1}{2}p$. Die rechtwinklichten Coordinaten an der Paraboloide ſeyn $AT = t$; $TU = u$. Dieſe ſetze man ſtatt b und c in der gefundenen Gleichung für dieſe beiden Größen, ſo iſt die Gleichung für den verlangten Ort, $27\,pu^2 = 8\,(t - \frac{1}{2}p)^3$. Ein Kreis aus einem Puncte U als Mittelpuncte durch den Scheitel A beſchrieben, berührt die Parabel irgendwo in M. Nimmt man den Mittelpunct eines Kreiſes durch A innerhalb des Raumes EDe, ſo ſchneidet derſelbe die Parabel auſſer dem Puncte A noch dreymahl; nimmt man ihn auſſerhalb dieſes Raumes, ſo ſchneidet der Kreis die Parabel auſſer in A nur noch einmahl.

Denn in D iſt $t = \frac{1}{2}p$, das iſt dem Halbmeſſer des Krümmungskreiſes der Parabel im Scheitel, (ſ. Krümmungskreis §. 12.). Daher geht ein Kreis, der aus einem entferntern Puncte der Axe wie T durch A beſchrieben wird, auſſerhalb der Parabel weg, begegnet ihr aber wieder in einem Puncte auf jedem ihrer beiden Zweige. Der Kreis aus einem Puncte U der Paraboloide durch A beſchrieben, ſchneidet die Parabel in A, und liegt von A bis M innerhalb derſelben, da er den Zweig in M berührt. Folglich muß ein Kreis, der aus einem Puncte von TU zwiſchen T und U durch A beſchrieben wird, den Zweig AG zweymahl treffen, auf der einen und auf der andern Seite von M, dagegen ein Kreis aus einem von T entferntern Puncte als U auf TU den Zweig AG nicht treffen wird. Nämlich die berührende an dem erſtern dieſer Kreiſe in A liegt zwiſchen den berührenden an der Parabel und dem Kreisbogen AM in demſelben Puncte A. Der Kreis geht daher zwiſchen beiden durch, und trifft den mit UM be-

ſchriebenen zum zweytenmahle in dem Durchſchnitte mit der Abſciſſenlinie AX.

Die Gleichung $y^3 - Apy + Bp^2 = 0$ hat alſo drey mögliche Wyrzeln, wenn $27pc^2 < (2b - p)^3$; zwey gleiche, wenn $27pc^2 = (2b - p)^3$; zwey unmögliche, wenn $27pc^2 > (2b - p)^3$ iſt. Setzt man für b und c ihre vorher gefundenen Werthe, welche ſie dieſer Gleichuug gemäß haben, ſo iſt die Bedingung für die Möglichkeit aller drey Wurzeln, daß $\frac{27p}{4}B^2 < A^3$ ſey. Oder wenn $p = 1$ genommen wird, damit A und B die numeriſchen Coefficienten bedeuten können, ſo hat die Gleichung $y^3 - Ay + B = 0$ drey mögliche Wurzeln, oder zwey gleiche, oder zwey unmögliche, nachdem $27B^2$ kleiner, ſo groß oder größer als $4A^3$ iſt. Dieſes ſtimmt mit dem überein, was in dem Artikel, Gleichung III, 13. auf einem andern Wege gefunden wird.

Die Evolute der Parabel iſt auch eine ſemicubiſche Parabel, aber darin von dem hier gefundenen Orte der Mittelpuncte der berührenden Kreiſe verſchieden, daß ihre Gleichung iſt, $27pu^2 = 16(t - \frac{1}{2}p)^3$. Beide unterſcheiden ſich nur in ihren Parametern.

III. Conſtruction biquadratiſcher Gleichungen und vollſtändiger cubiſcher.

Es ſey MAN (Fig. 25. Tab. II.) eine Parabel, deren Axe AQ und Scheitel A iſt. Mit der Axe parallel in dem Abſtande DE iſt die Abſciſſenlinie DX gezogen, auf welcher der Anfang der Abſciſſen in der Parabel in D genommen werde. Ein Kreis aus C beſchrieben ſchneide die Parabel in den Puncten M, m, N, n, von welchen Durchſchnittspuncten in andern Fällen zwey wegfallen mögen, ſo wie auch gar keiner Statt haben mag. Von dem Mittelpuncte des Kreiſes C iſt CB ſenkrecht auf DX gezogen, von dem einen Durchſchnittspuncte des Kreiſes mit

der Parabel eben ſo MP, und MV von M auf die verlängerte BC.

Der Parameter der Parabel iſt $= p$; der Halbmeſſer des Kreiſes $= r$; der Abſtand der Abſciſſenlinie von der Axe DE $= a$; der Abſtand des Mittelpunctes des Kreiſes von der Abſciſſenlinie, $CB = c$; und $DB = b$. Die Coordinaten ſeyn $DP = x$; $PM = y$. Die Ordinate PM treffe die Axe in R.

Für die Parabel iſt die Gleichung

$$p\left(\frac{a^2}{p} + x\right) = (y - a)^2,$$

weil $DE^2 = p.AE$. Die Entwickelung dieſer Formel giebt

$$\text{I. } px = y^2 - 2ay.$$

An dem Kreiſe iſt

$$\text{II. } r^2 = (y - c)^2 + (x - b)^2.$$

Setzt man in dieſer Gleichung für x ſeinen Werth, ſo iſt

$$\text{III. } r^2 = (y - c)^2 + \left(\frac{yy}{p} - \frac{2ay}{p} - b\right)^2$$

Dieſe mit p^2 multiplicirt, und entwickelt, wird

$$\text{IV. } y^4 - 4ay^3 + 4a^2y^2 + 4abpy + b^2p^2$$
$$- 2bp. - 2cp^2. + c^2p^2 = 0,$$
$$+ p^2. - r^2p^2$$

Mit dieſer Gleichung vergleiche man eine gegebene biquadratiſche,

$$y^4 - Ay^3 + Bpy^2 + Cp^2y - Dp^3 = 0.$$

Beide Gleichungen ſind als Normal-Gleichungen anzuſehen; alle Größen ſind in ihnen poſitiv, oder bloß der Quantität nach zu nehmen. Ändern dieſe in andern Fällen ihre Vorzeichen, ſo ſind ſie negativ, und wenn ſie negativ werden, bekommen ſie eine entgegengeſetzte Lage in Beziehung auf diejenige, welche ſie in der Figur haben.

Die Zuſammenhaltung beider Gleichungen giebt
I. $4a = A$; II. $4a^2 - 2bp + p^2 = Bp$;
III. $4ab - 2cp = Cp$; IV. $r^2 - b^2 - c^2 = Dp$.

Daraus wird erhalten

$$a = \tfrac{1}{4}A$$

$$b = \frac{2aa}{p} + \tfrac{1}{2}p - \tfrac{1}{2}B$$

$$c = \frac{2ab}{p} - \tfrac{1}{2}C$$

$$r^2 = b^2 + c^2 + Dp$$

Der Terminus $\frac{2aa}{p}$ iſt $= 2AE$; ferner iſt $\frac{2ab}{p}$ die vierte Proportional-Linie zu p, a, 2b; und Dp iſt das Quadrat der mittlern Proportional-Linie zwiſchen D und p.

Mit einem willkührlichen Parameter zeichne man eine Parabel MAN, und ziehe in dem Abſtande $DE = \tfrac{1}{4}A$ mit der Axe derſelben die Parallele DX, wie in der Figur, wenn A poſitiv iſt; das iſt, das Vorzeichen — hat. Von dem Puncte D, wo ſie die Parabel trifft, ziehe man DE ſenkrecht auf die Axe, nehme von E aus $EF = \tfrac{1}{2}p$, und von F aus $FG = 2AE \left(= \frac{2aa}{p}\right)$, dann von G rückwärts $GH = \tfrac{1}{2}B$, wenn B poſitiv iſt. So iſt $EH = b$, das iſt $DB = b$, wenn HB ſenkrecht auf DX iſt. Dann ziehe man durch D und F eine gerade Linie, welche die verlängerte BH in J ſchneide, ſo iſt $BJ = \frac{2ab}{p}$, da $EF : ED = DB : BJ$ iſt. Auf BJ nehme man $JC = \tfrac{1}{2}C$ nach B hin, wenn C poſitiv iſt, ſo iſt C der Mittelpunct des zu beſchreibenden Kreiſes, deſſen Halbmeſſer noch zu finden iſt. Man ſuche zuerſt die Linie, deren Quadrat dem Rechtecke von D und p oder dem Producte Dp gleich iſt.

Iſt D poſitiv, ſo zeichne man ein rechtwinklichtes Dreyeck CDK (Fig. 26. Tab. II.), worin die Kathete DC = $\sqrt{(b^2 + c^2)}$, und die ander Kathete DK der Seite jenes Quadrats gleich iſt; die Hypotenuſe CK iſt der geſuchte Halbmeſſer. Iſt aber D negativ, ſo beſchreibe man über DC einen Halbkreis, trage darin die Chorde DL gleich der Seite jenes Quadrats, und ziehe CL, ſo iſt CL der geſuchte Halbmeſſer. Das erſtere iſt der Fall mit der Normal-Gleichung, die durch unſere Figur conſtruirt wird, wenn ſie vier mögliche Wurzeln hat. Sie hat, wegen der drey Abwechslungen der Vorzeichen drey poſitive Wurzeln, nämlich die drey poſitiven Ordinaten in M, m, n, und eine negative, die Ordinate in N, (ſ. Gleichung, IV. 6.)

Mit dem gefundenen Halbmeſſer beſchreibe man nun einen Kreis, welcher die Parabel in vier verſchiedenen Puncten ſchneidet, wenn die Gleichung vier verſchiedene mögliche Wurzeln hat. Er ſchneidet ſie in zweyen, und berührt ſie in einem Puncte, wenn die Gleichung unter den vier möglichen Wurzeln zwey gleiche hat. Er ſchneidet ſie in nicht mehr als zwey Puncten, wenn die Gleichung nur zwey mögliche verſchiedene Wurzeln hat, und berührt ſie in einem einzigen, wenn die beiden einzigen möglichen ſich gleich ſind. Schneidet der Kreis die Parabel gar nicht, ſo hat die Gleichung gar keine mögliche Wurzel. Iſt D negativ, und Dp größer als $b^2 + c^2$, ſo iſt r^2 negativ, welches ſogleich, ohne Conſtruction, zu erkennen giebt, daß die Gleichung keine mögliche Wurzeln habe. Segner hat ſich geirrt, da er in den Elem. Anal. finit. pag. 475. ſagt, daß man r immer möglich machen könne, weil man die Einheit nach Gefallen annehmen, und dadurch b^2 immer groß genug machen möge. Die Einheit iſt durch den Parameter, den er = 1 ſetzt, beſtimmt. — In dem Falle, da eine Gleichung drey gleiche Wurzeln hat, giebt unſere Conſtruction ſie nur als einzeln auſſer der vierten Wurzel an. Für dieſen Fall müßte die Abſciſſenlinie gegen die Axe geneigt ſeyn, damit für den Berührungspunct und einen der

Durchſchnittspuncte die Ordinaten gleich groß ſeyn mögen.

Die für biquadratiſche Gleichungen angewieſene Conſtruction iſt auch auf vollſtändige cubiſche anwendbar. Eine ſolche ſey $y^3 - Ay^2 + By + C = o$. Man multiplicire ſie mit y, ſo wird ſie dieſe: $y^4 - Ay^3 + By^2 + Cy = o$, in welcher eine Wurzel $= o$ iſt. Demnach ſetze man in der vorher behandelten biquadratiſchen Gleichung $D = o$, ſo erhält man die veränderte cubiſche. In der Conſtruction iſt CD der Halbmeſſer, und der Kreis geht durch den Anfang der Abſciſſen, ſo daß die Ordinate in dieſem Puncte die hinzugefügte Wurzel $y = o$ bedeutet.

Bakers Centralregel iſt im Weſentlichen das für die biquadratiſchen Gleichungen hier gewieſene Verfahren; allein die Vorſchriften wegen der Lage der Linien erfordern zu viele Aufmerkſamkeit, um ſich nicht zu irren, weil es an einer beſtimmten Regel fehlt, was poſitiv, und was negativ ſeyn ſoll. Die Regel trifft man in Tob. Mayers mathematiſchem Atlas, Supplement, Tab. VI. an. Man mag auch Wolfs Elementa Matheſeos, T. I. Analyſis Finit. §. 622 vergleichen. Bey dieſem Artikel ſind zwey Abhandlungen von Halley aus den Tranſactionen, die auch in der 's Graveſandſchen Ausgabe von Newtons Arithm. univ. befindlich ſind, benutzt worden. Die Regeln wegen des Poſitiven und Negativen daſelbſt ſind nicht einfach genug. Die Beweiſe der Conſtructionen ſind nicht beygefügt.

IV. Arithmetiſch-geometriſche Conſtruction der Gleichungen.

Man berechne einige Werthe einer gegebenen Gleichung für gewiſſe Werthe der unbekannten Größe, und ſetze dieſe, für eine beliebige lineariſche Einheit, als Ordinaten auf eine Abſciſſenlinie, in den Puncten, welche von dem Anfange der Abſciſſen den Abſtand haben, der in den Werthen der Gleichung für die unbekannte Größe geſetzt

iſt. Durch dieſe Puncte ziehe man aus freyer Hand eine krumme Linie mit möglichſter Beobachtung der allmähligen Krümmung, ſo erhält man an den Stellen, wo die Endpuncte der aufgetragenen Ordinaten nahe genug liegen, die krumme Linie, deren Ordinaten die Werthe der Gleichung für jede Abſciſſe darſtellen. Die Abſtände ihrer Durchſchnittspuncte mit der Abſciſſenlinie von dem Anfange der Abſciſſen geben die Wurzeln der Gleichung, deſto genauer, je vollkommner die Zeichnung iſt.

Z. B. Es iſt (Fig. 27. Tab. II.) die Abſciſſenlinie XY, und darauf der Anfang in A. Die Abſciſſen nach der rechten Hand hin bedeuten die poſitiven Werthe von x in der Gleichung für x; die nach der andern Seite hin die negativen. Man ſetze auf dieſe die zu verſchiedenen Werthen von x gehörigen Werthe der Gleichung, als in A ſelbſt den Werth Aa, oberhalb der Abſciſſenlinie, wenn der Werth poſitiv iſt, unterhalb, wenn er negativ iſt. So iſt der zu AB gehörige Werth Bb negativ, der zu AC gehörige Cc poſitiv. Nach Beſchaffenheit der Umſtände hat man mehr oder weniger Werthe der Gleichung zu berechnen und aufzutragen. Die durch die gefundenen Puncte gezogene krumme Linie ſchneide die Abſciſſenlinie in M, N, P, ſo ſind AM und AN poſitive Wurzeln der Gleichung, und AP eine negative. Iſt die Gleichung eine cubiſche, ſo ſind nicht mehr Durchſchnitte möglich, und die krumme Linie erſtreckt ſich mit zwey Zweigen NQ, PR ins Unendliche auf beiden Seiten der Abſciſſenlinie nach entgegengeſetzten Gegenden fort. Letzteres iſt der Fall bey allen Gleichungen von einem ungeraden Grade. Die Anzahl der möglichen Durchſchnitte mit der Abſciſſenlinie iſt nicht größer als die Zahl, welche den Grad der Gleichung ausdrückt, kann aber kleiner ſeyn; es kann ſelbſt nur ein einziger Durchſchnitt Statt haben, wenn nämlich die Abſciſſenlinie oberhalb oder unterhalb aller Biegungen der krummen Linie liegt, oder die krumme Linie gar keine Biegung hat.

In Fig. 28. Tab. II. iſt eine Gleichung vom vierten Grade durch den Zug einer krummen Linie abgebildet.

Die Zeichnung iſt aber, ſo wie die vorhergehende, nach keiner beſtimmten Gleichung entworfen, weil die Ordinaten der krummen Linie für den Raum der Zeichnung zu groß werden würden, wenn die Wurzeln eine hinlängliche Größe erhalten. Die Abſciſſenlinie iſt XY; der Anfang der Abſciſſen iſt in A; die Durchſchnitte der krummen Linie mit der Abſciſſenlinie ſind M, N, P, Q, welche drey poſitive Wurzeln und eine negative geben. Zwiſchen den Abſciſſen, wodurch die Wurzeln der Gleichung dargeſtellt werden, liegen die Abſciſſen AB, AC, AD, deren zugehörige Ordinaten Bb, Cc, Dd größte ſind, nämlich in Beziehung auf die nächſt vorhergehenden und folgenden. Die negativen Ordinaten, welche der Quantität nach Größte ſind, heißen aber, als negative Größen, Kleinſte, weil ſie aus den vorhergehenden durch die Hinzuſetzung einer ſubtractiven Größe entſtehen, und daher in Rückſicht dieſer kleiner ſind. Die krumme Linie geht mit zwey Zweigen PS, QT nach derſelben Gegend von der Abſciſſenlinie an ins Unendliche fort, da das höchſte Glied der Gleichung für eine negative Abſciſſe poſitiv iſt, und von einem gewiſſen Werthe an ſchon allein größer bleibt als alle ſubtractiven Glieder der Gleichung zuſammen genommen. Das iſt der Fall bey allen Gleichungen von einem geraden Grade. Iſt die Ordinate Aa in dem Anfangspuncte negativ, wie in der Figur, ſo hat die Gleichung wenigſtens zwey mögliche Wurzeln, da die Abſciſſenlinie die beiden unendlichen Zweige ſchneiden muß, wenn ſie auch über allen Biegungen der krummen Linie weg geht. Iſt aber die Ordinate in A poſitiv, ſo hat die Gleichung gar keine mögliche Wurzeln, wenn die Abſciſſenlinie unterhalb aller Biegungen liegt.

Die geometriſche Abbildung der Gleichungen iſt ſehr geſchickt die Theorie derſelben auf eine ſinnliche Art zu erläutern. Wenn in der Folge der Ordinaten unter den vorhergehenden und nachfolgenden eine abſolut Kleinſte ſich findet, ſo geht daſelbſt die Abſciſſenlinie unter oder über einer Biegung weg, unter, wenn das Kleinſte poſitiv, über, wenn das Kleinſte, abſolut genommen, negativ iſt.

Man lege in Fig. 28. die Abſciſſenlinie ſo, daß ſie unter dem Puncte c und über d liege, in einer der vorigen parallelen Lage. Dadurch fallen zwey mögliche Wurzeln weg, und die Ordinate in C iſt ein poſitives Kleinſtes. Liegt die Abſciſſenlinie auch unterhalb des Punctes d, ſo ſind alle vier Wurzeln der biquadratiſchen Gleichung, welche die Zeichnung abbildet, unmöglich. Man ſieht, wie bey der parallelen Verrückung der Abſciſſenlinie, das iſt, bey einer Veränderung des abſoluten Gliedes der Gleichung, zwey ungleiche Wurzeln ſich immer näher kommen, und bey der Berührung mit der krummen Linie an dem Biegungspuncte, wie b oder c oder d, ſich gleich werden, bey weiterer Verrückung aber ſich in unmögliche verwandeln. Der Übergang von der Möglichkeit zur Unmöglichkeit geſchieht alſo hier durch die Gleichheit zweyer Wurzeln. Die Summe zweyer nächſten Wurzeln, wie AN, AP, iſt = 2AC — CN + CP, wenn C der zu einer größten oder kleinſten Ordinate gehörige Punct der Abſciſſe iſt. Der Theil AC hängt nicht von dem abſoluten Gliede der Gleichung (= Aa) ab, oder wenn dieſes in den irrationalen Theilen von AC enthalten iſt, muß es bey der Entwickelung herausgehen. Aber CN und CP hängen von dem abſoluten Gliede ab, ſo daß ſie Null ſind, wenn die Abſciſſenlinie durch c geht.

Die krumme Linie, welche eine Gleichung vom nten Grade abbildet, kann n — 1 Biegungen, nicht mehrere, haben. Es können aber eine oder mehrere Biegungen wegfallen. Wenn z. B. in Fig. 28. die poſitiven Ordinaten von M an beſtändig zunehmen, ſo behält die krumme Linie nur eine einzige Biegung, und iſt parabelförmig. Die zu der Linie gehörige Gleichung kann gar nicht mehr als zwey Wurzeln haben, wie auch das abſolute Glied verändert werden mag. Wenn die Biegung NcP wegfällt, ſo wird AC eine unmögliche Größe. Eine Linie zu einer Gleichung eines ungeraden Grades kann alle Biegungen verlieren, und mit zwey Zweigen, die entgegengeſetzte Krümmung haben, (der eine concav, der andere nach derſelben Gegend convex,) ins Unendliche hin ſich erſtrecken.

K

Die Gleichung kann alsdann nicht mehr als eine einzige Wurzel haben. Mit jeder wegfallenden Biegung fallen zwey Durchſchnitte mit der Abſciſſenlinie weg, daher die Anzahl der unmöglichen Wurzeln einer Gleichung immer gerade iſt.

Man kann die lineariſchen Werthe einer Gleichung auch durch eine Conſtruction finden, welches an dem Beyſpiele einer cubiſchen Gleichung gezeigt werden wird. Dieſe ſey $\frac{ax^3}{p^3} + \frac{bx^2}{p^2} + \frac{cx}{p} + d = o$, wo p der Parameter der krummen Linie heißen mag Die Größen a, b, c, d ſind Linien, wie p und x. Setzt man $p = 1$ ſo werden die übrigen Linien Zahlen, und zwar die Exponenten des Verhältniſſes des Parameters zu ihnen. Man zeichne (Fig. 29. Tab. II.) ein Rechteck AEFK, woran die Grundlinie EK $= p$, und die Seite AE $= a + b + c + d$ iſt, nämlich AB $= a$; BC $= b$; CD $= c$; De $= d$. Man nehme auf der Grundlinie das Stück ET $= x$, und ziehe TP parallel mit AE. Nun ziehe man BF, und durch ihren Durchſchnittspunct Q auf PT die mit EK parallele Gg; darauf CG, welche PT in R ſchneidet, und durch R die parallele Hh mit EK; dann DH, und durch ihren mit TP gemeinſchaftlichen Punct S die mit EK parallele Ji. Dieſes geſchehen, ſo iſt TS $= \frac{ax^3}{p^3} + \frac{bx^2}{p^2} + \frac{cx}{p} + d$, als der Werth der gegebenen Gleichung für $x = $ ET.

Denn es iſt AB : Bg $= p : x$, alſo Bg $= \frac{ax}{p}$.

Ferner iſt Cg : Ch $= p : x$, alſo Ch $=$ Cg $. \frac{x}{p}$ $= (CB + Bg)\frac{x}{p}$, das iſt Ch $= \frac{bx}{p} + \frac{ax^2}{p^2}$.

Noch iſt Dh : Di $= p ; x$, alſo Di $=$ Dh $. \frac{x}{p}$

$= (DC + Ch)\frac{x}{p}$, das iſt $Di = \frac{cx}{p} + \frac{bx^2}{p^2} + \frac{ax^3}{p^3}$. Da $TS = Ei$, und $DE = d$ iſt, ſo iſt

$$TS = d + \frac{cx}{p} + \frac{bx^2}{p^2} + \frac{ax^3}{p^3}.$$

Auf dieſe Art laſſen ſich auch die Werthe anderer Gleichungen conſtruiren. Die Methode iſt aber mühſam, weil man das Rechteck mehrmahls zeichnen muß, damit man unter den vielen Linien keinen Mißgriff thue. In der Zeichnung der Figur ſind die Coefficienten a, b, c alle kleiner als p, und $\frac{x}{p}$ iſt ein Bruch. Wäre jene und x größer als p, ſo kann die Conſtruction unbequem werden, indem TS oder der Werth der Gleichung eine beträchtliche Größe in Vergleichung mit EK erhält.

Wenn einige der Coefficienten a, b, c, d, etc. negativ ſind, ſo hat man die Theile auf AE, welche ſie darſtellen, in entgegengeſetzter Richtung, das iſt von E nach A hin, zu nehmen. Z. B. für die Gleichung $\frac{ax^3}{p^3} - \frac{bx^2}{p^2} + \frac{cx}{p} - d = 0$ hat man BC von B nach A hin, und DE von D nach A hin zu tragen. Für negative Werthe von x wird ET in der entgegengeſetzten Richtung genommen.

Man wird ſich vorſtellen können, wie zu folge dieſer Conſtruction ein Inſtrument aus einigen befeſtigten und mehrern verſchiebbaren Linealen mit Einſchnitten oder Nuthen und Stiften, zuſammen zu ſetzen ſey, das mit einer Reißſpitze in S die krumme Linie durch einen fortgehenden Zug beſchriebe. Ein ſolches Inſtrument iſt in der Encyclopédie méthodique, Mathematique, in dem Artikel, Equation, beſchrieben, und dabey auch abgebildet.

Es iſt für quadratiſche Gleichungen eingerichtet. Die Bewegungen geſchehen mittelſt gezähnter Räder, die in gezahnte Lineale eingreifen. Ein ähnliches Inſtrument hat Rowning in den Engliſchen Tranſactionen 1770 angegeben. Die Conſtrucion, worauf dieſe Inſtrumente beruhen, hat Segner in den neuern Petersburger Comment. T. VII. gelehrt, ſie auch in ſeinen Elem. Analyſeos finit. §. 705 *ſſ*. vorgetragen. Der Beweis iſt in dieſem Artikel ſehr abgekürzt. Die Inſtrumente ſind mehr ſinnreich als brauchbar.

V. Auflöſung quadratiſcher und cubiſcher Gleichungen durch die Goniometrie (trigonometriſche Formeln).

1. Die Formeln für die Sinus, Coſinus und Tangenten vielfacher Winkel durch eben ſolche Functionen des einfachen können angewandt werden, um die letztern aus den erſtern ſehr genau zu finden, da alle dieſe Functionen der Winkel in den Tafeln mit großer Genauigkeit angegeben ſind. Da aber in dieſen Formeln nur zwey Größen unbeſtimmt bleiben, der Sinus totus oder die Tangente von 45 Grad, und die Function des vielfachen Winkels, wenn die Function des einfachen geſucht wird, ſo kann man dadurch nur die Gleichungen vom zweyten und dritten Grade auflöſen, und die letztern nur, wenn das zweyte Glied darin fehlt, wodurch die zwey Coefficienten gegeben werden, welche den Sinus totus und den Sinus oder Coſinus des dreyfachen Winkels beſtimmen. Die goniometriſchen Formeln für die Functionen größerer Vielfachen eines Winkels enthalten gewiſſe Relationen der Coëfficienten, welche in einer gegebenen Gleichung ſich auch finden müſſen, wenn ſie durch die Theilung eines Winkels aufgelöſet werden ſoll.

2. Eine quadratiſche Gleichung ſey

$$x^2 - ax + b = 0,$$

worin die Größen a, b poſitiv oder abſolute, genommen werden. Die Gleichung zwiſchen dem Sinus eines Winkels und dem des doppelten iſt $\sin 2\varphi = 2 \sin\varphi \cdot \cos\varphi$ (Goniometrie; 35). Dieſe werde quadrirt, ſo iſt

$$\sin 2\varphi^2 = 4 \sin\varphi^2 (1 - \sin\varphi^2),$$

das iſt,

$$4 \sin\varphi^4 - 4 \sin\varphi^2 + \sin 2\varphi^2 = 0.$$

Hier bedeuten $\sin\varphi$ und $\sin 2\varphi$ die numeriſchen Sinus für den Sinus totus $= 1$. Für den S. totus $= r$, ſey der Sinus von $\varphi = y$, und der Sinus von $2\varphi = f$, ſo iſt $\sin\varphi = \frac{y}{r}$, und $\sin 2\varphi = \frac{f}{r}$, indem der Ausdruck $\sin\varphi$ ſich immer auf den Sinus totus $= 1$ bezieht. Es iſt nun

$$y^4 - r^2 y^2 + \tfrac{1}{4} r^2 f^2 = 0.$$

Dieſe Gleichung halte man gegen die gegebene, $x^2 - ax + b = 0$, ſo iſt $x = y^2$; $r^2 = a$; $\frac{1}{4} r^2 f^2 = b$, folglich $\frac{f}{r} = \frac{2\sqrt{b}}{a}$, das iſt, $\sin 2\varphi = \frac{2\sqrt{b}}{a}$.

Da $y = r \sin\varphi$ iſt, ſo iſt
$x = r^2 \sin\varphi^2$, oder $x = a \sin\varphi^2$.

Es gehört f auch zu dem Winkel $\pi - 2\varphi$, wo π zwey Rechte bedeutet, daher auch dieſer Winkel in zwey Theile zu theilen iſt, (Goniom. V.). Alſo iſt der zweyte Werth von $y = r \sin(\frac{1}{2}\pi - \varphi) = r \cos\varphi$, und $x = a \cos\varphi^2$.

Man ſuche alſo den Winkel 2φ, deſſen Sinus $= \frac{2\sqrt{b}}{a}$ iſt, ſo ſind die beiden Wurzeln der obigen Gleichung, $a \sin\varphi^2$ und $a \cos\varphi^2$. Die Summe derſelben iſt $= a(\sin\varphi^2 + \cos\varphi^2) = a$; ihr Product $= a^2 \sin\varphi^2 \cos\varphi^2 = \frac{1}{4} a^2 \sin 2\varphi^2 = b$, wie es ſeyn muß, (Gleichung I. 8). Es muß aber $2\sqrt{b} < a$ ſeyn, da $\sin 2\varphi < 1$ iſt, oder $b < \frac{1}{4} a^2$, wenn die

Wurzeln möglich ſeyn ſollen, einſtimmig mit (Gleichung I. 4.)

Da $a = \frac{2\sqrt{b}}{\sin 2\varphi} = \frac{\sqrt{b}}{\sin\varphi . \cos\varphi}$ (Goniom. 35), ſo ſind die beiden Wurzeln der Gleichung, $\tan\varphi . \sqrt{b}$ und $\cot\varphi . \sqrt{b}$, (eben daſ. 14.).

2. Exempel. Es ſey die Gleichung $x^2 - 64x + 720 = 0$ aufzulöſen. Es iſt

$$\begin{aligned}
\log b &= 2{,}8573325 \\
\log\sqrt{b} &= 1{,}4286662 \\
\log 2 &= 0{,}3010300 \\
-\log a &= -1{,}8061800 \\
\log\sin 2\varphi &= 9{,}9235162 \quad 2\varphi = 56^\circ 59' 5'' \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad \varphi = 28.29.32{,}5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log\sin\varphi &= 9{,}6785562 \\
& 9{,}6785562 \\
\log a &= 1{,}8061800 \\
& 1{,}1632924 \ldots \text{I. } 14{,}5644
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log\cos\varphi &= 9{,}9439300 \\
& 9{,}9439300 \\
\log a &= 1{,}8061800 \\
& 1{,}6940400 \ldots \text{II. } 49{,}4356
\end{aligned}$$

Die Summe der beiden Wurzeln iſt = 64; ihr Product, wie durch die Addition ihrer Logarithmen gleich erhellt, iſt = 720.

Nach der zweyten Form der Wurzeln iſt

$\log tg\varphi = 9{,}7346263$	$\log\cot\varphi = 0{,}2653737$
$\log\sqrt{b} = 1{,}4286662$	$\log\sqrt{b} = 1{,}4286662$
$\log. \text{I.} = 1{,}1632925$	$\log \text{II.} = 1{,}6940399$

3. Die quadratiſche Gleichung ſey

$$x^2 + ax - b = 0.$$

Dieſe läßt ſich nicht durch Hülfe des Sinus auflöſen, weil der Sinus des Winkels 2φ für ſie unmöglich wird. Man nehme aber die Formel 46 der Goniometrie

$$\text{tang}\, 2\varphi = \frac{2\,\text{tang}\,\varphi}{1 - \text{tang}\,\varphi^2},$$

und ſetze $\text{tang}\,\varphi = \frac{t}{r}$, $\text{tang}\,2\varphi = \frac{f}{r}$, ſo iſt

$$t^2 + \frac{2r^2}{f}t - r^2 = 0.$$

Hält man dieſe Gleichung gegen die für x, ſo iſt $t = x$; $\frac{2r^2}{f} = a$; $r^2 = b$, alſo $\text{tang}\,2\varphi = \frac{2\sqrt{b}}{a}$, und $x = \text{tang}\,\varphi . \sqrt{b}$.

In dieſem Ausdrucke liegt ein doppelter Werth. Iſt 2φ der kleinſte Winkel zu der Tangente f, ſo gehört dieſelbe Tangente auch zu $\pi + 2\varphi$ (Goniom. 8.), und es iſt x ſowohl $\text{tang}\,\frac{1}{2}(\pi + 2\varphi) . \sqrt{b}$ als $\text{tang}\,\varphi . \sqrt{b}$. Es iſt aber $\text{tang}\,\frac{1}{2}(\pi + 2\varphi) = -\text{tang}\,(\frac{1}{2}\pi - \varphi)$ $= -\cot\varphi$. Demnach iſt, wenn $\text{tang}\,2\varphi = \frac{2\sqrt{b}}{a}$ genommen wird,

$x = \text{tang}\,\varphi . \sqrt{b}$, und $x = -\cot\varphi . \sqrt{b}$.

Die Summe von den entgegengeſetzten dieſer Wurzeln iſt $= (\cot\varphi - \text{tang}\,\varphi)\sqrt{b}$, das iſt (Goniom. 45) $= 2\cot 2\varphi . \sqrt{b} = \frac{2\sqrt{b}}{\text{tang}\,2\varphi} = a$, wie es ſeyn muß (Gleichung I. 8). Das Product iſt $=$
$-\text{tang}\,\varphi . \cot\varphi . \sqrt{b} . \sqrt{b} = -b$.

4. Die Gleichung $x^2 - ax - b = 0$ hat dieſelben Wurzeln der Quantität nach mit der Gleichung $x^2 + ax - b = 0$, aber entgegengeſetzt. Setzt man demnach

$\tang 2\varphi = \frac{2\sqrt{b}}{a}$, ſo iſt $x = + \cot\varphi . \sqrt{b}$, und $x = - \tang\varphi . \sqrt{b}$.

5. Die Auflöſungen der beiden Fälle einer quadratiſchen Gleichung haben etwas übereinſtimmendes und auch verſchiedenes. Für die Gleichung $x^2 - ax + b = 0$ wird $\sin 2\varphi = \frac{2\sqrt{b}}{a}$ geſetzt, und die beiden Wurzeln ſind $+ \tang\varphi . \sqrt{b}$ und $+ \cot\varphi . \sqrt{b}$. Für die Gleichung $x^2 + ax - b = 0$ wird $\tang 2\varphi = \frac{2\sqrt{b}}{a}$ genommen, und die beiden Wurzeln ſind $+ \tang\varphi . \sqrt{b}$, und $- \cot\varphi . \sqrt{b}$.

6. Für den Sinus eines dreyfachen Winkels iſt die Formel (Goniometrie IV.)

$$\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin\varphi^3.$$

Es ſey $\sin\varphi = \frac{x}{r}$, und $\sin 3\varphi = \frac{f}{r}$, ſo iſt

$$x^3 - \tfrac{3}{4} r^2 x + \tfrac{1}{4} r^2 f = 0.$$

Hiegegen halte man eine gegebene cubiſche Gleichung, worin das zweyte Glied fehlt,

$$x^3 - bx + c = 0,$$

ſo iſt $\frac{3}{4} r^2 = b$; $\frac{1}{4} r^2 f = c$, alſo $r = \sqrt{\frac{4b}{3}}$, und $\sin 3\varphi = \frac{3c}{2b}\sqrt{\frac{3}{b}} = \sqrt{\frac{27c^2}{4b^3}}$. Damit dieſer Sinus möglich ſey, muß $27c^2 < 4b^3$ ſeyn, welches die Bedingung der Möglichkeit aller drey Wurzeln iſt, (Gleichung III. 13.). Auch darf b nicht negativ ſeyn, oder in der Gleichung das Vorzeichen + haben, da der Halbmeſſer $r = 2\sqrt{\frac{b}{3}}$ iſt.

Iſt sin 3ϕ und daraus ϕ durch die Formel, $\sin 3\phi = \sqrt{\frac{27c^2}{4b^3}} = \frac{c\sqrt{6,75}}{b\sqrt{b}}$ gefunden, ſo iſt

$$x = r \sin\phi = \sin\phi . \sqrt{\frac{4b}{3}} .$$

In dieſem Ausdrucke ſind drey verſchiedene Werthe enthalten, nämlich $+ r\sin\phi$; $+ r\sin(\frac{1}{3}\pi - \phi)$; $- r\sin(\frac{1}{3}\pi + \phi)$, nach Goniometrie. V.

7. Die gegebene Gleichung ſey $x^3 - bx - c = 0$. Für dieſe iſt $\sin 3\phi$ negativ, das iſt, der Winkel 3ϕ iſt größer als zwey Rechte. Man ſetze $3\phi = \pi + 3\omega$, ſo ſind die drey Wurzeln, $+ r\sin(\frac{1}{3}\pi + \omega)$; $- r\sin\omega$; $- r\sin(\frac{1}{3}\pi - \omega)$, weil $\sin(\frac{2}{3}\pi + \omega) = \sin(\frac{1}{3}\pi - \omega)$ iſt. Dieſe Werthe entſtehen aus den vorigen, wenn ϕ mit $-\omega$ vertauſcht wird.

8. Man kann für dieſen Fall ſich auch der Coſinus bedienen. Es iſt (Goniom. IV.)

$$\cos 3\phi = 4\cos\phi^3 - 3\cos\phi$$

Man ſetze $\cos\phi = \frac{x}{r}$, und $\cos 3\phi = \frac{g}{r}$ ſo iſt

$$x^3 - \tfrac{3}{4}r^2 x - \tfrac{1}{4}r^2 g = 0.$$

Die Vergleichung mit

$$x^3 - bx - c = 0$$

giebt $\frac{3}{4}r^2 = b$; $\frac{1}{4}r^2 g = c$, alſo $r = \sqrt{\frac{4b}{3}}$,

$$\cos 3\phi = \frac{3c}{2b}\sqrt{\frac{3}{b}} = \sqrt{\frac{27c^2}{4b^3}} .$$

Auch hier muß $27c^2 < 4b^3$ und b poſitiv ſeyn. Iſt dieſes, ſo ſind die drey Wurzeln der Gleichung, $r\cos\phi$; $r\cos(\frac{2}{3}\pi - \phi)$; $r\cos(\frac{2}{3}\pi + \phi)$. Die beiden letztern ſind negativ, weil die Winkel größer als ein Rechter ſind, da 3ϕ kleiner als 90 Gr., und ϕ kleiner als 30 Gr. iſt.

9. **Exempel.** Es ſey $x^3 - 2100x + 24000 = 0$. Hier iſt $b = 2100$; $c = 24000$. Die drey Wurzeln ſeyn x', x'', x'''.

$\log c$	$= 4{,}3802112$	$\mathrm{l.}\, b$	$= 3{,}3222193$
$\frac{1}{2}\mathrm{l.}\, 6{,}75$	$= 0{,}4146519$	$\frac{1}{2}\mathrm{l.}\, b$	$= 1{,}6611096$
	$4{,}7948631$	$\mathrm{l.}\, b\sqrt{b}$	$= 4{,}9833289$
	$4{,}9833289$		
$\mathrm{l.}\sin 3\varphi$	$= 9{,}8115342$	3φ	$= 40^\circ 23' 11''$
$\mathrm{l.}\, b$	$= 3{,}3222193$	φ	$= 13.\ 27.\ 43''\ \frac{2}{3}$
$\mathrm{l.}\, 0{,}75$	$= 9{,}8750613$	$\frac{1}{3}\pi - \varphi$	$= 46.\ 32.\ 16\ \frac{1}{3}$
$\mathrm{l.}\, r^2$	$= 3{,}4471580$	$\frac{1}{3}\pi + \varphi$	$= 73.\ 27.\ 43\ \frac{2}{3}$
$\mathrm{l.}\, r$	$= 1{,}7235790$		
$\mathrm{l.}\sin\varphi$	$= 9{,}3669878$		
$\mathrm{l.}\, x'$	$= 1{,}0905668$	x'	$= 12{,}31875$
$\mathrm{l.}\sin(\frac{1}{3}\pi - \varphi)$	$= 9{,}8608344$		
$\mathrm{l.}\, x''$	$= 1{,}5844134$	x''	$= +\,38{,}40726$
$\mathrm{l.}\sin(\frac{1}{3}\pi + \varphi)$	$= 9{,}9816518$		
$\mathrm{l.}\, x'''$	$= 1{,}7052308$	x'''	$= -\,50{,}72602$

Die Summe der beiden poſitiven Wurzeln iſt $= 50{,}72601$, der negativen ſehr genau gleich. Die Summe der Logarithmen aller drey Wurzeln iſt $= 4{,}3802110$, welcher von dem log. c faſt gar nicht abweicht. Zur Sicherheit der Berechnung iſt dieſe Probe rathſam. Sie beruht auf (Gleichung III. 5.).

In dem Artikel, Cardaniſche Regel, wird die hier zum Beyſpiel gebrauchte Gleichung auf eine andere Art aufgelöſet, die aber mühſamer iſt.

10. In der Gleichung $x^3 - bx - c = 0$ ſey $27c^2 > 4b^3$, ſo iſt nur eine mögliche Wurzel vorhanden. Man ſetze $x = r(\tan\varphi + \cot\varphi)$ ſo iſt

$$x^3 = r^3(\mathrm{tg}\,\varphi^3 + 3\,\mathrm{tg}\,\varphi^2 \cot\varphi + 3\,\mathrm{tg}\,\varphi \cot\varphi^2 + \cot\varphi^3),$$

Weil $\cot\varphi = \frac{1}{\tan\varphi}$, ſo iſt

$x^3 = r^3(\text{tg}\,\varphi^3 + 3\,\text{tg}\,\varphi + 3\cot\varphi + \cot\varphi^3)$, das iſt

$$x^3 - 3r^2x - r^3(\text{tg}\,\varphi^3 + \cot\varphi^3) = 0.$$

Die Zuſammenhaltung mit der Gleichung

$x^3 - bx - c = 0$

giebt $3r^2 = b$, und $r^3(\text{tg}\,\varphi^3 + \cot\varphi^3) = c$; alſo

$r = \sqrt{\frac{b}{3}}$, und $\text{tg}\,\varphi^3 + \cot\varphi^3 = \frac{3c}{b}\sqrt{\frac{3}{b}}$.

Da $\text{tg}\,\varphi^3 . \cot\varphi^3 = 1$, ſo iſt die Summe und das Product der beyden unbekannten gegeben, und es iſt

$\text{tang}\,\varphi^3 = \frac{3c}{2b}\sqrt{\frac{3}{b}} \pm \sqrt{\left(\frac{27c^2}{4b^3} - 1\right)}$ zu folge (Gleichung I. 1.) wo die Bedingung, daß $27c^2 > 4b^3$ ſey, der Annahme gemäß iſt. Man ſetze $\frac{3c}{2b}\sqrt{\frac{3}{b}} = \text{ſec}\,A$; ſo iſt $\text{tang}\,\varphi^3 = \text{ſec}\,A \pm \text{tang}\,A = \text{tang}\,(45^\circ \pm \frac{1}{2}A)$. (Goniometrie, II. 43). Nimmt man das eine Vorzeichen für $\text{tang}\,\varphi^3$, ſo gilt das andere für $\cot\varphi^3$.

Man ſetze $\sqrt[3]{\text{tang}\,(45^\circ \pm \frac{1}{2}\,\text{tang}\,A)} = B$, ſo iſt $x = r(\text{tang}\,B + \cot B)$, das iſt $x = 2r\,\text{coſec}\,2B$ (Goniom. II. 45.), oder $x = \text{coſec}\,2B\sqrt{\frac{4b}{3}}$, oder auch

$$x = \frac{1}{\sin 2B}\sqrt{\frac{4b}{3}}.$$

11. **Exempel.** Die Gleichung ſey

$$x^3 - 13,3592x - 24,6377 = 0.$$

Hier iſt $b = 13,3592$; $c = 24,6377$, und die Berechnung, wie folget.

$\log c = 1,3916001$	$l.\,b = 1,1257804$
$\frac{1}{2}\,l.\,6,75 = 0,4146519$	$\frac{1}{2}\,l.\,b = 0,5628902$
$1,8062520$	$l\,b\sqrt{b} = 1,6886706$
$1,6886706$	$l.\,4:3 = 0,1249387$
$l.\,\sec A = 0,1175814$	$l.\,4b:3 = 1,2507191$
$l.\,tg(45^\circ - \frac{1}{2}A) = 9,6658245$	$\frac{1}{2}\,l.\,4b:3 = 0,6253595$
$l.\,tg\,B = 9,8886082$	$A = 40^\circ\,17'\,15''$
$l.\,\mathrm{coſec}\,2B = 0,0141315$	$\frac{1}{2}A = 20.\,8.\,37$
$\frac{1}{2}\,l.\,4b:3 = 0,6253595$	$45^\circ - \frac{1}{2}A = 24.51.23$
$l.\,x = 0,6394910$	$B = 37.43.53$
	$2B = 75.27.46$
	$x = 4,36004$

In dem Artikel, Cardaniſche Regel, iſt dieſe Gleichung unmittelbar nach jener Regel aufgelöſet.

12. Die Gleichung $x^3 - bx + c = 0$ hat dieſelbe einzige Wurzel, welche $x^3 - bx - c = 0$ hat, aber entgegengeſetzt oder negativ.

13. Die Gleichung $x^3 + bx - c = 0$ hat nur eine einzige mögliche Wurzel, wie auch b und c ſich gegen einander verhalten mögen. Man ſetze $x = r(\mathrm{tang}\,\varphi - \cot\varphi)$, ſo iſt $x^3 + 3r^2 x - r^3(\mathrm{tang}\,\varphi^3 - \cot\varphi^3) = 0$. Nun iſt $3r^2 = b$, und $r^3(\mathrm{tang}\,\varphi^3 - \cot\varphi^3) = c$, alſo $r = \sqrt{\frac{b}{3}}$, und $\mathrm{tang}\,\varphi^3 = \frac{3c}{b}\sqrt{\frac{3}{b}}$. Hier iſt der Unterſchied zweyer unbekannten Größen gegeben, deren Product $= 1$ iſt. Der Unterſchied heiße der Kürze wegen d, ſo iſt $\mathrm{tang}\,\varphi^3 = \sqrt{(\frac{1}{4}d^2 + 1)} + \frac{1}{2}d$, und $\cot\varphi^3 = \sqrt{(\frac{1}{4}d^2 + 1)} - \frac{1}{2}d$. (Gleichung I. 2). Man ſetze $\frac{1}{2}d = (\mathrm{tang}\,A$, ſo iſt $\sqrt{(\frac{1}{4}d^2 + 1)} = \sec A$, und $\mathrm{tang}\,\varphi^3 = \sec A + \mathrm{tang}\,A = \mathrm{tang}\,(45^\circ + \frac{1}{2}A)$, ſo wie $\cot\varphi^3 = \sec A - \mathrm{tang}\,A = \mathrm{tang}\,(45^\circ - \frac{1}{2}A)$.

Ferner ſetze man

$\sqrt[3]{\text{tang}\,(45^\circ - \frac{1}{2}A)} = \text{tang}\,B$, ſo iſt

$\sqrt[3]{\text{tang}\,(45^\circ + \frac{1}{2}A)} = \cot\,B$, und daher

$x = r\,(\cot B - \text{tang}\,B)$, oder $x = 2\,r \cot 2\,B$.

Die Regel der Auflöſung iſt demnach: man ſuche

$\text{tang}\,A = \frac{3c}{2b}\sqrt{\frac{3}{b}}$, und $\text{tang}\,B = \sqrt[3]{\text{tang}(45^\circ - \frac{1}{2}A)}$,

ſo iſt $x = 2 \cot 2\,B.\sqrt{\frac{b}{3}}$.

14. Wenn man für die Sinus und Coſinus der Sectoren einer gleichſeitigen Hyperbel ſolche Tafeln hätte, wie für die Sinus und Coſinus der Kreisſectoren durch die Sinus und Coſinus ihrer Bogen, ſo könnte man die cubiſchen Gleichungen mit einer einzigen möglichen Wurzel eben ſo bequem auflöſen, als die mit drey Wurzeln mittelſt der trigonometriſchen Tafeln. Denn wenn a die halbe Axe der gleichſeitigen Hyperbel, x der Coſinus eines Sectors S, g der Coſinus des dreyfachen Sectors, in Beziehung auf a iſt, ſo iſt $x^3 - \frac{3}{4}a^2 x - \frac{1}{4}a^2 g = 0$, (Goniom. VIII.). Die gegebene Gleichung ſey $x^3 - bx - c = 0$, ſo giebt die Vergleichung $a = \sqrt{\frac{4b}{3}}$; $g = \frac{3c}{b}$. Es ſey $\frac{g}{a} = \text{coſ hyp.}\,3\,S$, und $\frac{x}{a} = \text{coſ hyp.}\,S$ für die halbe Axe $= 1$, ſo iſt $\text{coſ hyp.}\,3\,S = \frac{3c}{2b}\sqrt{\frac{3}{b}}$, und $x = \left(\sqrt{\frac{4b}{3}}\right).\,\text{coſ hyp.}\,S$. Hier iſt $27c^2 > 4b^3$, da der hyperboliſche Coſinus größer als die halbe Axe iſt.

15. Es ſey y der hyperboliſche Sinus eines Sectors S, und f der Sinus des Sectors 3 S für die halbe Axe a, ſo iſt $y^3 + \frac{3}{4}a^2 y - \frac{1}{4}a^2 f = 0$. Die gegebene

Gleichung ſey $y^3 + by - c = o$, ſo iſt $a = \sqrt{\frac{4b}{b}}$; $f = \frac{3c}{b}$. Es ſey $\frac{f}{a} = \sin hyp.\, 3S$, und $\frac{y}{a} = \sin hyp.\, S$ für die halbe Axe $= 1$, ſo iſt $\sin hyp.\, 3S = \frac{3c}{2b}\sqrt{\frac{3}{b}}$, u. $y = \left(\sqrt{\frac{4b}{3}}\right). \sin hyp.\, S$. Hier mag $27c^2$ größer oder kleiner als $4b^3$ ſeyn, da der hyperboliſche Sinus von Null an bis ins Unendliche wächſt.

16. In Lamberts Zuſätzen zu den logar. und trigon. Tabellen enthält Tab. XXXII eine Anzahl hyperboliſcher Sectoren mit ihren Sinus und Coſinus nebſt deren Logarithmen. Man nehme die Gleichung in (V. 11.), nämlich $x^3 - 13{,}3592\,x - 24{,}6337 = o$. Hier iſt $b = 13{,}3592$; $c = 24{,}6377$. Es iſt hier coſh. 3 S was dort sec A iſt.

log coſh. 3 S	= 0,11758		3 S = 0,33132
log coſh. S	= 0,01505		S = 0,11044
log a	= 0,62536		
log x	= 0,64041		x = 4,369

Für 3 S und log coſh S haben nur die nächſten Werthe in der Tafel, die noch ziemlich von den wahren entfernt ſind, genommen werden können. Dennoch iſt die hier gefundene Wurzel nur um 0,01 gegen 4,37 unrichtig.

VI. Darſtellung aller Wurzeln aus a^n, und der möglichen trinomiſchen Factoren der Function $x^n \pm a^n$, wo n eine ganze bejahte Zahl iſt.

Die Größe $\pm a^{2n+1}$ hat nur eine mögliche Wurzel $\pm a$; und $+ a^{2n}$ hat zwey entgegengeſetzte, $+ a$ und $- a$;

ſo wie die Gleichung $x^n \pm a^n = 0$ nur eine mögliche Wurzel für ein ungerades n, und $x^n - a^n = 0$ zwey gleiche entgegengeſetzte für ein gerades n hat. Da aber eine Gleichung ſo viele Wurzeln hat, als der Exponens der höchſten Potenz der unbekannten Größe Einheiten enthält, ſo iſt die Frage, was die unmöglichen Wurzeln dieſer Gleichung oder der Potenz a^n für eine Form haben.

Die Goniometrie verhilft zu der Erfindung derſelben. In dem Artikel, Goniometrie, IV. wird (daſelbſt zu einem andern Zwecke) gezeigt, daß

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi . \sqrt{-1})^n = \cos n\varphi \pm \sin n\varphi . \sqrt{-1}$$

iſt. Alſo iſt

$$\cos\varphi \pm \sin\varphi . \sqrt{-1} = (\cos n\varphi \pm \sin n\varphi . \sqrt{-1})^{\frac{1}{n}}$$

Dieſe nte Wurzel aus einer unmöglichen Größe hat ſo viele verſchiedene Werthe als $\cos\varphi$ hat, wenn der Winkel $n\varphi$ durch ſeinen Coſinus gegeben wird, das iſt, n verſchiedene Werthe. (Goniom. V.)

Wenn $\cos n\varphi = +1$ geſetzt wird, ſo hat $n\varphi$ die Werthe $0, 2\pi, 4\pi, 6\pi$; etc. wo 2π der Kreisumfang für den Halbmeſſer $= 1$ iſt, zugleich iſt $\sin n\varphi = 0$. Folglich giebt der Ausdruck, $\cos\varphi + \sin\varphi \sqrt{-1}$, nebſt der einzigen möglichen Wurzel aus $+1$, auch die unmöglichen Wurzeln an. Dieſe Wurzeln bezeichne man allgemein durch x, wie die Wurzeln einer Gleichung.

Bey dem Gebrauche des obern Vorzeichens iſt

$$x = \cos\frac{2k\pi}{n} + \sin\frac{2k\pi}{n}, \sqrt{-1}, \text{ wo für k alle ganze}$$

Zahlen von 1 bis $n - 1$, nebſt 0, zu nehmen ſind. Größere Werthe von k als $n - 1$ geben keine andern Coſinus und Sinus als ſchon für 0 bis $n - 1$ vorhanden ſind.

Für ein gerades $n = 2m$, und $k = m + r$, iſt

$$\cos\frac{2(m+r)\pi}{2m} = \cos\frac{2(m-r)\pi}{2m}, \text{ und}$$

$$\sin\frac{2(m+r)\pi}{2m} = -\sin\frac{2(m-r)\pi}{2m},$$ weil die Winkel zuſammen den ganzen Umfang 2π ausmachen. Daher kann für

$$x = \cos\frac{2(m+r)\pi}{2m} + \sin\frac{2(m+r)\pi}{2m} \cdot \sqrt{-1}$$

geſetzt werden

$$x = \cos\frac{2(m-r)\pi}{2m} - \sin\frac{2(m-r)\pi}{2m} \cdot \sqrt{-1},$$

und es ſind je zwey Werthe von

$$x = \cos\frac{2k\pi}{n} + \sin\frac{2k\pi}{n} \cdot \sqrt{-1},$$

wo k alle ganze Zahlen von 1 bis $\frac{1}{2}n$, nebſt 0, bedeutet, und die Winkel nicht über zwey Rechte groß ſind. Für $k = \frac{1}{2}n$ iſt der zweyte Theil $= 0$, und es iſt nur ein Werth von x vorhanden, nämlich -1, ſo wie für $k = 0$ auch nur ein Werth, $x = +1$ iſt.

Es ſey $n = 2m + 1$; und $k = m + r$, ſo iſt wiederum für

$$x = \cos\frac{(2m+r)\pi}{2m+1} + \sin\frac{(2m+r)\pi}{2m+1} \cdot \sqrt{-1}$$

zu ſetzen

$$x = \cos\frac{2(m+1-r)\pi}{2m+1} - \sin\frac{2(m+1-r)\pi}{2m+1} \cdot \sqrt{-1},$$

ſo daß je zwey Werthe von x ſind

$$x = \cos\frac{2k\pi}{n} \pm \sin\frac{2k\pi}{n} \cdot \sqrt{-1},$$

wo k außer 0, die ganzen Zahlen von 1 bis $\frac{1}{2}(n-1)$ bedeutet.

Zweytens ſetze man $\cos n\varphi = -1$, ſo hat $n\varphi$ die Werthe π, 3π, 5π, 7π, etc. und $\sin n\varphi$ iſt $= 0$. Folglich giebt nun $\cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1}$, nebſt der einzigen möglichen Wurzel aus -1, die nämlich in dem Falle eines ungeraden n Statt hat, auch alle unmöglichen Wurzeln an. Bezeichnet man jede derſelben durch x, ſo iſt

$$x = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + \sin\frac{(2k+1)\pi}{n} . \sqrt{-1},$$

wo für k alle ganzen Zahlen von 1 bis $n-1$, nebſt 0, zu ſetzen ſind. Nimmt man ſtatt der Winkel über zwey Rechte ihre Ergänzungen zu vier Rechten, ſo ſind je zwey Werthe,

$$x = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} \pm \sin\frac{(2k+1)\pi}{n} . \sqrt{-1},$$

wo die Werthe von k alle ganze Zahlen von 1 bis $\frac{n-2}{2}$ oder bis $\frac{n-1}{2}$, für ein gerades oder für ein ungerades n, nebſt 0, ſind. Iſt n ungerade, ſo iſt für $2k+1 = n$, der Werth $x = -1$. Iſt n einfach gerade, ſo iſt für $2k+1 = \frac{1}{2}n$ der Werth $x = \pm 1 . \sqrt{-1}$; iſt n doppelt gerade, ſo iſt jede Wurzel zweytheilig.

Hieraus ſieht man, daß es gleichgültig iſt, ob in der Formel $\cos n\varphi \pm \sin n\varphi . \sqrt{-1}$ das obere oder das untere Vorzeichen gebraucht wird, um die Wurzeln aus $+1$ und -1 zu finden.

Mit dieſen Wurzeln verbinde man den Factor a^n, ſo liefert der Ausdruck, $a(\cos\varphi \pm \sin\varphi . \sqrt{-1})$ alle Wurzeln aus $\pm a^n$. Für $+a^n$ ſind die Werthe von φ wie bey den Wurzeln aus $+1$, für $-a^n$, wie bey den Wurzeln aus -1 zu nehmen.

Exempel. Die Cubikwurzeln aus $+1$ ſind $+1$; $\cos 120^\circ \pm \sin 120^\circ . \sqrt{-1}$. Die Cubikwurzeln aus -1 ſind $\cos 60^\circ \pm \sin 60^\circ . \sqrt{-1}$, und $\cos 180^\circ$

L

oder — 1. Sie ſind jenen, gehörig genommen, gleich und entgegengeſetzt.

Die Biquadratwurzeln aus $+1$ ſind ± 1; und $\cos 90^\circ \pm \sin 90^\circ . \sqrt{-1}$, das iſt, $\pm\sqrt{-1}$. Aus -1 ſind ſie $\cos 45^\circ \pm \sin 45^\circ . \sqrt{-1}$, und $\cos 135^\circ \pm \sin 135^\circ . \sqrt{-1}$

Die fünften Wurzeln aus $+1$ ſind I. $+1$; II. $\cos 72^\circ \pm \sin 72^\circ . \sqrt{-1}$; III. $\cos 144^\circ \pm \sin 144^\circ . \sqrt{-1}$. Aus -1 ſind ſie I. $\cos 36^\circ \pm \sin 36^\circ . \sqrt{-1}$; II. $\cos 108^\circ \pm . \sin 108^\circ \sqrt{-1}$; III. $\cos 180^\circ$ oder -1.

Da die Wurzeln der Gleichungen $x^n - a^n = 0$ und $x^n + a^n = 0$ ſolchergeſtalt bekannt ſind, ſo werden auch die Factoren der Functionen $x^n - a^n$ dadurch gefunden.

Es hat nämlich, wenn $\pm p$ eine der Wurzeln x einer Gleichung iſt, das Aggregat ihrer Glieder, für jeden Werth von x, den Factor $(x \mp p)$, (Gleichung VI. 13). Die Functionen $x^n - a^n$ und $x^n + a^n$ haben alſo einfache Factoren von der Form $x - a(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})$. Das Product von je zwey ſolchen Factoren iſt $= x^2 - 2ax\cos\varphi + a^2$. Nämlich $x^n - a^n$ hat die Doppelfactoren von der Form $x^2 - 2ax . \cos\frac{2k}{n}\pi + a^2$, wo k alle ganze Zahlen von 1 bis $\frac{1}{2}n$ oder $\frac{1}{2}(n-1)$ zu Werthen hat. Die Function $x^n + a^n$ hat die Doppelfactoren von der Form $x^2 - 2ax\cos\frac{2k+1}{n}\pi + a^2$, wo k alle ganze Zahlen von 1 bis $\frac{n-1}{2}$ oder $\frac{n-2}{2}$ zu Werthen bekommt.

Exempel. Die Factoren von

$x^3 - a^3$ ſind $x - a$; $x^2 - 2ax\cos\frac{2}{3}\pi + a^2$

$$x^4 - a^4 \text{ ſind } x - a;\ x^2 - 2ax\cos\tfrac{2}{4}\pi + a^2$$
$$x + a$$

$$x^5 - a^5 \text{ ſind } x - a;\ x^2 - 2ax\cos{}^{2}\,\pi + a^2$$
$$x^2 - 2ax\cos\tfrac{4}{5}\pi + a^2$$

u. ſ. w.

Die Factoren von

$$x^3 + a^3 \text{ ſind } x^2 - 2ax\cos\tfrac{1}{3}\pi + a^2$$
$$x + a$$

$$x^4 + a^4 \text{ ſind } x^2 - 2ax\cos\tfrac{1}{4}\pi + a^2$$
$$x^2 - 2ax\cos\tfrac{3}{4}\pi + a^2$$

$$x^5 + a^5 \text{ ſind } x^2 - 2ax\cos\tfrac{1}{5}\pi + a^2$$
$$x^2 - 2ax\cos\tfrac{3}{5}\pi + a^2$$
$$x + a.$$

u. ſ. w.

Wenn man dieſe Factoren in einander multipliciren will, um daraus das Binomium hervorzubringen ſo muß man die Sätze von der Summe und dem Producte der Coſinus aliquoter Theile des Kreisumfanges und Vielfachen deſſelben kennen, (Goniometrie, V.) Auch iſt der Satz, $2\cos A.\cos B = \cos(A+B).\cos(A-B)$ hier nöthig.

Die geometriſche Darſtellung dieſer Factoren liefert der Coteſiſche Lehrſatz.

VII. Zerlegung der dreytheiligen Function $x^{2n} - 2px^n + 1$ in quadratiſche Factoren.

Die Gleichung $x^{2n} - 2px^n + 1 = 0$ hat als quadratiſche Gleichung betrachtet die Wurzeln

$$x^n = p \pm \sqrt{(p^2 - 1)}, \text{ oder } p + \sqrt{(p^2 - 1)} \text{ und}$$

$$\frac{1}{p + \sqrt{(p^2 - 1)}}. \quad \text{(Gleichung II. 7).}$$

Es ſey $p + \sqrt{(p^2 - 1)} = q$, ſo ſind die Wurzeln q und $\frac{1}{q}$. Iſt $p^2 > 1$, ſo läßt ſich die Gleichung oder Function in zwey mögliche Factoren zerlegen, nämlich $x^n - q$ und $x^n - \frac{1}{q}$, und dieſe werden nach dem gleich vorher gewieſenen Verfahren in quadratiſche zerlegt.

Es ſey $p < 1$, und werde deshalb durch $\cos\alpha$ ausgedruckt. Es iſt alſo $x^n = \cos\alpha \pm \sin\alpha . \sqrt{-1}$. Da $(\cos\alpha \pm \sin\alpha . \sqrt{-1})^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{\alpha}{n} \pm \sin\frac{\alpha}{n} . \sqrt{-1}$ iſt, ſo iſt $x = \cos\frac{\alpha}{n} \pm \sin\frac{\alpha}{n} . \sqrt{-1}$. Nun hat $\frac{\alpha}{n}$ weil der Winkel α durch ſeinen Coſinus gegeben wird, n verſchiedene Werthe, und x erhält dadurch $2n$ Werthe, wie es ſeyn muß. Die verſchiedenen Werthe dieſer Winkel ſind, wenn α den kleinſten der zu $\cos\alpha$ gehörigen Winkel bedeutet,

$$\frac{\alpha}{n};\ \frac{2\pi \pm \alpha}{n};\ \frac{4\pi \pm \alpha}{n};\ \frac{6\pi \pm \alpha}{n};\ \text{etc.}$$

bis daß deren n ſind. Dieſe ſind alle kleiner als π. Oder auch

$$\frac{\alpha}{n};\ \frac{2\pi + \alpha}{n};\ \frac{4\pi + \alpha}{n} \ldots \frac{(2n - 4)\pi + \alpha}{n};$$
$$\frac{(2n - 2)\pi + n}{n},$$

wo der letzte mit $\frac{2\pi - \alpha}{n}$, der vorletzte mit $\frac{4\pi - \alpha}{n}$ u. ſ. f. einerley Coſinus hat. Die Winkel der letztern Reihe ſind in der zweyten Hälfte größer als π, (Goniometrie, V.)

Man bezeichne jeden dieſer Winkel allgemein durch φ, ſo iſt

$$x = \operatorname{coſ}\varphi + \sin\varphi . \sqrt{1}.$$

Die Function $x^{2n} - 2x^n . \operatorname{coſ}\alpha + 1$ hat alſo n Paare Factoren, $x - \operatorname{coſ}\varphi - \sin\varphi . \sqrt{-1}$, und $x - \operatorname{coſ}\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1}$. Das Product je zweyer ſolcher iſt

$$x^2 - 2x . \operatorname{coſ}\varphi + 1.$$

Dieſes iſt ein quadratiſcher oder trinomiſcher Factor der Function $x^{2n} - 2x^n . \operatorname{coſ}\alpha + 1$. Der Winkel φ erhält die vorher angegebenen n Werthe.

Exempel. Die Function $x^6 - 2x^3 . \operatorname{coſ}\alpha + 1$ hat die Factoren.

$$x^2 - 2x . \operatorname{coſ}\frac{x}{3} + 1$$

$$x^2 - 2x . \operatorname{coſ}\frac{2\pi - \alpha}{3} + 1$$

$$x^2 - 2x . \operatorname{coſ}\frac{2\pi + \alpha}{3} + 1.$$

Die Function $x^8 - 2x^4 . \operatorname{coſ}\alpha + 1$ hat die Factoren,

$$x^2 - 2x . \operatorname{coſ}\frac{\alpha}{4} + 1$$

$$x^2 - 2x . \operatorname{coſ}\frac{2\pi - \alpha}{4} + 1$$

$$x^2 - 2x . \operatorname{coſ}\frac{2\pi + \alpha}{4} + 1$$

$$x^2 - 2x . \operatorname{coſ}\frac{4\pi - \alpha}{4} + 1.$$

Es iſt $\operatorname{coſ}\frac{4\pi - \alpha}{4} = -\operatorname{coſ}\frac{\alpha}{4}$ und $\operatorname{coſ}\frac{2\pi + \alpha}{4} = -\operatorname{coſ}\frac{2\pi - \alpha}{4}$.

Zur Übung in der Rechnung mit goniometriſchen Formeln mag man dieſe und andere ſolche Functionen durch die

Multiplication ihrer Factoren herausbringen. Die dazu nöthigen Formeln finden ſich in (Goniometrie, V.). Producte von Coſinus werden mittelſt der Formel, $2 \cos A . \cos B = \cos (A + B) . \cos (A - B)$ zerlegt.

Die Function $x^{2n} - 2a^n x^n . \cos \alpha + a^{2n}$ hat die quadratiſchen oder trinomiſchen Factoren von der Form $x^2 - 2ax . \cos \phi + a^2$. Denn man ſetze $x = az$, ſo iſt jene Function $a^{2n} (z^{2n} - 2z^n . \cos \alpha + 1)$. Dieſe hat die quadratiſchen Factoren, $a^2 (z^2 - 2z . \cos \phi + 1)$, das iſt, $x^2 - 2ax . \cos \phi + a^2$.

Die geometriſche Darſtellung dieſer Factoren wird in dem Artikel, **Coteſiſcher Lehrſatz**, gezeigt.

Zu vergleichen: Euleri Introd. in Anal. Infin. T. 1, cap. 9

Apolloniſche Parabel heißt die gewöhnliche Parabel die aus dem Schnitte eines Kegels entſteht, zum Unterſchiede von den Parabeln höherer Ordnungen, weil Apollonius von Pergä (250 J. v. Ch.) über die Parabel und die andern Kegelſchnitte ein meiſterhaftes Werk geſchrieben hat; das älteſte, was über die Kegelſchnitte aus dem Alterthum zu uns gekommen iſt. Von den höhern Parabeln, ſ. Parabel.

Apomecometria, die Kunſt, die Entfernung eines Gegenſtandes mittelbar zu meſſen. Der Ausdruck kommt kaum anders als in tabellariſchen Abtheilungen der Materien in der Mathematik vor. Das Wort iſt griechiſchen Urſprungs, zuſammengeſetzt aus ἀπο, von, ab, μηκος, Entfernung, Länge, und μετρειν, meſſen.

Aporema (Aporisma) iſt bey einigen alten Geometern eine Aufgabe, deren Auflöſung man nicht geben kann, ob es gleich auch nicht erweislich iſt, daß ſie unmöglich ſey. Z. B. die Aufgabe von der Quadratur des Kreiſes. Das griechiſche Wort bedeutet eine aufgeworfene Frage, und Bedenklichkeit oder Verlegenheit. Marinus ſagt in der Vorrede zu den Datis des Euklides, daß

Porimon iſt, was man bewerkſtelligen und conſtruiren oder darſtellen könne, **aporimum** ſey das Entgegengeſetzte, wie die Quadratur des Kreiſes, die man noch nicht gefunden habe, ob es gleich gewiß ſey, daß ſie gefunden werden könne.

Apothema, die ſenkrechte Linie von dem Mittelpuncte eines ordentlichen Vielecks auf eine Seite deſſelben. Von ἀπο und τιϑημι.

Apotome (**Reſiduale, reſiduum binomiale**) iſt in der Arithmetik der Griechen der Unterſchied einer rationalen und quadratiſchen irrationalen Zahl, oder zweyer ſolchen irrationalen Zahlen. Es ſeyn b, c rationale Zahlen, und $b - \sqrt{c} = a$, oder $\sqrt{c} - b = a$, oder auch $\sqrt{b} - \sqrt{c} = a$, ſo iſt a eine Apotome. Das Wort bedeutet etwas abgeſchnittenes, von ἀποτεμνειν. Euklides Elemente X. 74. Größen, wie $\sqrt{b}$, wenn b rational iſt, heißen bey Euklides auch rationale, weil ihr Quadrat rational iſt, aber nur in der Potenz mit einer als Einheit gegebenen Größe commenſurabel, da b mit ihr, als Linie betrachtet, der Länge nach commenſurabel iſt.

Euklides unterſcheidet ſechs Gattungen der Apotome (Definitiones tertiae). Die **erſte** Apotome iſt, wenn $b - \sqrt{c} = a$, und $\sqrt{(b^2 - c)} : b = m : n$, dem Verhältniſſe zweyer rationalen Zahlen iſt. Die **zweyte** Apotome iſt, wenn $\sqrt{c} - b = a$, und $\sqrt{(c - b^2)} : \sqrt{c} = m : n$ iſt. Die **dritte** iſt, wenn $\sqrt{b} - \sqrt{c} = a$, und $\sqrt{(b - c)} : \sqrt{b} = m : n$ iſt. Die **vierte** iſt, wenn $b - \sqrt{c} = a$, und $\sqrt{(b^2 - c)} : b$ nicht ein rationales Verhältniß iſt. Die **fünfte** iſt, wenn $\sqrt{c} - b = a$, und $\sqrt{(c - b^2)} : \sqrt{c}$ nicht ein rationales Verhältniß iſt. Die **ſechſte** Apotome endlich iſt, wenn $\sqrt{b} - \sqrt{c} = a$, und $\sqrt{(b - c)} : \sqrt{b}$ nicht ein rationales Verhältniß iſt.

Die Apotomen unterſcheiden ſich von den Binomialen (quae ex binis nominibus) beym Euklides nur dadurch, daß in dieſen letzteren die Summe genommeu wird. Auch macht Euklides ſechs Gattungen der Binomialen.

Die geometriſche Behandlungsart der Binomialen und Apotomen beym Euklides iſt ſinnreich; nur muß man ſich in ſeine Vorſtellungsarten hinein ſtudiren, welches wegen der Gewöhnung an unſere bequemere Rechnungsart mit irrationalen Größen Mühe macht. Die erſten algebraiſchen Schriftſteller in Europa haben ſich mit der Erklärung der in dem 10ten Buche der Euklideiſchen Elemente vorgetragenen Lehre von den irrationalen Größen ſehr viel beſchäftigt. Es iſt eine gute Übung, mit der Euklideiſchen Methode die neuere parallel gehen zu laſſen.

Applicare, auf einander legen, bey Vergleichung ebener Figuren, iſt, ſie auf einander legen, um zu zeigen, daß ſie gleich groß oder ungleich ſind. Dieſes Aufeinanderlegen iſt eine bloße Vorſtellung des Verſtandes, wovon die ſinnliche Darſtellung nur ein Bild iſt, wie alle gezeichneten Figuren nur Bilder ſind, deren Originale ganz und gar in dem reinen Verſtande allein ſich befinden.

Applicare A ad B heißt bey ältern Schriftſtellern, die Größe A durch die Größe B dividiren. Die Redensart hat ihren Urſprung aus der Geometrie. Eine geradlinichte Figur an eine Linie appliciren heißt über dieſer Linie ein Rechteck oder Parallelogramm beſchreiben, das jener Figur gleich iſt (Eucl. Elem. VI. 25. ff. X. 23). Die Figur ſey ein Rechteck, deſſen Seiten a, b ſind, die gegebene Seite ſey c, ſo iſt die zweyte Seite des Rechtecks, das jenem gleich iſt, die vierte Proportional-Linie zu c, a, b, das iſt $\frac{ab}{c}$. Das gegebene Rechteck an die gegebene Linie c zu appliciren erfordert alſo arithmetiſch die Diviſion deſſelben durch die Linie c.

Applicare lineam rectam in circulo vel curva iſt eine gerade Linie in der krummen Linie ſo legen, daß ſie mit ihren Endpuncten in den Umfang derſelben falle, etwa in einen gegebenen Punct dieſes Umfanges.

Applicate (Ordinate) iſt eine gerade Linie, die in einer krummen Linie parallel mit einer gegebenen Linie an den Umfang zwiſchen zwey Puncten der krummen Linie gezogen, und nebſt allen andern ſolchen Parallelen von einem Durchmeſſer der krummen Linie halbirt wird. Der Durchmeſſer heißt die Axe, wenn die Applicaten unter einem rechten Winkel geſchnitten werden, ſonſt ein Durchmeſſer. Dieſe Erklärung giebt Apollonius in ſeinem Werke über die Kegelſchnitte Die Neuern, als Euler, Cramer, nennen Applicate oder Ordinate eine gerade Linie, die von irgend einem Puncte einer krummen Linie unter einem beſtimmten Winkel (am gewöhnlichſten einem Rechten) an eine der Lage nach gegebene gerade Linie, die Abſciſſenlinie, gezogen wird. Die Applicaten mögen auf beiden Seiten der Abſciſſenlinie gleich oder ungleich ſeyn; es mögen auf jeder Seite eine oder mehrere Applicaten, nach der Anzahl der Zweige der krummen Linie, vorhanden ſeyn, auf beiden Seiten gleich oder ungleich viele; auch auf einer Seite gar keine. Dieſe Abänderung des Begriffs der Applicaten war nöthig, um durch die Veränderungen in der Lage der Abſciſſenlinie und der Applicaten alle Verwandlungen der Gleichung, welche die Natur einer krummen Linie ausdruckt, zu erhalten, und daraus ihre Eigenſchaften herzuleiten.

Approximatio, ſ. Näherung.

Arbelus, ein ſichelförmiger Raum zwiſchen drey ſich berührenden Kreiſen. Es iſt (Fig. 30. Tab. II.) ABC ein Halbkreis, auf deſſen Durchmeſſer AC irgend ein Punct E genommen wird, um über AE und EC die ſich einander und den erſtern Kreis berührenden Halbkreiſe ADE, EFC zu beſchreiben. Hierauf werde um den Mittelpunct G ein Kreis beſchrieben, der jene drey Kreiſe berührt, ferner ein Kreis um H, der die Halbkreiſe ABC, ADE und den um G berührt, dann ein Kreis um J, der jene beiden, und den um H berührt, noch ein Kreis um K der die beiden erſtern und den um J berührt, u. ſ. f. Von den Mittelpuncten dieſer Kreiſe werden die ſenkrech-

ten auf AC gezogen, Gg, Hh, Ji, Kk, etc. ſo iſt Gg gleich dem Durchmeſſer des Kreiſes um G; Hh dem Doppelten des Durchmeſſers des Kreiſes um H; Ji dem Dreyfachen des Durchmeſſers des Kreiſes um J; Kk dem Vierfachen des Durchmeſſers des Kreiſes um K, u. ſ. f. Den Beweis dieſes Satzes liefert Pappus in Collect. math. L. V. propoſ. 16. Er ſagt vorher, daß es ein alter Satz ſey, der ſich in einigen Büchern finde. Die berührenden Kreiſe, welche nach einander in dem Raume zwiſchen den drey Kreiſen ADE, CFE, BDF auf gleiche Art wie jene beſchrieben werden, haben dieſelben Verhältniſſe ihrer Durchmeſſer zu den Abſtänden ihrer Mittelpuncte von AC.

Das Wort Arbelus bedeutet im Griechiſchen ein gekrümmtes Meſſer, desgleichen ſich die Schuſter bedienen.

Archimedeiſche Spirallinie, ſ. Spirallinie.

Archimetria, eine Benennung für die Elementar-Geometrie, welche Weigel in der Philoſophia mathematica derſelben giebt, weil ſie die Gründe enthält, nach welchen alle Größen gemeſſen werden können.

Area ſ. Flächenraum.

Arithmetik iſt die Wiſſenſchaft, welche ſich mit den Formen und den Verknüpfungen der Zahlen beſchäftigt, insbeſondere zu dem Zwecke, die Erfindung des Unbekannten aus dem Bekannten oder Gegebenen daraus herzuleiten. Von dem griechiſchen Worte, ἀριθμος, Zahl.

Die gemeine Arithmetik enthält die leichtern Fälle er Verbindungen der Zahlen, und die praktiſchen Anwendungen. Jene ſind die bekannten vier Species der Rechenkunſt in ganzen und gebrochnen Zahlen, die Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzeln, (gewöhnlich nur in mathematiſchen Lehrbüchern), die Lehre von den Proportionen, von den leichteſten Progreſſionen, und die Anweiſung zum Gebrauch der Logarithmen, deren Berechnung aber in die mathematiſche Analyſis gehört.

Die **höhere Arithmetik** begreift die Unterſuchungen über die Eigenſchaften der Zahlen, ſo fern ſie allgemein, ohne Rückſicht auf ein beſonderes Numerations-Syſtem betrachtet werden. Dahin gehören die Lehren in den vier arithmetiſchen Büchern der Euklideiſchen Elemente (ſ. Zuſatz über die Arithmetik der Alten), die Zerfällung der ganzen Zahlen in Factoren und Ausſonderung der Primzahlen, die Zerlegung einer ganzen Zahl in alle möglichen ganzen Theile, oder in Theile von einer gewiſſen Form als in Quadrate, in Trigonalzahlen; die continuirlichen Brüche (Kettenbrüche); die Unterſuchungen über die Eigenſchaften der Zahlen, und mancherley Formen derſelben, wohin auch die befreundeten und vollſtändigen Zahlen gehören; die Verfertigung der magiſchen Quadrate, die Combinirung von Zahlenperioden, von welchen in der Chronologie eine Anwendung vorkommt, u. m. Dieſe machen einen Theil der mathematiſchen Analyſis aus, eine höhere Arithmetik, welche die Größen als unbeſtimmte Zahlen betrachtet, und ſie auch wie die gemeine Arithmetik mit einander verbindet. — Die Unterſuchungen aus der höhern Arithmetik ſind größtentheils in den akademiſchen Sammlungen zerſtreut. Zwey neuere wichtige Werke ſie betreffend ſind: Eſſai d'une Théorie des nombres, par A. M. le Gendre, à Paris, An VI. und Disquiſitiones arithmeticae, auctore C. F. Gauſs. Lipſiae 1801.

Die **theoretiſche Arithmetik** hat zum Hauptzwecke, die Lehrſätze von den Verbindungen und Eigenſchaften der Zahlen im Allgemeinen zu entwickeln und zu erweiſen. Der Vortrag der Arithmetik in den mathematiſchen Lehrbüchern pflegt dahin gerichtet zu ſeyn, wo die Anwendungen nur zur Erläuterung dienen.

Die **praktiſche, techniſche** oder **bürgerliche Arithmetik** iſt eine Anleitung zu der Kunſt, ſicher, bequem und geſchwind in allen Fällen zu rechnen. Dieſe benenne man zur Unterſcheidung mit dem deutſchen Namen: **Rechenkunſt.** Von dieſer in dem Artikel: Rechenkunſt.

Die numeriſche Rechenkunſt (Arithmetica numeroſa) lehrt die Rechnung mit beſtimmten Zahlen, die auf die bekannte Art durch Zahlziffern ausgedruckt werden.

Die *Arithmetica ſpecioſa* zeigt, wie Rechnungen, ohne Rückſicht auf eine beſtimmte Zahlgröße, zufolge der Bedingungen der Aufgabe, durch allgemeine Symbole oder Zeichen gemacht werden. Vieta, der den Gebrauch der Buchſtabenzeichen allgemein für alle Größen, ſowohl bekannte als unbekannte, einführte, nannte dieſelben Species, weil ſie die Zahlgrößen im Allgemeinen, als Arten, darſtellen. Die Juriſten nennen ihre erdichteten allgemeinen Perſonen, als Cajus, Sempronius, ebenfalls Species, (ſ. Buchſtabenrechnung.)

Allgemeine Arithmetik (Arithmetica univerſalis) iſt der Titel eines ſchätzbaren elementariſchen Werks einer höhern Gattung über Algebra und die Anwendung derſelben auf die Geometrie, von Newton, welches er zum Leitfaden ſeiner Vorleſungen als Profeſſor zu Cambridge gebraucht hatte. Die erſte Ausgabe von 1707 zu Cambridge iſt ohne Wiſſen des Verfaſſers veranſtaltet; die zweyte 1722, iſt von ihm verbeſſert. Dieſe hat 's Graveſande zu Leiden 1732 mit einigen Abhandlungen aus den Engliſchen Tranſactionen vermehrt abdrucken laſſen. Eine mit vielen Anmerkungen verſehene Ausgabe von J. Caſtillion iſt zu Amſterdam 1761 in zwey Quartbänden herausgekommen.

Arithmetik des Unendlichen iſt die Benennung, welche Wallis ſeiner Methode unendliche Reihen zu ſummiren gab. Das Werk, worin er dieſe ſinnreiche Erfindung vortrug, erſchien zu Oxford 1656. (200 S. in 4), und iſt in dem erſten Theile ſeiner Werke befindlich, wo die Anzahl der Sätze dieſelbe wie in der erſten Ausgabe iſt. Wallis iſt der erſte, der in die Theorie der Reihen und ihre Summirung tiefer eindrang, da man vor ihm nur einzelne Fälle aufzulöſen Mittel gefunden hatte. Er machte beſonders davon Anwendung auf die Berechnung krummlinichter Flächen und körperlicher Räume. Seine Me=

thode, gewiſſe Reihen zu interpoliren, wodurch er zu einer merkwürdigen Formel für den Inhalt des Kreiſes gelangte, iſt von einer ganz beſondern Art. Doch giebt die Integralrechnung, welche mit der Differentialrechnung die allgemeinſte Arithmetik des Unendlichen iſt, leichtere und allgemeinere Methoden an, als die von Wallis gebrauchten, lehrt auch vieles, was durch dieſe nicht erreichbar iſt.

Politiſche Rechenkunſt iſt die Anwendung auf Rechnungsfälle in der Verwaltung eines Staats. S. an ihrem Orte in der zweyten Abtheilung dieſes Werks.

Arithmetik der Harmonie iſt die Vergleichung der muſikaliſchen Intervalle durch zugehörige Zahlen. S. Ton, Ton-Intervall, Tonleiter in der zweyten Abtheilung.

Errathende Rechenkunſt (Arithmetica divinatoria) iſt die Kunſt durch Rechnung verſchiedenes aus gewiſſen Angaben dem Scheine nach zu errathen. Sie dient bloß zur Beluſtigung, ſ. an ihrem Orte.

Logarithmiſche Arithmetik iſt diejenige, nach welcher man ſich der Logarithmen zur großen Abkürzung der Rechnung bedient. Dieſen Titel führt der große Canon der Logarithmen von Vlacq, Gouda 1628 Fol. ſ. Logarithmen.

Tabulariſche Arithmetik, die Rechnung mit Hülfe mancherley Tafeln, als einer Tafel der Factoren zuſammengeſetzter Zahlen, der Primzahlen, der Vielfachen der Zahlen bis zum Neunfachen, der Quadrate, der Würfel, beſonders der Logarithmen, und der trigonometriſchen Zahlen, ſ. Tafel.

Inſtrumentale Arithmetik, die Rechnung vermittelſt gewiſſer Werkzeuge. Dergleichen ſind die Rechentafel oder der Abacus der Alten; die Rechenpfennige, die aufgereiheten Kugeln der Chineſer, die Neperiſchen Rechenſtäbe, Reihers Sexagenal-Stäbe, Scheffelts mechaniſcher Maaßſtab und Rechenſtab, verſchiedene Arten von Rechenſcheiben oder Rechenwalzen, beſonders die Rechenmaſchinen. Von allen dieſen handelt der Artikel, Inſtrumentale Arithmetik.

Arithmetik der Brüche, ſ. Bruchrechnung.

Arithmetik der Irrational Zahlen. (Arithmetica Incommenſurabilium ſ. Surdorum), ſ. Irrationalgrößen.

Arithmetik, dekadiſche oder decimale; dodekaſche (Duodecimale); dyadiſche, pentadiſche ſexagenale oder ſexageſimale, tetradiſche, ſ. Zahlenſyſtem, und die Artikel, Dekadik, Dodekadik, Dyadik, Pentadik, Sexageſimalrechnung, Tetraktys.

Geſchichte der Arithmetik.

Wahrſcheinlich iſt von der Arithmetik, wie von mehreren Kenntniſſen, der Urſprung bey den Indiern anzunehmen, allein es fehlt uns an Nachrichten darüber. Wir haben dieſem Volke unſere Bezeichnungsart der Zahlen zu danken. Ägypten rühmte ſich in der Arithmetik die Lehrmeiſterinn anderer Nationen zu ſeyn, und nannte ſeinen Theut oder Thot als Erfinder der Arithmetik und Geometrie. Wie man in dem Alterthume die Erfindung der drey älteſten Wiſſenſchaften, der Arithmetik, Geometrie und Aſtronomie, vertheilt habe, ſieht man aus einer Stelle in dem Leben des Pythagoras von Porphyris, wo geſagt wird, daß dieſer die mathematiſchen Wiſſenſchaften von den Ägyptern, Chaldäern und Phöniziern der Sage nach erlernt habe. Denn die Ägypter hätten ſich von uralten Zeiten her mit der Geometrie beſchäftigt, die Phönizier mit Rechnen, die Chaldäer mit der Betrachtung des Himmels. Die Phönizier oder die Tyrier haben vermuthlich wegen ihrer Handlungsgeſchäfte ſehr früh mancherley Rechnungsregeln gefunden. Proklus ſagt in ſeinem Commentar über das erſte Buch des Euklides, daß bey ihnen wegen des Handels die wiſſenſchaftliche Kenntniß der Zahlen ihren Urſprung genommen habe. Strabo führt dieſes auch als die zu ſeiner Zeit gewöhnliche Meynung an.

Die Arithmetik der Alten hatte eine ganz andere Geſtalt als die der Neuern. Allgemeine Unterſuchungen über Verhältniſſe und Formen der Zahlen hießen bey ihnen Arith-

metik; die Zahlenrechnung hieß **Logiſtik.** Ihre unbequeme Bezeichnungsart der Zahl erſchwerte ihnen die Rechnungen ſehr. Sie mußten die Rechnungen mehr im Kopfe machen, als wir es nöthig haben, und ſich mit ſinnlichen Hülfsmitteln helfen, dergleichen Steinchen und die Rechentafel (abacus) waren. Von den zum Rechnen gebrauchten Steinchen kommen im Lateiniſchen die Redensarten her, calculos ponere, ſubducere. Im Griechiſchen iſt ψηφος ein Steinchen, und ψηφιζειν, rechnen, wofür aber auch noch ein anderes Wort vorhanden iſt.

Die Alten haben ſich vorzüglich mit den Formen und Verhältniſſen der Zahlen beſchäftigt. Sie betrachteten Arithmetik und Geometrie als bloße beſchauliche Gegenſtände, ohne auf ihre Anwendungen in bürgerlichen Geſchäften zu denken, oder wenigſtens einen Werth darauf zu legen. Die ägyptiſchen Prieſter oder Gelehrten ſcheinen den Eigenſchaften der Zahlen ſehr nachgeſpürt, und darin geheime Beziehungen auf die Einrichtungen der Welt geſucht, oder daraus eine geheime Zeichenſprache gebildet zu haben, um den Uneingeweihten ihre Kenntniſſe zu verſtecken, und dadurch ehrwürdiger zu machen. Denn Pythagoras, der ſich in der ägyptiſchen Gelehrſamkeit hatte unterrichten laſſen, und ſeine Nachfolger, webten in den Vortrag ihrer Philoſophie, wenigſtens für die exoteriſchen Schüler oder Liebhaber, vieles Symboliſche aus der Arithmetik ein. (Proclus in primum libr. Eucl. I. c. 8.) Als der wahre Sinn, den die Eingeweihten der ältern Schule gekannt hatten, verloren gegangen war, mögen die ſpäteren Anhänger dieſer Partey die arithmetiſchen Einkleidungen wörtlich genommen und mit ſpitzfindigen, phantaſtiſchen Einfällen vermehrt haben, wie es in andern Fällen auch gegangen iſt. Galilei glaubt (Syſt. coſm. p. 3.), daß die Pythagoräer ihre myſtiſchen arithmetiſchen Lehren nur dem großen Haufen hingeworfen hätten, um ihre Kenntniſſe von den tiefern Eigenſchaften der Zahlen und Irrationalgrößen ſicherer geheim zu halten, deren Bekanntmachung unter Androhung harter Strafen in der künftigen Welt verboten geweſen ſey.

Die Pythagoräer haben mancherley Formen der Zahlen erdacht, die Polygonalzahlen (als dreyeckige, viereckige u. ſ. f.) und die Pyramidalzahlen; die ebenen und körperlichen; die vollkommenen oder vollſtändigen, und ihr Gegentheil, die überſchießenden und mangelhaften Zahlen. Es war dies eine Verknüpfung der Arithmetik mit der Geometrie. Durch den nach Pythagoras genannten geometriſchen Lehrſatz kamen ſie auf die Frage, ein Zahlenquadrat mit rationaler Wurzel aus zwey ſolchen Quadraten zuſammenzuſetzen, wovon ſie auch die Auflöſung fanden, welche Proklus in ſeinem gedachten Commentar uns aufbehalten hat. Sie haben alſo den Grund zu der unbeſtimmten Analytik gelegt.

Dieſe Philoſophen erfanden auch die Berechnung der muſikaliſchen Verhältniſſe, welche ſich auf feine Beobachtungen und Vergleichungen gründet. Die Entdeckung wird dem Pythagoras ſelbſt zugeſchrieben. Die Lehre von der Zuſammenſetzung und Theilung der Verhältniſſe mußte ihnen dazu ſehr geläufig ſeyn, da hier einige kleine Unterſchiede in den Intervallen vorkommen. Ein gewiſſes kleines Intervall heißt noch jetzt das pythagoriſche Komma, (ſ. Ton, in der zweyten Abtheilung).

Der Nachricht des Boëthius (in ſeiner Geometrie, am Ende) zufolge haben die Pythagoräer eine Bezeichnung der Zahlen, wie die unſrige iſt, gehabt, und mit dieſen Zahlzeichen gerechnet. Er nennt ihre Zeichen Apices vel Characteres. Pythagoras, oder einer ſeiner Nachfolger, muß die Bezeichnungsart von den Indiern bekommen haben, da es nicht möglich iſt, daß die Indier ſie von einer kleinen Anzahl geheimnißvoller Menſchen ſollten erhalten haben. In dem Artikel, Zahlzeichen, wird hievon umſtändlicher gehandelt werden.

Die Rechnung mit Zahlen machte den Alten viele Mühe, weil ſie unſere Bezeichnung nicht hatten. Archimedes konnte die Berechnung des Umfanges eines Kreiſes nicht weiter treiben, als bis zu den Gränzen $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$, den Durchmeſſer zur Einheit genommen. Um eine gewiſſe ſehr große Zahl auszudrucken, nahm er eine geometriſche

Fortſchreitung an, theilte die Glieder derſelben in Claſſen, und bezeichnete die Zahl durch die Claſſe und die Stelle in derſelben. Seine Sprache gab ihm nur Zahlwörter bis Zehntauſend. Ptolemäus berechnete die Chorden der Winkel nur von halben zu halben Graden, und nicht weiter als bis auf $\frac{1}{3600}$ des Halbmeſſers, den er in 60 Theile theilte.

Es ſind wenige Schriften der Alten über die Arithmetik vorhanden. Die von Euklides und Diophantus ſind die einzigen wichtigen, wozu man noch zwey Schriften des Archimedes, eine über die Ausmeſſung des Kreiſes, und eine, die eine gewiſſe Berechnung enthält, als Beyſpiele ihrer numeriſchen Arithmetik nehmen kann. Im erſten Jahrhundert oder ſpäter ſchrieb Nikomachus verſchiedene arithmetiſche Bücher, unter dieſen eine Einleitung in die Arithmetik, die griechiſch zu Paris 1538 gedruckt iſt. Sie handelt von den Eigenſchaften und Formen der Zahlen, nach der bey den Pythagoräern und Platonikern beliebten Art, daher auch dieſe Schrift fünf Commentatoren gehabt hat. Die praktiſche Arithmetik dieſes Verfaſſers iſt verloren gegangen, welche uns über die Art, wie die Alten bey weitläufigen Rechnungen ſich halfen, vielleicht Licht gegeben hätte. Nikomachus hat auch über die geheimen Beziehungen der Zahlen ein Buch unter dem Titel, Theologumena Arithmetices, (griechiſch) geſchrieben, welches nicht mehr vorhanden iſt, dagegen ein anderes, unter demſelben Titel, zu Paris 1543 gedruckt worden, für deſſen Verfaſſer Jamblichus gehalten wird. In den beiden erſten Büchern der mathematiſchen Sammlungen von Pappus ſcheint einiges von dem Verfahren der Alten beim Multipliciren großer Zahlen enthalten geweſen zu ſeyn, wie man aus einem kleinen Überbleibſel ſchließen mag. Diophantus hat auſſer ſeinem großen arithmetiſchen Werke auch ein Werk über die praktiſche Arithmetik geſchrieben, das aber verloren iſt. Sein großes Werk, wovon nur die erſte Hälfte vorhanden iſt, enthält die Lehre von den Gleichungen des erſten und zweyten Grades, und

ſehr feine Unterſuchungen über gewiſſe Formen der Zahlen, zur unbeſtimmten Analytik gehörig, (ſ. Algebra und unbeſtimmte Analytik.). Zu dieſem Werke gehört noch eine ſcharfſinnige Abhandlung über die Polygonal-Zahlen. Im ſechſten Jahrhundert ſchrieb Boethius zwey Bücher von der Arithmetik, welche das Werk des Nikomachus mit Abkürzungen und Verbeſſerungen enthalten.

Nach der Einführung der jetzt gebräuchlichen Zahlzeichen in Europa, die um das Ende des zehnten Jahrhunderts geſchah, (ſ. Zahlzeichen) änderte ſich die ganze Geſtalt der Arithmetik, wiewohl langſam In England beförderte ihre Verbreitung Johannes de Sacro-Boſco (von Holywood, dem jetzigen Hallifax) durch ſein Buch, Algorismus ſeu Arithmetica introductio, die zu Venedig 1523 gedruckt erſchienen iſt. Dieſer zu ſeiner Zeit und noch lange nachher ſehr berühmte Mann ſtarb 1256. Seines Zeitgenoſſen, des Jordanus Nemorarius, Werk über die Arithmetik iſt eine theoretiſche Abhandlung nach der alten Form. Es iſt 1496 zu Paris, und 1514 daſelbſt, ganz mit gothiſcher Schrift, gedruckt. Barlaam aus Calabrien, im 14ten Jahrhundert, ſchrieb eine Arithmetik, worin er ihre gewöhnlichen Operationen erwies. Das Werk iſt 1600 zu Paris griechiſch und lateiniſch herausgegeben. Am Ende des 15ten Jahrhunderts trug der Minorit, Lucas Pacioli dal Borgo ſan Sepolcro aus den vorhandenen Schriften über die Arithmetik, Algebra und Geometrie ein Werk zuſammen, das die damahligen Kenntniſſe in der Arithmetik ziemlich zu enthalten ſcheint, (ſ. Algebra). Neben der theoretiſchen Lehre iſt auch vieles von der kaufmänniſchen Rechnung darin enthalten.

Im 16ten Jahrhundert pflegte man noch die Rechnung mit Marken (Rechenpfennigen) auf und zwiſchen parallelen geraden Linien der Rechnung mit Ziffern zuzugeſellen, daher man in dieſem Zeitraume mehrere Rechenbücher antrifft, welche beide Rechnungsarten lehren, als des Adam Riſe Rechnung auf den Linien, und Federn, welches lange Zeit ein claſſiſches Buch geweſen iſt; Simon Jacob von Coburgk Rechenbuch auf den Linien und mit

Ziffern, 1557. u. m. Die Beweiſe des Verfahrens bei Rechnungen mit Ziffern wurden nicht ſo ausführlich gegeben, als jetzt gewöhnlich iſt, weil es ſich aus dem mit Rechenmarken leicht ergab. Die Beweiſe wurden überhaupt gewöhnlich weggelaſſen. Bey Vergleichung und Zuſammenſetzung der Verhältniſſe berief man ſich auf Euklides Elemente In Stifels Arithmetica integra, einem vorzüglichen Werke aus dem 16ten Jahrhundert, findet man die erſten Begriffe von Logarithmen, auch die Binomialcoefficienten, und die magiſchen Quadrate. Die letztern ſind zwar älter, da Emanuel Moskopulus im 14ten oder 15ten Jahrhundert ein Buch darüber verfaßt hat; ſie werden aber noch bis zu Stifels Zeit wenig bekannt geweſen ſeyn.

Dem 16ten Jahrhundert verdankt man die ausführliche Berechnung der trigonometriſchen Linien, welche große Gewandtheit in der Rechnung mit Irrationalgrößen, und Aufmerkſamkeit auf Rechnungsvortheile, bey den damahligen weitläufigen Methoden dieſer Rechnung erforderte. Die Regeln, welche man in den Rechenbüchern jener Zeit für die Annäherung zu irrationalen Wurzeln antrifft, ſind noch unbequem, oder laſſen es bey einer ſehr mäßigen Annäherung bewenden. William Buckley in England, der um 1550 geſtorben ſeyn mag, gab die Regel, dem Quadrat ſechs Nullen anzuhängen, und die gefundene Wurzel durch 1000 zu dividiren.

Die Anwendungen der Rechenkunſt auf Geſchäfte des gemeinen Lebens beſtanden zu dieſer Zeit in der Regel de Tri, de Quinque, ꝛc. der Kettenregel, der Geſellſchaftsrechnung, Alligationsrechnung, zuſammengeſetzter Zinsrechnung. Die Kettenregel trifft man in des Peter Apianus (1527 und 1543), und in Simon Jacob von Coburgk Rechenbuche an. Der letztere ſagt, ſie könne gründlich durch compositionem proportionum erwieſen werden, welches er der Kürze wegen unterlaſſe. Käſtner hat die Kettenregel bey den Rechenmeiſtern des 16ten Jahrhunderts nicht angetroffen. Geſchichte der Mathematik. Th. I. S. 54.

Die Decimalrechnung war in der That bey der von Regiomontanus gemachten Einrichtung der trigonometriſchen Tafeln gebraucht. Ramus bediente ſich ihrer in ſeiner Arithmetik (1550), aber Simon Stevin war der erſte, der ſie in einer beſondern Schrift, la Pratique d' Arithmetique 1585. empfahl. Seit dieſer Zeit ward ſie in den arithmetiſchen Anweiſungen gewöhnlich gelehrt, wenn man gleich im gemeinen Leben bey den hergebrachten Eintheilungen eines Ganzen bleiben mußte. Die Abſonderung der Bruchtheile von den Ganzen durch ein Komma oder einen Punct, wie ſie jetzt geſchieht, gebraucht Stevin nicht, ſondern giebt jeder Stelle einen eigenen Namen, Prime, Secunde, u. ſ. f. und ſetzt die Zeiger derſelben in Kreiſen eingeſchloſſen neben den Ziffern hin, den Zeiger Null für die Ganzen genommen. Beyer in ſeiner Logiſtica decimali, 1619, ſetzte dafür die Zeiger *o*, ′, ″, ‴, an die Spitze der Ziffern.

Im Anfange des 17ten Jahrhunderts berechneten Neper, Briggs und Vlacq die Logarithmen. Der ſcharfſinnige Fermat in Frankreich fand manche verſteckte Eigenſchaft der Zahlen. Die Analyſis, welche nun immer mehr erweitert ward, verſchaffte auch der Zahlenrechnung Erleichterungen und Bereicherungen, als bey der Ausziehung der Wurzeln durch den binomiſchen Lehrſatz für gebrochne Exponenten, bey Summirungen von Zahlenreihen, beym Interpoliren einer Reihe gegebener Größen, in der zuſammengeſetzten Zinsrechnung, in der Berechnung der Wahrſcheinlichkeiten bey Spielen, der Leibrenten, u. m. Die Geſchichte der höhern Arithmetik iſt in der neuern Zeit mit der Geſchichte der Analyſis verbunden.

Zuſatz.

Über die Arithmetik der alten Griechen.

Ein intereſſantes Werk über die theoretiſche Arithmetik, in der Bedeutung bey den Alten, ſind die vier

arithmetiſchen Bücher des Euklides, das ſiebente bis zehnte ſeiner Elemente. Das zehnte enthält die Arithmetik der Irrationalgrößen, wovon unter dieſem Artikel ſich ein Abriß befindet. Die drey andern enthalten Lehrſätze über die Proportionen, die Primzahlen, die Quadrate, die Würfelzahlen, und die Producte aus zwey oder drey Zahlen. Euklides hat zwar ſchon das fünfte Buch ganz der Lehre von den Proportionen gewidmet; allein da geſchah es in Rückſicht auf die Geometrie. Die proportionalen Größen werden nicht alle als gleichartige angeſehen, weil in der Geometrie Verhältniſſe einer Gattung von Größen (z.B. Flächen) mit Verhältniſſen einer andern Gattung (z. B. Linien) verglichen werden. In der Arithmetik ſind alle proportionalen Größen als Zahlen gleichartig; daher es für dieſen Fall noch Sätze über die Proportionalität giebt, die dort nicht vorgetragen werden konnten. Auch giebt Euklides hier eine andere Erklärung der Proportionalität als im 5ten Buche, nämlich gerade die, welche die Neuern größtentheils gebrauchen. Denn Zahlen ſieht er immer als rationale Größen an. Jene Erklärung begreift auch den Fall irrationaler Verhältniſſe, (ſ. Proportion). Euklides zeigt (**VII. 13**) daß, wenn A: B = C : D iſt, daraus A : C = B : D folgt, und (VII. 14.), daß, wenn A : B = D : E, und B : C = E : F iſt, daher A : C = D : F wird. Jener Satz ſetzt voraus, daß alle Größen in der Proportion gleichartig ſind; der andere Satz zwar nicht, allein in dem Beweiſe, der hier gebraucht wird, wird es angenommen. Derſelbe Satz iſt der 22ſte des 5ten Buchs, wo die Gleichartigkeit nicht vorausgeſetzt wird. So hat Euklides hier (VII. 19.) den Satz, daß in einer Porportion das Product der äuſſern Glieder gleich iſt dem Producte der beiden mittlern. In der Geometrie kommen nach der Methode der Alten keine Producte von Linien, oder von Linien in Flächen vor. Euklides lehrt hier (VII. 35.) die kleinſten Zahlen finden, welche mit mehrern gegebenen Zahlen einerley Verhältniß haben. Ferner (**VIII. 2.**) mehrere Verhältniſſe, die in den kleinſten Zah-

len gegeben ſind, in andere an einander hangende zu verwandeln, als A : B ; C : D ; E : F in die a : b ; b : c ; c : d, die folgweiſe jenen gleich ſind. Vieles von Primzahlen, doch nicht von den Kennzeichen derſelben, ſondern von den Eigenſchaften derſelben bey Producten und Verhältniſſen z. B. (VII 28.) ſind zwey Zahlen, A, B, zu jeder von zwey andern, C, D, Primzahlen, ſo ſind auch die Producte, E, F, aus den erſtern und aus den leztern, Primzahlen zu einander. Und (VIII. 3.), von mehreren ſtetig proportionirten kleinſten Zahlen A, B, C . . . . N ſind die äuſſerſten, A, N, Primzahlen zu einander. Ein Product zweyer Zahlen nennt Euklides eine Flächenzahl, ein Product aus drey Zahlen eine Körperzahl. Durch dieſe Benennung ward eine Verbindung zwiſchen der Arithmetik und Geometrie erhalten, daher wir noch die zweyte und dritte Potenz einer Zahl Quadrat und Cubus nennen, ſo wie Euklides es thut. Er hat auch ähnliche Flächen und Körperzahlen deren Factoren proportionirt ſind. Der 35ſte Satz IX. lehrt eine geometriſche Progreſſion ſummiren, wovon gleich im 36. S. eine Anwendung gemacht wird. Dieſer iſt folgender: Nimmt man ſo viele von der Einheit an ſtetig verdoppelte Zahlen 1, A, B, C, D, bis deren Summe eine Primzahl, E, wird, ſo iſt das Product aus ſolcher Summe und der letzten jener Zahlen, D, eine vollſtändige Zahl (numerus perfectus), d. i. eine ſolche, welche allen ihren Theilen zuſammen genommen gleich iſt, wie 496, (ſ. vollſtändige Zahl). Dieſer merkwürdige Satz beſchließt das neunte Buch. Das ſiebente machte den Anfang mit einer praktiſch brauchbaren Anweiſung, für zwey oder mehrere gegebene Zahlen das größte gemeine Maaß zu zu finden.

Vom Archimedes iſt eine kleine Schrift übrig, ψαμμιτης, die Sandberechnung, worin die Anzahl der Sandkörner berechnet wird, die in dem Raume um die Erde bis an die Bahn der Sonne, und in dem Raume bis zu der Sphäre der Fixſterne, nach den damahligen Begriffen, Platz haben können. Dieſe große Zahl durch Worte

auszudrücken, theilt er die Progreſſion der Zehnfachen von der Eins an, 1 : 10 : 100 : 100 : 10000; etc. in Claſſen von je acht Gliedern, (Octaden). Da die Griechen für die Zahl 10000 ein beſonderes Wort, Myrias, haben, ſo zählt er von der Myrias an bis zu der Myrias von Myriaden. Dieſe iſt der Einer der zweyten Claſſe, deren achte Zahl nach unſerer Benennungsart die 15te Potenz der 10 iſt. Die dritte Octas geht von der 16ten bis mit zur 23ſten Potenz der 10. Nun bezeichnet er jede Zahl der ganzen Reihe durch die Zahl der Octas und die Stelle des Gliedes in derſelben. Die Abſicht des Archimedes iſt zu zeigen, daß die Zahl des Sandes in jedem Raume zählbar iſt, welches gewiſſe Leute damahls nicht glauben wollten. Er nimmt alſo in einem Mohnkorne 10000 Sandkörnlein an, und ſetzt, daß 40 Mohnkörner nur einen Zoll (dactylus) der Länge nach einnehmen, ob es gleich wirklich nur 25 ſind. Hieraus berechnet er die Menge der Sandkörner in einer Kugel von einem Zoll im Durchmeſſer, nämlich 640 Millionen nach unſerer Benennung, wofür er 10 der zweyten Octas nimmt. Nun berechnet er folgweiſe die Anzahl der Sandkörner von Kugeln, deren Durchmeſſer hundertfach größer werden. Statt 10000 Zoll nimmt er ein Stadium, welches kleiner iſt als jene Länge. Den Durchmeſſer der Welt, das iſt der Sonnenbahn, ſetzt Archimedes kleiner als 10000 Durchmeſſer der Erde, und den Durchmeſſer der Erde kleiner als 10000. 10000. 100 Stadien. Hieraus folgert er nun, daß die Menge Sandkörner in der ganzen Weltkugel kleiner ſeyn würde als 1000 Einer der 7ten Octas, (kleiner als 10^{51}). Nach Ariſtarchus Schätzung, ſagt Archimedes, verhalte ſich die Sphäre der Fixſterne zu der Welt wie dieſe zur Erde. Die Zahl des Sandes, welcher dieſe Sphäre ausfülle, ſey alſo kleiner als tauſend Myriaden aus der achten Octas, (10^{63}), welche die 64ſte Stelle in der Reihe von Eins an einnehmen.

Die Schrift des Archimedes über die Kreismeſſung iſt nicht bloß wegen des Inhalts ſelbſt, ſondern auch wegen der dabey angewandten Rechnung mit irrationalen

Zahlen merkwürdig. Es kam darauf an, das Verhältniß $\sqrt{3} : 1$ zwiſchen zwey andern einzuſchließen, von welchen das eine ein wenig größer, das andere ein wenig kleiner iſt. Für das umſchriebene Vieleck gebraucht Archimedes das Verhältniß 265 : 153; für das eingeſchriebene das 1351 : 780. Man ſieht nicht gleich, warum er gerade dieſe gewählt hat; und ſein Commentator, Eutocius, fügt auch nichts hierüber hinzu. Durch die Rechnung mit Kettenbrüchen findet man, daß das erſtere Verhältniß durch keine kleinern Zahlen mit drey Ziffern, und das andere durch keine kleinern Zahlen mit vier Ziffern genauer dargeſtellt werden kann. Archimedes mag in einer Tafel der Quadrate ganzer Zahlen diejenigen ausgeſucht haben, deren Dreyfaches ſehr nahe ein Quadrat iſt. Solche Quadrate ſind die von 153 und 780. Daß er ſie auf die Art, wie de Lagny (Mem. de l' Acad. des Scienc. 1723) ihn ſie finden läßt, entdeckt hätte, möchte man bezweifeln. Das Verfahren iſt zu künſtlich für den Zuſtand der alten Arithmetik.

Wenn das algebraiſche Räthſel, welches Leſſing in einer griechiſchen Handſchrift auf der Wolfenbüttelſchen Bibliothek gefunden hat, vom Archimedes oder einem ſeiner Zeitgenoſſen herrührt, wie das eine oder das andere die Aufſchrift beſagt, ſo müßte man ſchon zu ſeiner Zeit nicht allein Mittel gehabt haben, weitläufige Zahlenrechnungen zu machen, ſondern auch allgemeine Rechnungsarten und ſelbſt die unbeſtimmte Analytik gekannt haben. Aus den beiden angeführten Schriften des Archimedes ſieht man aber, daß die Zahlenrechnungen große Mühe verurſachten. Die allgemeinen Rechnungen wurden von den Alten durch Hülfe geometriſcher Conſtructionen gemacht, wie es auch von Archimedes geſchehen iſt. Wahrſcheinlich iſt jene Aufgabe von einem viel ſpätern Rechner, der ſchon die dekadiſche Arithmetik kannte, abgefaßt worden. Um Aufmerkſamkeit zu erwecken, ſchrieb er ſie dem Archimedes zu, der ſie an die Liebhaber ſolcher Unterſuchungen zu Alexandrien in einem Briefe an Eratoſthenus geſandt haben ſollte. Sie iſt in Verſen abgefaßt, wie es mit

ſolchen Aufgaben einmahl Sitte war. Der Verfaſſer einer in der gedachten Handſchrift beygefügten Auflöſung hat zwar richtige Verhältnißzahlen für die acht geſuchten Größen angegeben, aber nicht, wie er zwar behauptet, die beiden Bedingungen erfüllt, daß die Summe zweyer unter ihnen das Quadrat einer ganzen Zahl, und die Summe zweyer andern eine Trigonalzahl seyn ſollte. Die letztere Bedingung macht die Auflöſung ſchwer. Leſſings Beyträge zur Geſchichte und Litteratur, 2ter Beytr. S. 421 ff.

Ein Platoniſcher Philoſoph, Theon von Smyrna, der im erſten Jahrhundert gelebt haben mag, hat ein Buch geſchrieben, worin er mathematiſche Begriffe und Lehren erklärt, die zum Verſtändniß der Platoniſchen Schriften dienlich ſind. Bouillaud hat das davon übrig gebliebene Stück, welches die Arithmetik und Muſik betrifft, mit einigen wenigen Bemerkungen aus der Geometrie, griechiſch und lateiniſch herausgegeben: Theonis Smyrnaei eorum, quae in Mathematicis ad Platonis lectionem utilia ſunt, expoſitio. Edidit Iſmael Bullialdus. Lutet. Pariſ. 1644. 4. Das wichtigſte darin ſind die Berechnungen der muſikaliſchen Verhältniſſe. Zuerſt werden die verſchiedenen Formen der Zahlen aufgeführt; gerade, ungerade; einfache (Primzahlen), zuſammengeſetzte; Producte nach Verſchiedenheit der Factoren; Triangularzahlen, Quadrate, Pentagonalzahlen, und dergleichen. In dem Buche von den muſikaliſchen Verhältniſſen, mehrerley von Verhältniſſen, Proportionen und den verſchiedenen Mittelzahlen. Einige Spielereyen von Anwendungen der Zahlen auf ganz andere Dinge, und unnütze Bemerkungen, z. B. daß Drey die erſte Zahl iſt, die Anfang, Mittel und Ende hat; daß Sieben unter den erſten 10 Zahlen diejenige iſt, die aus keiner entſteht, und keine hervorbringt. Die Verbindung der vier erſten ganzen Zahlen, 1, 2, 3, 4, die Tetraktys, war den Pythagoräern ſehr heilig, weil ſie die vollkommenſten Conſonanzen in der Muſik, nach ihrem Syſtem, enthält, nämlich die Octave (2 : 1), die Doppel-Octave (4 : 1), die Quinte (3 : 2), die Quarte (4 : 3),

Daher ſahen ſie ſie auch als ein Bild der ganzen Welt an; daher auch ihre Eidesformel: Bey dem, der uns die Tetraktys lehrte, die Quelle der unvergänglichen Natur.

Arithmetiſch iſt, was eine Beziehung oder Verknüpfung von Zahlen anzeigt oder begreift, als arithmetiſches Complement eines Logarithmen, arithmetiſches Dreyeck, Mittel, arithmetiſche Progreſſion oder Reihe, Proportion Scale, Verhältniß. Man ſehe theils die folgenden Artikel, theils die Artikel, Complement, Mittel, Proportion, Verhältniß.

Arithmetiſches Dreyeck iſt eine Anordnung von arithmetiſchen Reihen jeder Ordnung von der niedrigſten an, folgender Geſtalt,

O.	1								
I.	1 .	1 .							
II.	1 .	2 .	1 .						
III.	1 .	3 .	3 .	1 .					
IV.	1 .	4 .	6 .	4 .	1 .				
V.	1 .	5 .	10 .	10 .	5 .	1 .			
VI.	1 .	6 .	15 .	20 .	15 .	6 .	1 .		
VII.	1 .	7 .	21 .	35 .	35 .	21 .	7 .	1 .	
VIII.	1 .	8 .	28 .	56 .	70 .	56 .	28 .	8 .	1 .
	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	O.	I.	II.	III.	IV	V.	VI.	VII.	VIII.

Die Unterſchiede der Zahlen in jeder verticalen Reihe ſind die Zahlen der nächſt vorhergehenden. Daher iſt die Reihe I. eine arithmetiſche der erſten Ordnung, die Reihe II. eine arithmetiſche der zweyten Ordnung, die Reihe III. eine ſolche der dritten, u. ſ. f. Bezeichnet man die Ordnung einer Reihe durch m, ſo daß die erſte Reihe der

gleichen Einheiten von der Ordnung o ſey; und den Abſtand der horizontalen Reihe, in welcher ſich ein Glied einer verticalen Reihe befindet, von der erſten horizontalen, in welcher ſich nur ein einziges Glied befindet, durch n, ſo iſt das mte Glied der nten horizontalen Reihe =

$$\frac{n.\,n-1.\,n-2\;.\;.\;.\;n-m+2.\;n-m+1.}{1.\;2.\;3.\;.\;.\;.\;m-1.\;m}$$

So iſt z. B. das 5te Glied der 8ten horizontalen Reihe $= \frac{8.\,7.\,6.\,5.\,4}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}$. Dieſes folgt aus §. 7 des Artikels: arithm. Reihen höherer Ordn.

Die Zahlen einer horizontalen Reihe, ſind die Binomial-Coefficienten in der Potenz $(a+b)^n$, (ſ. binomiſcher Lehrſatz.)

Jede Zahl in dem Dreyecke zeigt die Menge der Combinationen an, welche von je m verſchiedenen Dingen aus einer Anzahl, n, derſelben gemacht werden können. Z. B. aus 8 verſchiedenen Karten können je 2 genommen werden 28 mahl, je 5 . . . 56 mahl. (Combination, 15.).

Pascal wird gewöhnlich als der Erfinder des arithmetiſchen Dreyecks angeſehen. Es kommt aber ſchon in Girards Algebra vor, wie in dem Artikel, Algebra, angeführt iſt. Pascal hat eine beſondere Schrift darüber im Jahre 1665 herausgegeben, die er aber ſchon um das Jahr 1653 ausgearbeitet haben mag. Einige Fragen über die Glücksſpiele veranlaßten ihn zu Unterſuchungen über die Combinationen, und dieſe führten ihn zu der Anordnung der Combinationszahlen in Form eines Dreyecks, wodurch er verſchiedene Aufgaben über die Wahrſcheinlichkeiten in Spielen auflöſete. Hutton erinnert in ſeinem Wörterbuche der Mathematik und Phyſik, daß Pascal nicht der Erfinder dieſer Zahlentabelle ſey, ſondern daß ihre Eigenſchaften ſchon einige hundert Jahre vor ihm in Schriften vorkommen, und beruft ſich wegen des Erweiſes dieſer Behauptung auf ſeine **mathematical Tracts**,

vol. 1. p. 68. Figurirte Zahlen (das ſind die in jeder verticalen Columne) waren, wie Käſtner (Geſchichte der Mathematik I. S. 123) ſagt, ſchon lange vor Stifel bekannt. Dieſer ſcheint aber in ihnen die Binomial-Coefficienten für Potenzen mit ganzen Exponenten gefunden zu haben. Pascal hat von den figurirten Zahlen zuerſt Gebrauch gemacht, die Menge der Combinationen von m Dingen aus einer Anzahl n derſelben bequem zu finden.

Arithmetiſche Reihe oder **Progreſſion** iſt eine Folge von Größen, deren jede von der vorhergehenden um eine gegebene Größe unterſchieden iſt. Je drey auf einander folgende machen eine zuſammenhangende (ſtetige) arithmetiſche Progreſſion aus. Z. B. die Reihe der natürlichen Zahlen, der geraden, oder ungeraden.

1. Das erſte Glied eines Stücks einer arithmetiſchen Reihe heiße a; der Unterſchied von dem folgenden ſey $\pm d$; das xte Glied der Reihe ſey $= y$, ſo iſt $y = a \pm (x-1)d$. Dieſes iſt das **allgemeine** Glied der arithmetiſchen Reihe.

2. Wenn der Unterſchied d additiv iſt, ſo iſt die Reihe **zunehmend** oder wachſend; iſt d ſubtractiv, ſo iſt die Reihe **abnehmend**. Die Reihe bricht nicht ab, wenn in dem letztern Falle $(x-1)d$ größer als a iſt. Vielmehr machen die beiden Reihen, worin das Glied a und der Unterſchied d gemeinſchaftlich ſind, das Vielfache des Unterſchiedes aber entgegengeſetzte Vorzeichen hat, eine einzige Reihe aus, in welcher die Glieder einen gemeinſchaftlichen Unterſchied haben. Diejenigen Glieder, worin $(x-1)d$ größer als a iſt, und das Vorzeichen — hat, haben die abſolute Quantität $(x-1)d-a$, bekommen aber das Vorzeichen —, wodurch ſie als Größen angeſehen werden, die kleiner ſind, als die mit + bezeichneten, worin $(x-1)d$ kleiner als a oder auch additiv iſt, weil ſie dieſen nur durch die Addition einer gewiſſen Größe gleich werden. Bey benannten Größen bezeichnet das Vorzeichen — eine beſondere entgegengeſetzte Qualität, als, bey Linien und Winkeln entgegengeſetzte Lage, bey

Bewegung entgegengeſetzte Richtung, bey Geldpoſten Vermögen und Schuld. Z. B. wenn die Reihe, 9, 13, 17, 21 etc. in entgegengeſetzter Folge fortgeſetzt wird, ſo haben wir die Reihe . . . + 13, + 9, + 5, + 1, — 3, — 7, — 11, — etc. wo — 3 um 4 kleiner iſt als + 1, indem bey der Addition von 4 zu — 3 ſich + 3 gegen — 3 heben, (ſ. entgegengeſetzte Größen).

3. Jede arithmetiſche Reihe geht alſo in entgegengeſetzter Folge der Glieder, von irgend einem Gliede an, ohne abzubrechen, fort. Für dieſes Glied iſt der **Stellenzeiger** (Index) oder der Werth von $x = 0$. Man nenne es deshalb das **Anfangsglied**, indem es beiden, in entgegengeſetzter Folge fortlaufenden Reihen gemeinſchaftlich iſt, und unterſcheide es von dem **erſten Gliede**, deſſen Stellenzeiger $= 1$ iſt. Dieſes letztere iſt $= a$; jenes, das Anfangsglied, iſt $= a \pm d$. Diejenigen Glieder, für welche x poſitiv iſt, ſehe man als die **vorwärts** geordneten, diejenigen, für welche x negativ iſt, als die **rückwärts** liegenden an, der Unterſchied d mag poſitiv oder negativ ſeyn. Es können zu poſitiven Stellenzeigern negative Glieder der Reihe, und umgekehrt gehören. Z. B.

Stellenzeiger

etc. − 4; − 3; − 2; − 1; − 0; + 1; + 2; + 3; + 4; etc.

Glieder

etc. − 7, − 3; + 1; + 5; + 9; + 13; + 17; + 21; + 24; etc.

oder

etc. + 9; + 5; + 1; − 3; − 7; − 11; − 15; − 19; − 23; etc.

Das Anfangsglied in der erſtern Reihe iſt + 9, in der zweyten — 7; die erſtere iſt eine zunehmende, die andere eine abnehmende Reihe.

4. Wenn in einer arithmetiſchen Reihe die Glieder, deren Stellen 0, n, 2n, 3n, etc. — n, — 2n, 3n, etc. ſind, ausgehoben werden, ſo machen dieſe unter ſich eine

arithmetiſche Reihe aus; in welcher der Unterſchied zweye nächſten Glieder = n d iſt, wenn er in der urſprünglichen Reihe = d iſt. Die Anzahl der ausgelaſſenen Glieder zwiſchen zwey nächſten Gliedern der neuen Reihe iſt $= n - 1$.

5. Auf umgekehrte Art kann man in der urſprünglichen Reihe zwiſchen je zwey Glieder $n - 1$ Glieder einſchieben, deren gemeinſchaftlicher Unterſchied $= \frac{1}{n} d$ iſt. Das erſte derſelben nach dem Anfangsgliede iſt $= a - d + \frac{1}{n} d$, und das erſte vor demſelben $= a - d - \frac{1}{n} d$, wo d auch das entgegengeſetzte Vorzeichen haben mag.

6. Man verſtehe unter d ſowohl eine poſitive als negative Größe; die Summe von x Gliedern, von dem erſten a, bis zu dem xten, ſey = s, das xte Glied = y, ſo iſt

I. $y = a + (x - 1) d$

II. $s = \frac{1}{2} (a + y) x = \frac{1}{2} (2a + (x - 1) d) x$.

Denn man ſetze die Glieder der Reihe in umgekehrter Ordnung unter dieſelbe,

$a, a + d, a + 2d, \ldots y - 2d, y - d, y$

$y, y - d, y - 2d, \ldots a + 2d, a + d, a,$

ſo erhält man durch die Addition beider Reihen x Paare Größen, deren jede $= a + y$; alſo $2s = (a + y) x = (2a + (x - 1) d) x$.

Z. B. $1 + 5 + 9 + 13 \ldots + 401 = \frac{1}{2}. 402. 101 = 20301$.

7. Der Satz gilt auch, wenn d negativ iſt, und wenn das erſte oder das letzte Glied negativ iſt, z. B. $21 + 17 \ldots - 7 - 11 = \frac{1}{2}. 10. 9 = 45$.

8. Im bürgerlichen Leben kommen einige Anwendungen der arithmetiſchen Progreſſion vor. An einem Walmendache nimmt die Anzahl der Ziegel jeder Reihe in ei-

ner ſolchen Fortſchreitung von oben nach unten zu. An der ſchmalen Seite iſt zu oberſt ein Ziegel, an der breiten iſt das Anfangsglied der Reihe die Zahl der Ziegel auf der Forſt. — Wenn ein Brunnen gegraben wird, ſo pflegt jede Elle nach Maaßgabe der Tiefe bezahlt zu werden, ſo daß der Lohn in einer arithmetiſchen Progreſſion zunimmt. Eben ſo bey dem Ausmauern eines Brunnen. Bey der Aufführung hoher Mauern muß das Arbeitslohn auch mit der Höhe größer werden. Moivre ſetzte anſtatt der Reihe, nach welcher eine Anzahl gleichjähriger Perſonen abſtirbt, eine arithmetiſche, um darnach die Leibrenten leichter zu berechnen. Dieſe Methode iſt aber fehlerhaft. Eine ſehr wichtige Anwendung der arithmetiſchen Reihe für die ganze rechnende Mathematik ſind die Logarithmen.

9. Vermittelſt der beiden Gleichungen: I. $y = a + (x - 1)d$. II. $s = \frac{1}{2}(a + y)x$, kann man zwey der fünf Größen, a, d, x, y, s, finden, wenn die drey andern gegeben ſind. Dieſes giebt zwanzig verſchiedene Aufgaben, da drey Größen aus fünf auf zehnerley Art genommen werden können, und von den beiden übrigen entweder die eine oder die andere geſucht werden mag.

10. Es iſt nicht nöthig, alle dieſe zwanzig Gleichungen zu entwickeln. Nur diejenigen, in welchen die geſuchte Größe auf die zweyte Potenz ſteigt, mögen zu Beiſpielen dienen.

I. Es ſey die Anzahl der Glieder durch das erſte Glied, den Unterſchied und die Summe zu beſtimmen. Aus den beiden Gleichungen, I. $y = a + (x - 1)d$, und II. $2s = (a + y)x$, iſt nun y herauszuſchaffen. Man ſetze in II. den Werth von y aus I. ſo iſt $2s = (2a + (x - 1)d)x$, daher $dx^2 + (2a - d)x = 2s$, folglich (Gleichung II. 6.)

$$x = -\frac{2a - d}{2d} \pm \frac{\sqrt{((2a-d)^2 + 8ds)}}{2d}.$$

Wie das untere Vorzeichen ſeine Anwendung finde, wird hernach an einem Beyſpiele gezeigt werden.

II. Wird ſtatt des erſten Gliedes das letzte Glied gegeben, ſo iſt d negativ in Abſicht des vorher gebrauchten d, und die beiden äuſſerſten Glieder, a, y, werden mit einander verwechſelt. So wird erhalten

$$x = + \frac{2y + d}{2d} \pm \frac{\sqrt{((2y+d)^2 - 8ds}}{2d}.$$

III. Es ſey das letzte Glied durch das erſte Glied, den Unterſchied und die Summe zu beſtimmen. — Aus den beiden Gleichungen I. $y = a - d + dx$, und II. $2s = (a + y)x$, wird erhalten:

$$(a + y)\ (y - a + d) = 2ds,$$

das iſt

$$y^2 + dy - a(a-d) = 2ds;$$

und

$$y = -\tfrac{1}{2}d + \sqrt{(2ds + a(a-d) + \tfrac{1}{4}d^2)}.$$

IV. Wird ſtatt des letzten Gliedes das erſte geſucht, ſo iſt durch eine Vertauſchuug, wie in II.

$$a = + \tfrac{1}{2}d \pm \sqrt{(y(y+d) + \tfrac{1}{4}d^2 - 2ds)}.$$

11. Exempel. Es ſey $a = 10$; $d = +4$; $s = 384$, ſo iſt $x = -2 \pm 14$; $y = -2 \pm 56$. Hier gehört $y = +54$ zu $x = +12$; und $y = -58$ zu $x = -16$. Es iſt nämlich $+54$ das zwölfte Glied in der Reihe 10, 14, etc. und -58 das Glied, deſſen Stellenzeiger -16 iſt, in derſelben Reihe, aber rückwärts genommen. Die arithmetiſche Summe der Glieder iſt freylich eine andere von $+10$ bis zu -58, als von $+10$ bis zu $+54$; allein es iſt doch das Product $(10 + 54)(+12) = (10 - 58)(-16) = +768$, deſſen Hälfte $= 384$, die Summe der Glieder von 10 bis $+54$ iſt. Die arithmetiſche Summe der 18 Glieder von $+10$ bis -58, mit Beobachtung der Vorzeichen, iſt $= \tfrac{1}{2}(10 - 58) \cdot 18 = -432$.

In Pasquich's Analyſis 1 Th. §. 144 ſind alle zwanzig Gleichungen entwickelt. In der Gleichung XII. iſt ein Druckfehler. Das Vorzeichen der Wurzelgröße iſt bloß + genommen.

Arithmetiſche Reihen höherer Ordnungen ſind diejenigen, deren zweyte, oder dritte, oder eine der folgenden Reihen der Unterſchiede beſtändige Glieder enthält. Wenn die Unterſchiede der erſten Unterſchiede der Glieder, oder die zweyten Unterſchiede, beſtändige endliche Größen ſind, ſo iſt die Reihe eine arithmetiſche der zweyten Ordnung. Sind die zweyten Unterſchiede veränderlich, aber ihre Unterſchiede beſtändige Größen, ſo iſt die Reihe eine arithmetiſche der dritten Ordnung. Sind dieſe zwar nicht gleich groß, aber ſind deren Unterſchiede, die vierten, gleich groß, ſo iſt die Reihe eine arithmetiſche der vierten Ordnung. Allgemein, wenn die nten Unterſchiede einer Reihe A, B, C, D, etc. gleich groß ſind, iſt ſie eine arithmetiſche Reihe der nten Ordnung.

1. Die folgende Tafel ſtellt die Formen der Unterſchiede nach ihrer Ordnung dar, wenn die Glieder einer Reihe ſind: A, B, C, D, E, F, G, etc Die vorhergehenden Glieder ſind durchgehends von den folgenden abgezogen.

2. Es wird hier leicht bemerkt, daß die Coefficienten von A, B, C, etc. die Binomial-Coefficienten aus derjenigen Potenz von a — b ſind, deren Exponens die Ordnungszahl des Unterſchiedes iſt. Es iſt nur zu zeigen, daß dieſe Form allgemein iſt. Für eine gerade Ordnungszahl n der Unterſchieds-Reihen ſey das erſte Glied in der Reihe =

$$A - nB + \frac{n.n-1.}{1.2} C - \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3} D$$
$$+ \frac{n\ldots n-3.}{1\ldots 4} E \ldots + \frac{n.n-1.}{1.2} P - nQ + R;$$

und das zweyte Glied =

$$B - nC + \frac{n.n-1.}{1.2} D - \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3} E$$
$$+ \frac{n\ldots n-3.}{1\ldots 4}. F \ldots + \frac{n.n-1.}{1.2} Q - nR + S$$

N

Hauptreihe	I Unterſchiede	II. Unterſchiede	III. Unterſchiede	IV. Unterſchiede
A	B — A	C — 2B + A	D — 3C + 3B — A	E — 4D + 6C — 4B + A
B	C — B	D — 2C + B	E — 3D + 3C — B	F — 4E + 6D — 4C + B
C	D — C	E — 2D + C	F — 3E + 3D — C	G — 4F + 6E — 4D + C
D	E — D	F — 2E + D	G — 3F + 3E — D	.
E	F — E	G — 2F + E	.	.
F	G — F	.	.	.
G	.	.	.	
.	.	.	V. Unterſchiede	VI. Unterſchiede
.	.		F — 5E + 10D — 10C + 5B — A	G — 6F + 15E — 20D + 15C — 6B + A
.			G — 5F + 10E — 10D + 5C — B	
			.	.
			.	.

Jenes von dieſem abgezogen giebt das erſte Glied der (n + 1)ten Unterſchiede,

$$-A+(n+1)B-\frac{n+1\,.\,n}{1\,.\,2}C+\frac{n+1.n.n-1.}{1\,.\,2\,.\,3}D$$

$$-\frac{n+1\ldots n-2.}{1\,.\,.\,.\,4}E\ldots+\frac{1+1\,.\,n}{1\,.\,2}Q-(n+1)R+S,$$

und das zweyte Glied =

$$-B+(n+1)C-\frac{n+1\,.\,n}{1\,.\,2}D+\frac{n+1.n.n-1.}{1\,.\,2\,.\,3}E$$

$$-\frac{n+1\ldots n-2.}{1\,.\,.\,.\,4}F\ldots+\frac{n+1\,.\,n}{1\,.\,2}R-(n+1)S+T.$$

Jenes von dieſem abgezogen giebt das erſte Glied in der Reihe der (n + 2)ten Unterſchiede,

$$+A-(n+2)B+\frac{n+2\,.\,n+1.}{1\,.\,2}C-\frac{n+2\,.\,n+1\,.\,n}{1\,.\,2\,.\,3}D$$

$$-\frac{n+2\ldots n-1.}{1\,.\,.\,.\,4}E\ldots+\frac{n+2\,.\,n+1.}{1\,.\,2}R-(n+2)S+T.$$

Es erhellt alſo, daß die Form der Coefficienten immer dieſelbe bleibt, daß ihre Vorzeichen abwechſeln, und daß in den Unterſchiedsreihen mit einer geraden Ordnungszahl das Vorzeichen + den Anfang macht, bey einer ungeraden Ordnungszahl das Vorzeichen —. Da nun die Form der Coefficienten für die berechneten Unterſchiede gilt, ſo gilt ſie auch für alle folgende. Sie iſt übereinſtimmend mit der Form der Binomial-Coefficienten in der nten Potenz von a — b, wenn n die Ordnungszahl der Reihe iſt, (Binomiſcher Lehrſatz. 1.). Dieſe Coefficienten ſeyn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. nach ihrer Folge, ohne den des erſten Gliedes, nämlich 1, und zwar bloß in Abſicht auf die Quantität, ſo iſt das erſte Glied der nten Unterſchiedsreihe

$$=\pm(A-\mathfrak{A}B+\mathfrak{B}C-\mathfrak{C}D+\mathfrak{D}E\ldots\ldots,$$

$$\ldots\mp\mathfrak{B}\overset{-1}{N}+\mathfrak{A}N\pm\overset{+1}{N})$$

wo das obere Vorzeichen für ein gerades n, das untere

für ein ungerades zu nehmen iſt, und N das nte Glied der Reihe bedeutet; das vorhergehende und folgende Glied ſind durch den Buchſtaben N mit dem Stellenzeichen darüber angedeutet.

Für das zweyte Glied der Unterſchiede wird jedes Glied der Reihe mit dem nächſt folgenden vertauſcht, für das dritte Glied mit dem zweyten folgenden, u. ſ. f.

3. Es iſt in einer arithmetiſchen Reihe der

I. Ordn. $A - 2B + C = 0$

II. Ordn. $A - 3B + 3C - D = 0$

III. Ordn. $A - 4B + 6C - 4D + E = 0$

IV. Ordn. $A - 5B + 10C - 10D + 5E - F = 0$

V. Ordn. $A - 6B + 15C - 20D + 15E - 6F + G = 0$

⸗ ⸗ ⸗ ⸗ ⸗ ⸗

⸗ ⸗ ⸗ ⸗ ⸗

nten Ordnung $A - \mathfrak{A}B + \mathfrak{B}C - \mathfrak{C}D + \mathfrak{D}E \ldots$

$$\ldots \pm \mathfrak{C}\overset{-1}{N} \mp \mathfrak{B}N \pm \mathfrak{A}\overset{+1}{N} \mp \overset{+2}{N} = 0$$

wo A, B, C, D, etc. irgend welche auf einander folgende Glieder der Hauptreihe bedeuten, und in der allgemeinen Formel, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. die Binomial-Coefficienten aus der $(n+1)$ten Potenz von $(a-b)$ ſind. Die Formel für eine Ordnung enthält ſo viele Glieder, als die um zwey vergrößerte Ordnungszahl (Exponens der Ordnung) Einer enthält.

Denn in einer arithmetiſchen Reihe der erſten Ordnung, oder der gemeinen, ſind die erſten Unterſchiede beſtändig, alſo die zweyten Null. In einer arithmetiſchen Reihe der zweyten Ordnung ſind die zweyten Unterſchiede unveränderlich, alſo die dritten Null. Auf ähnliche Art für die höhern Reihen.

4. Die Glieder einer arithmetiſchen Reihe irgend einer Ordnung machen eine rücklaufende Reihe aus, in welcher die Scale der Relation aus den Binomial-Coefficienten in einer Potenz von $(a-b)$ beſteht, deren Expo-

nens um Eins größer iſt als der Exponens der Ordnung. So iſt in der

I. Ordn.	$C = 2B - A$
II. Ordn.	$D = 3C - 3B + A$
III. Ordn.	$E = 4D - 6C + 4B - A$
IV. Ordn.	$F = 5E - 10D + 10C - 5B + A$

u. ſ. f.

(Vergleiche rücklaufende Reihe.)

5. Beyſpiele von arithmetiſchen Reihen höherer Ordnungen geben die Potenzen der natürlichen Zahlen oder auch ſolcher, die in gemeiner arithmetiſcher Progreſſion ſind; die Polygonalzahlen; die Binomial-Coefficienten in einer beſtimmten Stelle oder die figurirten Zahlen; die Coefficienten in der Potenz $(a-b)^{-n}$, wo n eine ganze Zahl iſt, als

die Würfel,

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, etc.;

die Pentagonalzahlen,

1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, etc.

die figurirten Zahlen der vierten Ordnung,

1, 5, 15, 35, 70, 126, 210, etc.

die Binomial-Coefficienten in $(a-b)^{-6}$,

6, 21, 56, 126, 252, 462, 792, etc.

6. Eine arithmetiſche Reihe von irgend einer Ordnung kann auch als eine Reihe einer höhern Ordnung betrachtet werden. Denn wenn die mten Unterſchiede Null ſind, ſo ſind deren Unterſchiede und alle folgenden auch Null. Z. B. für eine Reihe der erſten Ordnung iſt $A - 2B + C = 0$, und $B - 2C + D = 0$, alſo durchs Abziehen $A - 3B + 3C - D = 0$, wie für eine Reihe der zweyten Ordnung. Nun iſt eben ſo $B - 3C + 3D - E = 0$, alſo iſt $A - 4B + 6C - 4D + E = 0$, wie für eine Reihe der dritten Ordnung. Den Beweis kann man auf dieſe Art leicht allgemein machen.

7. Das Anfangsglied einer arithmetiſchen Reihe ſey dasjenige, deſſen Stelle durch o bezeichnet wird, und ſey = A; das Anfangsglied in der Reihe der erſten Unterſchiede ſey = a; in der Reihe der zweyten = b; in der Reihe der dritten = c; in der Reihe der vierten = d, u. ſ. f. Die Stelle dieſer Anfangsglieder werde ebenfalls durch o bezeichnet. Das Glied der Hauptreihe in der xten Stelle ſey = y, ſo iſt

$$y = A + x.a + \frac{x.\overline{x-1}.}{1.2} b + \frac{x.\overline{x-1}.\overline{x-2}}{1.2.3} c$$
$$+ \frac{x.\overline{x-1}.\overline{x-2}.\overline{x-3}.}{1.2.3.4} d + \frac{x....\overline{x-4}.}{1...5} e + \text{etc.}$$

Die Reihe geht ſo lange fort, bis entweder ein Coefficient (da x eine ganze Zahl bedeutet), oder ein Unterſchiedsglied mit allen folgenden Null wird.

Der Beweis erhellt aus der Zuſammenſetzung der Glieder der Hauptreihe aus den erſten Gliedern der Unterſchiedsreihen, welche folgende Tafel zeigt, worin Δy die Glieder der erſten Unterſchiedsreihe, $\Delta^2 y$ die Glieder der zweyten, $\Delta^3 y$ die der dritten u. ſ. f. bedeuten. Jedes Glied der Hauptreihe ſowohl als der Differenzenreihen wird aus dem vorhergehenden in ſeiner Reihe, und dem in der nächſten Differenzenreihe mit dieſem gleichſtelligen zuſammen geſetzt. Die Allgemeinheit der Form wird wie §. 2 bewieſen.

8. Die Anfangsglieder der Differenzenreihen können auch negativ ſeyn, einige oder alle. Wenn alle negativ ſind, ſo nehmen die Glieder der Hauptreihe unbedingt ab, und deſto mehr, je weiter ſie von dem Anfangsgliede entfernt ſind, ſo wie ſie auf ſolche Art wachſen, wenn alle Anfangsglieder der Differenzenreihen poſitiv ſind, wie es bisher angenommen iſt. Sind aber einige Anfangsglieder der Differenzenreihen negativ, ſo können die entferntern Glieder der Hauptreihe weniger zunehmen, als die dem Anfangsgliede nähern Glieder; es kann das Zunehmen ſich in ein Abnehmen verwandeln, und umgekehrt. Dieſe Wechſel können öfterer als einmahl erfolgen. Die Glie-

Stellenzahlen,

	0	1	2	3	4
y	A	$A+a$	$A+2a+b$	$A+3a+3b+c$	$A+4a+6b+4c+d$
Δy	a	$a+b$	$a+2b+c$	$a+3b+3c+d$	$a+4b+6c+4d+e$
$\Delta^2 y$	b	$b+c$	$b+2c+d$	$b+3c+3d+e$	$b+4c+6d+4e+f$
$\Delta^3 y$	c	$c+d$	$c+2d+e$	$c+3d+3e+f$	.
$\Delta^4 y$	d	$d+e$	$d+2e+f$		5
$\Delta^5 y$	e	$e+f$			$A+5a+10b+10c+5d+e$
$\Delta^6 x$	f	.	.	.	$a+5b+10c+10d+5e+f$
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.		6
.	.	.	.		$A+6a+15b+20c+15d+6e+f$
					.

der der Hauptreihe können ſtatt poſitiver Werthe negative bekommen, und wiederum aus negativen Größen poſitive werden. Z. B. die Anfangsglieder der Differenzenreihen der Potenzen der ganzen Zahlen nach ihrer Folge ſind alle poſitiv, und die Potenzen wachſen immer deſto mehr, je größer die Wurzeln ſind; hingegen ſind die Anfangsglieder der Differenzenreihen von den Wurzeln der ganzen Zahlen abwechſelnd poſitiv und negativ, wie man ſich es aus der Tafel der Quadratwurzeln in Lamberts Zuſätzen zu den log. und trigon. Tabellen, Tab. XLI. deutlich machen kann. Die Werthe einer Gleichung, wenn die Werthe der unbekannten Größe in derſelben die ganzen Zahlen nach ihrer Folge, oder ſonſt eine arithmetiſche Reihe der erſten Ordnung ſind, machen häufig eine Reihe aus, deren Glieder theils poſitiv, theils negativ ſind, und für welche die Anfangsglieder ihrer Differenzenreihen auf gleiche Art wechſeln.

9. Wenn x negativ genommen wird, ſo iſt y ein Glied, das ſo viele Stellen von dem Anfangsgliede rückwärts abſteht, als oft x die Einheit enthält. Es ſey z die Stellenzahl des Gliedes abſolut genommen, ſtatt $-x$, ſo iſt

$$y = A - z.a + \frac{z.z+1.}{1.2}b - \frac{z.z+1.z+2.}{1.2.3}c$$
$$+ \frac{z.z+1.z+2.z+3.}{1.2.3.4}d - \frac{z...z+4.}{1..4}e + \text{etc.}$$

10. Es ſey $x = \frac{u}{\Delta u}$, wo u irgend eine benannte Größe, oder auch eine unbenannte, ohne Rückſicht auf eine Einheit, bedeutet, die ſich mit x gleichförmig verändert. Ferner ſey $a = \Delta A$; $b = \Delta^2 A$; $c = \Delta^3 A$, u. ſ. f. ſo iſt

$$y = A + u.\frac{\Delta A}{\Delta u} + \frac{u(u-\Delta u)}{1.2}.\frac{\Delta^2 A}{\Delta u^2}$$
$$+ \frac{u(u-\Delta u)(u-2\Delta u)}{1.2.3}.\frac{\Delta^3 A}{\Delta u^3}$$

$$+ \frac{u(u-\Delta u)(u-2\Delta u)(u-3\Delta u)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{\Delta^4 A}{\Delta u^4} + \text{etc.}$$

Dieſe Formel ſtellt y aus der zwiſchen y und u gegebenen Gleichung dar, wenn dieſe keine geſonderte Gleichung für y iſt. Sie führt zu dem Taylorſchen Lehrſatze, (ſ. dieſen).

Summirung der arithmetiſchen Reihen.

11. Setzt man das Anfangsglied einer Hauptreihe $= 0$, ſo iſt das xte Glied derſelben nach dieſem (das Glied zu der Stellenzahl x) die Summe von x Gliedern der erſten Differenzenreihe, gezählt von demjenigen an, deſſen Stellenzahl 0 iſt, bis mit zu dem Gliede in der Stelle $x - 1$.

Denn es ſey die Hauptreihe: A, B, C, D . . . P, Q, R, S, ſo iſt die erſte Differenzenreihe: $B - A$; $C - B$; $D - C$; . . . . $Q - P$; $R - Q$; $S - R$. Die Summe der Glieder in dieſer letztern Reihe iſt $= S - A$; alſo $= S$, wenn $A = 0$ iſt.

12. Die Summe einer Anzahl Glieder aus einer arithmetiſchen Reihe irgend einer Ordnung zu finden, ſehe man dieſelben als die Unterſchiede einer arithmetiſchen Reihe der nächſt höhern Ordnung an, in welcher das Anfangsglied $= 0$ iſt. Das Anfangsglied der Reihe ſey $= A$; das erſte Glied der erſten Unterſchiede $= \Delta A$; das erſte der zweyten $= \Delta^2 A$: das erſte der dritten $= \Delta^3 A$, u. ſ. f. Die Anzahl der Glieder $= r$; ihre Summe $= \Sigma$, ſo iſt

$$\Sigma = rA + \frac{r.r-1.}{1.2} \Delta A + \frac{r.r-1.r-2.}{1.2.3} \Delta^2 A$$
$$+ \frac{r.r-1.r-2.r-3.}{1.2.3.4} \Delta^3 A + \text{etc.}$$

Denn es ſeyn die Glieder der gegebenen Reihe A, B, C . . . R, S, T; der ſummirenden α, β, γ . . . ϱ, σ, τ, ſo daß $\alpha = A$; $\beta = A + B$, $\gamma = A + B$

$+ C \ldots ; \varrho = A + B \ldots + R ; \sigma = A + B \ldots + S ;$
$\tau = A + B \ldots + S + T.$

Dieſe beiden Reihen mit ihren Stellenzeigern ordne man folgendergeſtalt zuſammen.

	0	1	2	3	....	r−3	r−2	r−1	r
I.	A	B	C	D	.....	R	S	T	..
II.	0	α	β	γ	....		ϱ	σ	τ

Hier iſt τ das rte Glied nach dem Anfangsgliede 0, und das erſte Glied der Unterſchiede für die Reihe II. iſt das Anfangsglied A der Reihe I; das erſte Glied der zweyten Unterſchiede für jene iſt das erſte Glied der erſten Unterſchiede für dieſe, und ſo ferner, alſo iſt (7)

$$\tau = \Sigma = r A + \frac{r.r-1.}{1.2} \Delta A + \frac{r.r-1.r-2.}{1.2.3} \Delta^2 A$$
$$+ \text{etc.}$$

13. Exempel I. Es ſey die Reihe der figurirten Zahlen von der zweyten Ordnung, 1, 3, 6, 10 ... $\frac{r.r+1.}{1.2}$ deren Anzahl r iſt, zu ſummiren. Hier iſt $A = 1$; $\Delta A = 2$; $\Delta^2 A = 1$; $\Delta^3 A = 0$, alſo iſt die Summe

$$\Sigma = r.1 + \frac{r.r-1.}{1.2}.2 + \frac{r.r-1.r-2.}{1.2.3}.1 =$$
$$\tfrac{1}{6}(r^3 + 3r^2 + 2r) = \tfrac{1}{6}r(r+1)(r+2).$$

14. Exempel II. Es ſey die Reihe der Quadrate der natürlichen Zahlen 1, 4, 9, 16 ... r^2 zu ſummiren. Hier iſt $A = 1$; $\Delta A = 3$; $\Delta^2 A = 2$; $\Delta^3 A = 0$, (Buchſtabenrechnung, 20); alſo iſt, wenn die Summe der Quadrate durch $\Sigma . r^2$ bezeichnet wird,

$$\Sigma . r^2 = r.1 + \frac{r.r-1.}{1.2}.3 + \frac{r.r-1.r-2.}{1.2.3}.2$$
$$= \tfrac{1}{6}r(2r^2 + 3r + 1) = \tfrac{1}{6}r(r+1)(2r+1)$$

15. Exempel III. Die Reihe der Würfel der natürlichen Zahlen, 1, 8, 27, 64 ... $+ r^3$, zu ſummi-

ren. Hier iſt $A = 1$; $\Delta A = 7$; $\Delta^2 A = 12$; $\Delta^3 A = 6$; $\Delta^4 A = 0$. Daher iſt die Summe der Würfel,

$$\Sigma . r^3 = r . 1 + \frac{r . r-1 .}{1 . 2} . 7 + \frac{r . r-1 . r-2 .}{1 . 2 . 3} . 12$$
$$+ \frac{r . r-1 . r-2 . r-3 .}{1 . 2 . 3 . 4} . 6,$$

das iſt

$$\Sigma . r^3 = \tfrac{1}{4}(r^4 + 2 r^3 + r^2) = \tfrac{1}{4} r^2 (r + 1)^2 .$$

Die Wurzel aus dieſem Quadrate iſt eine Triangularzahl, eine aus der Reihe 1, 3, 6, 10, 15, 21, etc. Peletarius, im 16ten Jahrh. hat dieſe Bemerkung gemacht.

16. Auf dieſe Art laſſen ſich auch die Summen höherer Potenzen finden. Das Verfahren wird aber ſchon für die Biquadrate beſchwerlich. Man muß die Theile der Summe erſtlich auf einen gemeinſchaftlichen Nenner bringen, dieſen und den gemeinſchaftlichen Factor abſondern, die Theile des vieltheiligen zweyten Factors mit beſondern Buchſtaben bezeichnen, und ſie nach und nach vereinigen. Zur Übung im Rechnen iſt das dienlich. In dem Artikel, Potenz, werden Formeln zur Summirung der Potenzen mitgetheilt, eine involutoriſche und eine evolutoriſche.

17. Es ſey A, B, C . . . R, S, T eine arithmetiſche Reihe der nten Ordnung, aus r Gliedern beſtehend; man ſoll die Summe der Reihe $r A + (r - 1) B + (r - 2) C . . . . + 3 R + 2 S + T$ finden.

Es iſt, mit Beybehaltung der vorher gebrauchten Bezeichnungen, dieſe Summe,

$$\Sigma = \frac{r+1 . r}{1 . 2} A + \frac{r+1 . r . r-1 .}{1 . 2 . 3} \Delta A$$
$$+ \frac{r+1 . r . r-1 . r-2 .}{1 . 2 . 3 . 4} \Delta^2 A$$

$$+ \frac{r+1.r.r-1.r-2.r-3.}{1.2.3.4.5} \Delta^3 A + \text{etc.}$$

Denn man formire aus der gegebenen Reihe die ſummirende, α, β, γ, ... ϱ, σ, τ, und aus dieſer die zweyte ſummirende, a, b, c .... r, s, t, ſo daß $a = \alpha$; $b = \alpha + \beta$; $c = \alpha + \beta + \gamma$; etc. und $t = \alpha + \beta + \gamma \ldots + \sigma + \tau$ iſt. Da

$$\begin{aligned}
\alpha &= A \\
\beta &= A + B \\
\gamma &= A + B + C \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\varrho &= A + B + C \ldots\ldots + R \\
\sigma &= A + B + C \ldots\ldots + R + S \\
\tau &= A + B + C \ldots\ldots + R + S + T,
\end{aligned}$$

ſo iſt

$$t = rA + (r-1)B + (r-2)C + \ldots + 3R + 2S + T.$$

Die geſuchte Summe iſt alſo das rte Glied der zweyten ſummirenden Reihe, deren Glieder die ſummatoriſchen für die Glieder der erſten ſummirenden Reihe zu der gegebenen ſind.

Man ordne nun die drey Reihen folgendergeſtalt nebſt ihren Stellenzahlen zuſammen, und bezeichne die Stelle des Anfangsgliedes, wie bisher, durch o.

Stellen.	o; 1, 2, 3, ...	r−2,	r−1, r	r+1
I. Reihe.	A, B, C, D, ...	S,	T, ..	..
II.	o, α, β, γ, ...	ϱ,	σ, τ,	..
III.	o, o, a, b, ...	.	r, s,	t

Hier iſt in der dritten Reihe das Glied t, oder die geſuchte Summe, das (r+1)te Glied nach dem Anfangsgliede; das Anfangsglied derſelben Reihe iſt Null; das erſte

Glied der erſten Unterſchiede iſt auch Null; das erſte der zweyten iſt $= A$; das erſte der dritten ΔA; das erſte der vierten $= \Delta^2 A$, u. ſ. f. Man hat alſo in der Formel (7.) für die dortigen

$$y, A, a, b, c, d, e, \ldots x$$

zu ſetzen

$$t, o, o, \Delta A, \Delta^2 A, \Delta^3 A, \Delta^4 a, \ldots r+1.$$

So erhält man die angegebene Formel für t, das iſt, für die Summe Σ.

Eine Anwendung kommt in der Goniometrie, IV. vor.

Fernere Unterſuchungen über die arithmetiſchen Reihen.

18. Die Reihe A, B, C, D, E, etc. ſey eine arithmetiſche Reihe der nten Ordnung, für welche das beſtändige Glied der nten Unterſchiede iſt $= \alpha$; ſo iſt die Reihe A, 2B, 3C, 4D, 5E, etc. eine arithmetiſche Reihe der $(n+1)$ten Ordnung, für welche das beſtändige Glied der $(n+1)$ten Unterſchiede iſt $= (n+1)\alpha$.

Das nte Glied der gegebenen Reihe ſey $= N$, die folgenden ſeyn N', N'', N''', N^{IV}, u. ſ. f. das nächſt vorhergehende ſey $'N$, das Glied A für das erſte genommen. Die Binomial-Coefficienten aus der nten Potenz ſeyn $^n\mathfrak{A}$, $^n\mathfrak{B}$, $^n\mathfrak{C}$ etc. aus der $(n+1)$ten Potenz $^{n+1}\mathfrak{A}$, $^{n+1}\mathfrak{B}$, $^{n+1}\mathfrak{C}$, etc. (ſ. Binomial-Coeffic. 1). Das erſte und hier auch beſtändige Glied der nten Unterſchiede iſt, nach (2),

$$\pm(A - {}^n\mathfrak{A}B + {}^n\mathfrak{B}C - {}^n\mathfrak{C}D + {}^n\mathfrak{D}E \ldots$$
$$\ldots \pm {}^n\mathfrak{B}\,'N \mp {}^n\mathfrak{A}N \pm N') = \alpha,$$

wo das obere Vorzeichen für ein gerades n, das untere für ein ungerades zu nehmen iſt.

Das zweyte Glied der nten Unterſchiede iſt

$$\pm(B - {}^n\mathfrak{A}C + {}^n\mathfrak{B}D - {}^n\mathfrak{C}E + {}^n\mathfrak{D}F \ldots$$
$$\ldots \pm {}^n\mathfrak{B}N \mp {}^n\mathfrak{A}N' \pm N'') = \alpha.$$

Weil die $(n+1)$ten Unterſchiede $= 0$ ſind, ſo iſt (3),

$$\pm(A - {}^{n+1}\mathfrak{A}B + {}^{n+1}\mathfrak{B}C - {}^{n+1}\mathfrak{C}D + {}^{n+1}\mathfrak{D}E \ldots$$
$$\ldots \mp {}^{n+1}\mathfrak{B}N \pm {}^{n+1}\mathfrak{A}N' \mp N'') = 0.$$

Um dieſe Gleichung mit der zweyten Formel für α zu verbinden, bemerke man, daß

$(n+1).\,1 = 1.\,{}^{n+1}\mathfrak{A}$; $(n+1).\,{}^{n}\mathfrak{A} = 2.\,{}^{n+1}\mathfrak{B}$;
$(n+1).\,{}^{n}\mathfrak{B} = 3.\,{}^{n+1}\mathfrak{C}$; $(n+1).\,{}^{n}\mathfrak{C} = 4.\,{}^{n+1}\mathfrak{D}$;
$(n+1).\,{}^{n}\mathfrak{D} = 5.\,{}^{n+1}\mathfrak{E}$; etc.

(ſ. Binomial-Coefficienten, 9). Man multiplicire die zweyte Formel für α mit $n+1$, ſo iſt, mit Anwendung dieſer Subſtitutionen,

$$\pm({}^{n+1}\mathfrak{A}.1B - {}^{n+1}\mathfrak{B}.2C + {}^{n+1}\mathfrak{C}.3D - {}^{n+1}\mathfrak{D}.4E$$
$$\ldots\ldots \pm {}^{n+1}\mathfrak{B}.(n-1)N \mp {}^{n+1}\mathfrak{A}.nN' \pm (n+1)N'')$$
$$= (n+1)\alpha.$$

Wegen der Coefficienten in dem letzten Theile der Formel bemerke man, daß der erſte Coefficient, ${}^{n+1}\mathfrak{A}$, in der $(n+1)$ten Potenz zugleich der $n$te iſt; der zweyte, ${}^{n+1}\mathfrak{B}$, zugleich der $(n-1)$te, u. ſ. f.

Von dieſer Gleichung ſubtrahire man die Formel für die $(n+1)$ten Unterſchiede, und vertauſche ſowohl die Vorzeichen der einzelnen Theile als des Ganzen mit den entgegengeſetzten, und es entſteht nun die Gleichung,

$$\mp(A - {}^{n+1}\mathfrak{A}.2B + {}^{n+1}\mathfrak{B}.3C - {}^{n+1}\mathfrak{C}.4D$$
$$+ {}^{n+1}\mathfrak{D}.5E$$
$$\ldots \mp {}^{n+1}\mathfrak{B}.nN \pm {}^{n+1}\mathfrak{A}(n+1)N' + (n+2)N'')$$
$$= (n+1)\alpha.$$

Dieſer Werth von $(n+1)\alpha$ hat die Form der $(n+1)$ten Unterſchiede für die Hauptreihe A, $2B$, $3C$, $4D$, $5E \ldots nN$, $(n+1)N'$, $(n+2)N''$. Alſo iſt der $(n+1)$te Unterſchied dieſer $n+2$ Größen $= (n+1)\alpha$.

Auf gleiche Art entſteht aus je $(n+2)$ auf einander folgenden Gliedern der angenommenen Reihe der $n$ten Ord-

nung, z. B. D, E, F . . N^{IV}, N^{V} die Reihe der (n + 1)ten Ordnung, D, 2E, 3F . . (n + 1)N^{IV}, (n + 2)N^{V}, deren (n + 1)te Differenzenreihe das beſtändige Differenzglied (n + 1)α enthält. Es iſt aber 3D + 3E + 3F . . . 3N^{IV}. 3N^{V} eine Reihe der nten Ordnung, deren (n+1)te Differenzen alle = 0 ſind. Daher bleibt die aus jener und dieſer zuſammengeſetzte Reihe, 4D + 5E, 6F. . . . (n + 4)N^{IV}, (n + 5)N^{V}, noch eine arithmetiſche Reihe der (n + 1)ten Ordnung mit dem beſtändigen Unterſchiede (n + 1)α.

Der Beweis für jedes andere Stück der Reihe iſt dieſem völlig ähnlich.

19. Exempel. Es ſey das Glied der fünften Differenzenreihe unveränderlich, nämlich

$$-(A - 5B + 10C - 10D + 5E - F) = \alpha$$

$$-(B - 5C + 10D - 10E + 5F - G) = \alpha,$$

ſo iſt jedes Glied der ſechſten Differenzenreihe = 0, nämlich

$$A - 6B + 15C - 20D + 15E - 6F + G = 0.$$

Dazu addire man das ſechsfache des zweyten Ausdrucks von α, nämlich

$$-(6B - 30C + 60D - 60E + 30F - 6G) = 6\alpha,$$

ſo iſt

$$A - 6.2B + 15.3C - 20.4D + 15.5E - 6.6F + 1.7G = 6\alpha.$$

20. Die nten Potenzen der natürlichen Zahlen ſind eine arithmetiſche Reihe der nten Ordnung, deren beſtändiges Differenzglied iſt n.n—1.n—2 . . . . 4.3.2.1.

Denn da die Zahlen ſelbſt von der Eins an eine arithmetiſche Reihe der erſten Ordnung ſind, ſo ſind ihre Quadrate, die aus den Zahlen durch die Multiplication mit 1, 2, 3, 4, etc. nach der Reihe derſelben entſtehen, eine arithmetiſche Reihe der zweyten Ordnung. Multiplicirt man dieſe folgweiſe durch 1, 2, 3, etc. ſo entſteht eine Reihe der dritten Ordnung, und zugleich die Reihe der

Cuborum. Aus dieſen entſteht auf dieſelbe Art eine Reihe der vierten Ordnung, und zugleich die Reihe der Biquadrate. Auf dieſe Art entſteht zugleich die nte Reihe der Unterſchiede und die Reihe der nten Potenzen. Da das Differenzglied der erſten Reihe oder der Zahlen ſelbſt $= 1$ iſt, ſo iſt das Differenzglied der Quadrate $= 2 . 1$; der Cuborum $= 3 . 2 . 1$; der Biquadrate $= 4 . 3 . 2 . 1$; u. ſ. f. der nten Potenzen $= n . n - 1 . n - 2 \ldots\ldots 3 . 2 . 1$.

21. Die Glieder der Reihe A, B, C, D, E, etc. einer arithmetiſchen Reihe der nten Ordnung werden folgweiſe durch die Glieder der arithmetiſchen Reihe, $p + q$; $p + 2q$; $p + 3q$; $p + 4q$; etc. multiplicirt, ſo iſt die Reihe $(p + q)A$; $(p + 2q)B$; $(p + 3q)C$; $(p + 4q)D$; etc. eine arithmetiſche Reihe der $(n + 1)$ten Ordnung, deren beſtändiges Differenzglied $= (n + 1) q \alpha$, wenn α das beſtändige Differenzglied der Reihe A, B, C, D. etc. iſt.

Denn die Reihe, pA, pB, pC, pD, etc. bleibt eine arithmetiſche Reihe der nten Ordnung, wie es die Reihe, A, B, C, D. etc. iſt, da die Differenzenreihen jener aus den Differenzenreihen dieſer durch die Multiplication mit p entſtehen. Die nte Differenzenreihe enthält alſo das beſtändige Differenzglied $p\alpha$, und die $(n + 1)$te Differenzenreihe durchaus die Glieder 0. Die Reihe, qA, 2qB 3qC, 4qD, etc. iſt eine arithmetiſche Reihe der $(n + 1)$ten Ordnung, da die Reihe qA, qB, qC. qD, etc. eine Reihe der nten Ordnung iſt, zufolge des in (18) erwieſenen. Die aus der Reihe, pA, pB, pC, pD, etc. und der Reihe qA. 2qB, 3qC, 4qD, etc. zuſammengeſetzte Reihe bleibt eine Reihe der $(n + 1)$ten Ordnung, da die $(n + 1)$ten Unterſchiede der erſtern Null ſind; ſo daß die $(n + 1)$ten Unterſchiede bloß aus den Gliedern der zweyten Reihe entſtehen. Da die $(n + 1)$ten Unterſchiede der Reihe A, 2B, 3C, 4D, 5E, etc. beſtändig und $= (n + 1)\alpha$ ſind, ſo ſind für die Reihe qA, 2qB, 3qC, 4qD, etc. die $(n + 1)$ten Unterſchiede $= (n + 1) q \alpha$.

22. **Exempel.** Die figurirten Zahlen der vierten Ordnung ſind 1, 5, 15, 35, 70, 126, 210, etc. deren vierte beſtändige Unterſchiede = 1 ſind. Die Glieder dieſer Reihe multiplicire man folgweiſe durch 1, 3, 5, 7, etc. ſo erhält man die Reihe, 1, 15, 75, 245, 630, 1386, 2730, etc. deren fünfte Unterſchiede = 10 ſind. Es iſt hier $\alpha = 1$; $n = 4$, $q = 2$, alſo $(n+1)q\alpha = 10$.

23. Die ganzen Potenzen der Zahlen, welche in gemeiner arithmetiſcher Progreſſion ſind, bilden eine arithmetiſche Reihe, deren Ordnungszahl der Exponens der Potenz iſt. Die Progreſſion der Wurzeln ſey a; $a+b$; $a+2b$; $a+3b$; etc. der Exponens der Potenz $= n$, ſo iſt das beſtändige Glied der nten Unterſchiede $= n.n-1.n-2 \ldots 3.2.1.b^n$.

Denn es gelte der Satz für die nte Potenz, ſo daß die Reihe a^n, $(a+b)^n$, $(a+2b)^n$, $(a+3b)^n$, etc. (S) eine arithmetiſche der nten Ordnung, und ihr ntes Differenzglied $= D$ ſey. Die Reihe a^{n+1}, $(a+2b)^{n+1}$, $(a+3b)^{n+2}$, $(a+4b)^{n+3}$, etc. (T) iſt dadurch eine arithmetiſche Reihe der $(n+1)$ten Ordnung, deren beſtändiges Differenzglied $=(n+1)bD$. Dieſes ſey $= D'$. Nun iſt, für $n = 1$, S eine arithmetiſche Reihe der erſten Ordnung, in welcher $D = b$, und daher T eine Reihe der zweyten Ordnung, in welcher $D' = 2b^2$. Demnach iſt für $n = 2$, $D = 2b^2$, und $D' = 3.2b^3$; alſo für $n = 3$, $D = 3.2b^3$, und $D' = 4.3.2.b^4$; folglich allgemein $D = n.n-1.n-2 \ldots 3.2.1b^n$.

24. Die Werthe einer rationalen Gleichung vom nten Grade, $x^n - ax^{n-1} + bx^{n-2} \ldots \pm hx \mp k = 0$, machen eine arithmetiſche Reihe der nten Ordnung aus, in welcher das beſtändige nte Glied der Unterſchiede iſt $= n.n-1;n-2 \ldots 2.1.\beta^n$, wenn für x ſucceſſiv die Glieder der Progreſſion α, $\alpha+\beta$, $\alpha+2\beta$, $\alpha+3\beta$, e c. geſetzt werden.

Denn dieſer Werth wird aus ſo vielen Theilen zuſammengeſetzt, als die Gleichung Glieder hat. In den erſten Unterſchieden der Werthe iſt das niedrigſte Glied k nicht vorhanden, in den zweyten nichts aus h x, u. ſ. f. In der Reihe der (n — 1)ten Unterſchiede ſind nur noch die von x^n und $a x^{n-1}$ enthalten. Die von der letztern dieſer Größen ſind ſich alle gleich, ſo daß in der Reihe der nten Unterſchiede nur die von x^n enthalten ſind. Dieſe ſind jedes $= n . n - 1 . n - 2 . . 3 . 2 . 1 . \beta^n$.

Hiervon wird ein ſehr nützlicher Gebrauch zur Auflöſung der Gleichungen gemacht, ſ. Gleichung.

Interpolirung der arithmetiſchen Reihen.

25. Man ſetze für x, welches bisher eine ganze Zahl bedeutet hat, einen Bruch $\frac{z}{n}$, ſo wird in der Formel (7) die Größe y nach demſelben Geſetze gebildet, wie für ganze Werthe von x, und es bedeutet für einen gebrochnen Werth von x das dazu gehörige y ein eingeſchobenes Glied, deſſen Stelle nach dem nächſt vorhergehenden, zu einem ganzen Stellenzeiger gehörigen Gliede, durch den Überſchuß von z über das nächſt kleinere Vielfache von n angezeigt wird, indem zwiſchen je zwey Glieder der urſprünglichen Reihe n — 1 Glieder eingeſchoben, oder ſtatt je eines Gliedes n Glieder geſetzt werden. Z. B. wenn $x = \frac{17}{5}$, ſo iſt y das 2te Glied nach dem 3ten der urſprünglichen Reihe, in welcher je 4 eingeſchoben ſind. Oder man nehme ſtatt je eines Gliedes n Glieder, und es iſt y das zte Glied der neuen Reihe. Wird die Stelle von y in dieſer Reihe durch z bezeichnet, ſo iſt

$$y = A + z . \frac{a}{n} + \frac{z . z - n.}{1 . 2.} . \frac{b}{n^2} + \frac{z . z - n . z - 2n.}{1 . 2 \ 3.} . \frac{c}{n^3}$$

$$+ \frac{z . z - n . z - 2n . z - 3n.}{1 . 2 . 3 . 4} . \frac{d}{n^4} + \text{etc.}$$

26. Das beſtändige Unterſchiedsglied in der interpolirten Reihe iſt für eine Reihe der erſten Ordnung $= \frac{a}{n}$;

für eine der zweyten $=\frac{b}{n^2}$; für eine der dritten $=\frac{c}{n^3}$, für eine der vierten $=\frac{d}{n^4}$, u. ſ. f. wenn die beſtändigen Unterſchiede in den urſprünglichen Reihen ſind, a, b, c, d, etc. Denn wenn die Zähler der Coefficienten entwickelt, und nach den Potenzen von z geordnet werden, ſo ergeben ſich rationale ganze Functionen von z, deren letzte Differenzenreihen einerley ſind mit denen einer Gleichung von dem Grade der höchſten Potenz von z in dem Zähler, (24.). Da der Coefficient von z in den Factoren jedes Coefficienten der Reihe = 1 iſt, ſo iſt, für z alle ganze Zahlen, nach ihrer Folge geſetzt, der erſte Unterſchied in dem erſten Coefficienten = 1; der zweyte beſtändige Unterſchied in dem zweyten = 1 . 2; der dritte beſtändige Unterſchied in dem dritten = 1 . 2 . 3; der vierte beſtändige Unterſchied in dem vierten = 1 . 2 . 3 . 4, u. ſ. f. (eb. daſ.). Alſo iſt der beſtändige Unterſchied des zweyten Theils von y $=\frac{a}{n}$, des dritten $=\frac{b}{n^2}$; des vierten $=\frac{c}{n^3}$; des fünften $=\frac{d}{n^4}$, u. ſ. w. Der beſtändige Unterſchied für y ſelbſt iſt dem beſtändigen Unterſchiede des letzten Theils gleich.

27. Exempel. Es werden in der Reihe der Würfel, 1, 8, 27, 64, 125 etc. zwiſchen die Würfel von 4 und 5 drey eingeſchoben, nämlich die von 4,25; 4,50; 4,75, woran ſich der von 5 anſchließt. Hier iſt das beſtändige Glied der dritten Unterſchiede das gleichnamige für die urſprüngliche Reihe, 6, durch 4^3 oder 64 dividirt.

y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
$(4,00)^3 = 64,000000$	12,765625	1,593750	0,093750
$(4,25)^3 = 76,765625$	14,359375	1,687500	0,093750
$(4,50)^3 = 91,125000$	16,046875	1,781250	
$(4,75)^3 = 107,171875$	17,828125		
$(5,00)^3 = 125,000000$			

28. Die Formel in (25) wird beſonders zum Einſchalten einer Größe zwiſchen andre gleichartige gebraucht, ſo daß ſie nach demſelben Geſetze wie dieſe gebildet ſey, wenn gleich dieſes Geſetz nicht analytiſch gegeben, ſondern nur mittelbar aus individuellen Größen, wie in allen mathematiſchen Tafeln, oder auch empiriſch durch Beobachtungen erhalten wird, (ſ. Einſchalten).

29. Zur allgemeinen Darſtellung einer Größe aus ihrer Stelle und den erſten Gliedern der Differenzreihen iſt die Formel (7) bequemer. Nur müſſen die Werthe von x nicht auf ganze Zahlen eingeſchränkt werden, weil das Geſetz der Formation bleibt, wenn x einen gebrochnen Werth $\frac{z}{n}$ hat.

30. In der Formel (7) für das Glied in der Stelle x ſetze man ſtatt $x - 1$; $x - 2$; $x - 3$; etc. allgemeiner $x - m$; $x - n$; $x - p$, etc. ſo wird nun y durch die Glieder beſtimmt, welche zu den Stellen o, m, n, p, etc. gehören, anſtatt daß in (7) die Größe y durch die Glieder in den Stellen o, 1, 2, 3, etc. beſtimmt wird. Für die Factoren, a, $\frac{1}{2}b$; $\frac{1}{6}c$, $\frac{1}{24}d$, ſetze man

B, C, D, etc. ſo iſt

$$y = A + Bx + Cx(x-m) + Dx(x-m)(x-n) + Ex(x-m)(x-n)(x-p) + \text{etc.}$$

Der Werth von y für jedes x iſt der Werth einer Gleichung von dem Grade, welcher mit der Anzahl der Factoren in dem letzten Gliede, die nämlich x enthalten, übereinkommt. Sie ſind alſo auch Glieder einer arithmetiſchen Reihe einer Ordnung deſſelben Grades, wenn die x in einfacher arithmetiſcher Reihe genommen werden. Die ſucceſſiven Unterſchiede der Werthe in den Stellen o, m, n, p, etc. kann man aber nicht auf dieſelbe Art zur Beſtimmung jedes andern Werthes anwenden, wie die Unterſchiede der Werthe in den Stellen o, 1, 2, 3, etc. angewandt werden, da die Abſtände der Glieder ungleich ſind. In dem Artikel, Einſchalten, wird gezeigt, wie die Unterſchiede modificirt werden müſſen, um ſie zur Berechnung jedes Werthes y zu gebrauchen. Allein aus den Werthen von y in den Stellen o, m, n, p, etc. laſſen ſich die Coefficienten folgendergeſtalt beſtimmen.

Es ſeyn für o, m, n, p, etc. als Werthe von x, die Werthe von y folgende: α, β, γ, δ, etc. ſo iſt

$$\alpha = A$$
$$\beta = A + Bm$$
$$\gamma = A + Bn + Cn(n-m)$$
$$\delta = A + Bp + Cp(p-m) + Dp(p-m)(p-n)$$

etc.

Aus dieſen Gleichungen werden die Werthe von A, B, C, D, etc. nach der Reihe gefunden.

Geſchichte der Unterſuchungen über die arithmetiſchen Reihen.

Die erſten arithmetiſchen Reihen, welche man betrachtet hat, ſind die Polygonalzahlen und die figurirten Zahlen. Sie finden ſich ſchon in Stifels Arithmetica integra. Faulhaber, ein Rechenmeiſter zu Ulm um 1600,

ſuchte geheime Winke über die göttliche Regierung der Welt in den Pyramidalzahlen, fand aber doch auch coſſiſche oder algebraiſche Ausdrücke für ſie, alſo für Summen von Polygonalzahlen, das iſt für die zweyten Summen einer gemeinen arithmetiſchen Reihe. Er fand allgemeine Ausdrücke für die Binomial-Coefficienten, die er pondera nannte. Dann fand er auch Formeln für die Summen der Potenzen, ſelbſt für die Summen ſolcher Summen. Da Bernegger in Strasburg gelehrt hatte, wie die Würfel aus einer arithmetiſcher Progreſſion erwachſen, ſo ward Faulhaber dadurch veranlaßt, dieſes auf die höhern Potenzen auszudehnen, und berechnete die ſucceſſiven Differenzen der Potenzen bis mit auf die zwanzigſte Potenz, und fand für die beſtändigen Differenzen der Potenzen, deren Wurzeln um Eins zunehmen, das (20.) erwieſene Geſetz. (Käſtners Geſch. der Math. 3r Bd. S. 111 ff.)

Wallis ſuchte das Verhältniß der Summe der Wurzeln, Quadrate, und höherer Potenzen bis zur ſechſten, die Null mit gerechnet, zu der Summe von eben ſo vielen der größten unter ihnen gleichen Größen durch Induction. Z.B. Es iſt

$$\frac{0+1+8+27+64+125}{125+125+125+125+125+125} = \frac{225}{750}$$

$= \frac{6}{20} = \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$. Aus mehrern ſolchen Fällen ſchließt er, daß der Überſchuß über $\frac{1}{4}$ immer ſey $\frac{1}{4}$ dividirt durch die Anzahl der Glieder im Zähler nach der Null.

Für die Summen der vierten, fünften und ſechſten Potenzen giebt er nur die von ihm entdeckten Formeln an, welche durch Induction nach der angeführten Methode zu finden ſchwer geweſen ſeyn muß. Sein eigentlicher Zweck iſt, Reihen von unendlich vielen Gliedern zu ſummiren, deren erſtes Null, und das letzte endlich iſt, die zwiſchen ihnen liegenden alſo jedes von den nächſten unendlich wenig verſchieden ſind. Dieſes wendet er auf Quadraturen und Cubaturen in der Geometrie an. Eine Reihe von unendlich vielen Größen, die von 0 an ſtetig zunehmen, es ſey in arithmetiſcher Progreſſion, oder wie die

Quadrate, Würfel, Biquadrate, und andere Potenzen arithmetiſch proportionaler Größen, verhält ſich zu der Reihe von ſo vielen, der größten in jener Reihe gleichen, Größen, wie folget: I. 1 : 2; II. 1 : 3; III. 1 : 4; IV. 1 : 5; etc. Das erſte Verhältniß für arithmetiſch proportionale, das zweyte für die Quadrate ſolcher Größen, das dritte für die Würfel, u. ſ. f. Dieſes iſt der Satz aus der Integralrechnung, $\int x^m dx = \frac{1}{m} x^{m+1}$, wenn das beſtändige Increment der Wurzeln als ein unendlich kleiner Factor betrachtet wird, um die Summe aller Glieder der Reihe endlich zu machen. Die Allgemeinheit jenes Verhältniſſes gründet Wallis auf die Induction aus den berechneten Fällen. Nach einer hieraus ferner gefolgerten Analogie, die aber nicht als ſtreng erwieſen angeſehen werden kann, findet Wallis auch, wie eine unendliche Reihe von Quadratwurzeln, Cubikwurzeln, Biquadratwurzeln etc. aus Zahlen, die arithmetiſch proportional ſind, ſich zu eben ſo vielen, der größten unter ihnen gleichen, Größen verhalten, nämlich II. $1 : 1\frac{1}{2}$; III. $1 : 1\frac{1}{3}$; IV. $1 : 1\frac{1}{4}$ etc. wo die römiſchen Zahlen den Grad der Wurzeln anzeigen. Hieraus folgert er für gebrochne Exponenten, wie $\frac{m}{n}$, das Verhältniß der Reihe der gebrochnen Potenzen zu eben ſo vielen, der größten unter ihnen gleichen, Größen, wie $1 : 1 + \frac{m}{n}$. Hier war ein wichtiger Satz aus der Integralrechnung gefunden, wenn man das Integriren als ein Summiren betrachtet.

Jakob Bernoulli erinnert gegen die von Wallis gebrauchte Methode der Induction, daß ſie nicht wiſſenſchaftlich genug ſey, und zeigt, wie man die Verhältniſſe ſcharf erweiſen könne, wofern man ſie nur erſt durch Induction gefunden habe. Acta Erud. 1686. Operum T. I. nr. 24. Dieſes iſt aber noch ein unbequemer Weg. Weit beſſer iſt das Verfahren die Summen der Potenzen

der natürlichen Zahlen zu finden, welches er in der Arte conjectandi. pag. 96. lehrt. Das Geſetz findet er durch Induction ſehr ſinnreich.

Newton hat zuerſt die Formel (7.) für ein Glied einer arithmetiſchen Reihe irgend einer Ordnung gegeben, in dem Lemmate V. L. III Princip. mathem. Phil. naturalis, wo er zeigt, wie durch irgend eine Anzahl gegebener Puncte eine krumme Linie von der paraboliſchen Gattung gezogen werden könne, ſowohl für den Fall, da die Abſtände der gegebenen Glieder gleich groß ſind, als auch für den Fall, da die Abſtände nicht gleich groß ſind. In dem letztern Falle zeigt er, wie die ſucceſſiven Unterſchiede zunehmen, und durch die einfachen, doppelten, dreyfachen und folgende vielfachen Abſtände zu theilen ſind, wovon ſchon einiges in (30.) erwähnt iſt. Die Interpolation war hier der Zweck. In einem Aufſatze von Newton, Methodus differentialis, iſt das Verfahren etwas erläutert. Einen Commentar dazu liefert Jakob Stirling in der Schrift: Methodus differentialis, ſive tractatus de ſummatione et interpolatione ſerierum infinitarum. Lond. 1730. 4. in dem zweyten Abſchnitte.

Jakob Bernoulli zeigt in der Arte conjectandi pag. 98. nur an dem Beyſpiele von den arithmetiſchen Reihen der dritten Ordnung, wie die Glieder der höhern arithmetiſchen Reihen aus den Anfangsgliedern der Hauptreihe, und der Differenzreihen gebildet werden, und wie die Summe einer gegebenen Anzahl Glieder gefunden wird.

De Lagny hat eine weitläufige Abhandlung über die höhern arithmetiſchen Reihen, und ihre Anwendung zur Aufköſung der Gleichungen geliefert. Traité des progreſſions arithmétiques de tous les degrés à l' Infini. Mem. de l' Acad. des Sc. 1722. Er zeigt, wie die Glieder einer ſolchen Reihe aus den Anfangsgliedern der Hauptreihe und der Differenzreihen, die er nombres générateurs nennt, zuſammengeſetzt werden. Auch giebt

er die Formeln für dieſe Anfangsglieder. Das Verfahren iſt aber nur Induction.

Die Formel (4.) irgend ein Glied einer arithmetiſchen Reihe der (n — 1)ten Ordnung durch die n nächſt vorher gehenden Glieder auszudrücken, hat Moivre in ſeiner Doctrine of chances zuerſt vorgetragen, nach Dan. Bernoulli's Anführung in den Comm. Petr. vet. T. III. p. 87. In der zweyten Ausgabe dieſes Werks von 1738. iſt die Formel S. 195 anzutreffen. Die erſte Ausgabe iſt von 1717. Die Formel (7.) für ein Glied der Hauptreihe durch die Anfangsglieder der Unterſchiedsreihen iſt daſ. S. 52 befindlich.

Friedrich Chriſt. Maier in einer Abhandlung de Arithmetica figurata ejusque uſibus aliquot, Comm. Petr. vet. T. III. a. a. 1728 nennt die arithmetiſchen Reihen höherer Ordnungen ſeries collectivas. Er zeigt, wie ſie zu ſummiren ſind, und wie man davon Gebrauch machen könne, theils zur Auflöſung der Gleichungen, theils zur Entdeckung des Geſetzes der Binomial-Coefficienten. In einer andern Abhandlung eb. daſ. Propoſitiones cyclometricae aliquot, bedient er ſich dieſer Reihen, das Geſetz der Coefficienten in den Formeln für die Chorden der Vielfachen eines durch ſeine Chorde gegebenen Bogens zu entdecken.

Die beiden Formeln für das Glied einer Differenzenreihe (2.) und das Glied einer Hauptreihe (7.) hat Käſtner zuerſt allgemein erwieſen. Analyſis endlicher Größen §. 724. 725. Seine Beweiſe ſind in dieſem Artikel gebraucht.

Euler gründet auf die Betrachtung der endlichen Differenzen die Differentialrechnung. Die beiden erſten Capitel ſeines Werks über dieſe handeln von den endlichen Differenzen und ihrem Gebrauche in der Lehre von den Reihen.

Man vergleiche noch Pasquich mathematiſche Analyſis 1. Th. 16. Abſchnitt.

Buſſe Syſtem der allgemeinen Differenzen in deſſelben Beyträgen zur Mathem. und Phyſik.

Hindenburg Überſicht der Hauptſätze der allgemeinen Differenzen und Summen, im Archiv der Mathematik. I. Bd.

Die wichtige Lehre von den höhern arithmetiſchen Reihen wird in den Lehrbüchern nicht hinlänglich ausgeführt, oder ſie wird gar vernachläſſigt.

Arithmetiſche Scale iſt die geometriſche Reihe, nach welcher der relative Werth der Zahlziffern in ihren Stellen beſtimmt wird, indem jede Ziffer der Factor zu einem gleichſtelligen Gliede jener Reihe iſt, ſo daß die Summe aller Producte aus jeder Ziffer in das zugehörige Glied der Reihe die ganze Zahl giebt. Jn dem dekadiſchen Zahlenſyſtem, dem gewöhnlichen, iſt die geometriſche Reihe, 1 : 10 : 100 : 1000 : etc. Die Factoren dieſer Glieder werden allein hingeſchrieben, die Glieder aber in Gedanken zugeſetzt. Allgemein kann jede ganze Zahl durch die Reihe, $a + br + cr^2 + dr^3 + er^4 +$ etc. dargeſtellt werden, wo die Buchſtaben ganze Zahlen bedeuten, und a, b, c, d, etc. kleiner als r ſind, auch o ſeyn können. Hier iſt $1 : r : r^2 : r^3 :$ etc. die arithmetiſche Scale.

Jſt die Zahl eine dekadiſche, und man will ſie in eine Zahl nach einer andern Scale, oder einem andern Syſtem verwandeln, ſo dividire man ſie durch r der Reſt iſt = a. Den Quotienten dividire man wieder durch r, ſo iſt der Reſt = b, den zweyten Quotienten dividire man durch r, ſo iſt der Reſt = c. Der dritte Quotient durch r dividirt giebt den Reſt d; der vierte den Reſt e, u. ſ. f. Wo die Diviſion aufgeht, iſt der Factor, der zu einer Potenz von r gefunden werden ſoll, Null. Beyſpiele ſ. in den Artikeln Dodekadik und Dyadik.

Eine Zahl, die nach einer andern Scale, als der dekadiſchen, ausgedruckt iſt, in eine dekadiſche zu verwandeln, dividirt man ſie fortgeſetzt durch 10, und ſondert die Reſte

ab. Dieſe geben nach der Reihe die Einer a, die Zehner b, die Hunderte c, die Tauſende d, u. ſ. f. Exempel a. a. O.

Büffon hat der geometriſchen Reihe, welche einem Zahlenſyſtem zum Grunde liegt, den Namen, Echelle arithmétique, gegeben. Mem. de l'Ac. des Sc. 1741. Mehreres in dem Artikel: Zahlenſyſtem.

Arithmologia iſt der Titel eines Buchs über die Zahlen und ihre geheimen Eigenſchaften von dem Jeſuiten Kircher: Arithmologia ſive de abditis numerorum myſteriis. Romae 1665. 301 pag. in 4. darin gute hiſtoriſche Unterſuchungen über Zahlbuchſtaben und Zahlziffern; Beſchreibung der magiſchen Quadrate und der Planetenſiegel, wozu jene angewandt wurden; viele cabbaliſtiſche Thorheiten, die mit Zahlen und andern Symbolen ehedem getrieben ſind, endlich des Verfaſſers phantaſtiſche Bemerkungen über gewiſſe Beſchaffenheiten der Zahlen, dergleichen ſchon bey den jüngern Pythagoräern vorkommen.

Arithmomanctica, daſſelbe was Arithmetica divinatoria, oder errathende Rechenkunſt.

Arithmonomia, daſſelbe was Arithmetik, insbeſondere die theoretiſche.

Armilla, der ringförmige Raum zwiſchen zwey concentriſchen Kreiſen. Torricelli gebraucht dieſen Ausdruck, (Opera geom. P. II. p. 136). Das Wort bedeutet einen Armreif, dergleichen bey den alten Römern ein Ehrenzeichen für Soldaten war.

Es ſey a der Halbmeſſer des größern Kreiſes, b des kleinern, und $1:\pi$ das Verhältniß des Durchmeſſers zum Umfange, ſo iſt die Fläche des erſtern $= \pi aa$, des andern $= \pi bb$; alſo die Fläche des Ringes $= \pi(aa - bb)$ $= \pi(a + b)(a - b)$.

Die Ringfläche iſt gleich der Fläche eines Kreiſes, deſſen Halbmeſſer die mittlere geometriſche Proportionale

zwiſchen der Summe und dem Unterſchiede der beiden Halbmeſſer a und b iſt.

Ars major, oder magna, italieniſch, Arte maggiore, hieß im 16ten Jahrhunderte die Algebra, im Gegenſatze gegen die gemeine Rechenkunſt, ſ. Algebra.

Articulus, eine durch 10 theilbare Zahl.

Artificialis numerus, ſinus, tangens, iſt der Logarithme einer Zahl, eines Sinus, einer Tangente u. dgl.

Aſſignabilis quantitas, eine Größe, die ſich mit jeder beſtimmten Größe vergleichen läßt, es ſey auf rationale oder irrationale Art, im Gegenſatze gegen unendlich kleine Größen, die nur in ſo fern Größen heißen können, als ſie mit andern ihrer Art vergleichbar ſind.

Aſymmetria, bey den Analyſten des 17ten Jahrhunderts daſſelbe, was man jetzt Irrationalität oder Incommenſurabilität nennt, ein Verhältniß zweyer Gröſſen, das ſich in ganzen Zahlen nicht vollkommen genau ausdrucken läßt, wie das zwiſchen 1 und $\sqrt{2}$, der Seite eines Quadrats und der Diagonale, dem Durchmeſſer eines Kreiſes und dem Umfange.

Aſymptote iſt eine Linie, welche unbeſtimmt verlängert neben einer krummen, gleichfalls unbeſtimmt verlängerten, Linie ſich ſo erſtreckt, daß der Abſtand dieſer von jener kleiner als jede angebliche Größe wird, ohne daß ſich beide Linien ſchneiden. Das Wort iſt zuſammengeſetzt aus dem verneinenden 'α, aus συν, mit, oder zuſammen, und πιπτειν, fallen.

Eine Aſymptote kann eine gerade oder eine krumme Linie ſeyn. Doch verſteht man unter Aſymptote ſchlechthin eine gerade.

Die Hyperbel hat zwey Aſymptoten, die durch ihren Mittelpunct gehen, und mit der Axe gleich große

Winkel machen. Ihre vier Zweige nähern ſich dieſen beiden geraden Linien, nach beiden entgegengeſetzten Richtungen derſelben, ohne ſie eher als in einer unendlichen Entfernung zu erreichen. In Fig. 31. Tab. II. iſt ein Zweig einer Hyperbel mit ſeiner Aſymptote CS abgebildet. Es iſt C der Mittelpunct der Hyperbel, A ihr Scheitel, Cx die Axe, AMS der Zweig; CP die auf der Aſymptote genommene Abſciſſe, PM die mit der andern Aſymptote parallele Ordinate, ſo wie AB durch den Scheitelpunct A. Die Gleichung zwiſchen CP und PM iſt dieſe: $CP \times PM = CB \times AB$. Folglich wird PM immer kleiner, je größer CP genommen wird, und da für CP keine endliche Gränze des Wachsthums iſt, ſo iſt auch keine endliche Gränze des Abnehmens für PM. Daher hat auch der ſenkrechte Abſtand eines Punctes der Hyperbel von der Abſciſſenlinie CS keine endliche Gränze des Abnehmens.

Die Conchoide ſtellt auch die Annäherung einer krummen Linie an eine gerade, ohne eine endliche Gränze derſelben, ſehr gut dar. In (Fig. 32. Tab. II.) iſt BMN ein Zweig der Conchoide, C der Pol derſelben, APS die Abſciſſenlinie, PM eine ſenkrechte Ordinate, CAB die ſenkrechte auf AS, AB die gegebene Linie, welcher QM gleich iſt. Nun iſt $CQ : AC = QM : PM$. Da CQ ohne Ende wachſen kann, ſo nimmt PM ohne Ende ab, ſo daß in jeder endlichen Entfernung AP die Ordinate PM noch endlich bleibt.

Die Aſymptote iſt als berührende Linie in einem unendlich entfernten Puncte anzuſehen. Eine gerade Linie, die durch C an einen Punct des Zweiges AS der Hyperbel (Fig. 31.) gezogen wird, ſchneidet den entgegengeſetzten Zweig an der andern Seite von CS jenſeits C. Fällt ſie in die Aſymptote, ſo berührt ſie die Hyperbel an zwey entgegengeſetzten, aber unendlich entfernten Puncten. Da aber an der Hyperbel eine berührende Linie nur einen einzigen Punct mit der krummen Linie gemein haben kann, ſo müſſen die beiden unendlich entfernten Puncte für einen

einzigen gehalten werden. Um ſich dieſes Paradoxon zu erläutern, laſſe man die Hyperbel durch einen bewegten Punct beſchreiben. Er fange in A ſeinen Weg an, ſetze ihn auf dem Zweige AS ins Unendliche fort, bis er in die Aſymptote fällt. Dieſe gehört ſowohl zu dem Zweige AS, als zu dem entgegengeſetzten an derſelben jenſeits C. Den beſchreibenden Punct in die Aſymptote fallen laſſen, heißt daher ſich ihn in den beiden unendlich entfernten Puncten derſelben zugleich gedenken, welches nichts widerſprechendes iſt, weil hier von keinem phyſiſchen Puncte oder von wirklicher Bewegung die Rede iſt. Bey fortgeſetzter Bewegung geht der Punct auf dem entgegengeſetzten Zweige zurück, und beſchreibt ſolchergeſtalt die ganze Hyperbel durch ſtetige Bewegung, wenn die Aſymptote als berührende in einem Puncte betrachtet wird.

Eben ſo kann man zwey unendlich entfernte Puncte der Conchoide, wo ſie die Abſciſſenlinie berührt, als einen einzigen anſehen. Wenn AP (Fig. 32.) unendlich groß iſt, ſo iſt CQ mit AS parallel, und ſchneidet, ſo wenig ſie ſich auch weiter von AS abwärts dreht, die Abſciſſenlinie nach der entgegengeſetzten Gegend von AS auf dem Theile As, ſo daß der beſchreibende Punct auf der Conchoide, indem er unendlich weit entfernt nach N hinaus gedacht wird, auch auf der entgegenſetzten Seite Bn unendlich weit gedacht werden muß.

Die Aſymptoten ſind bey der Betrachtung der krummen Linien wichtig. Sie zeigen, wo ſie Statt finden, die Richtung an, welcher ein Zweig einer krummen Linie zuletzt ſich immer mehr nähert, wie auch ſonſt die Geſtalt deſſelben beſchaffen ſeyn mag.

Um die Beſchaffenheit der Annäherung einer krummen Linie zu ihrer Aſymptote zu erkennen, ſucht man eine Gleichung zwiſchen den Abſciſſen auf der Aſymptote genommen und den Ordinaten, mit Weglaſſung der Glieder, welche das Quadrat und die höhern Potenzen der Ordinate enthalten. So erhält eine ſolche Gleichung die Form

$xy = ab$, oder $x^2y = a^2b$; oder $x^ny = a^nb$. Die erſtere giebt eine Hyperbel, die ein Kegelſchnitt iſt, die andern Formen geben Hyperbeln höherer Arten. Je höher die Potenz der Abſciſſe iſt, deſto ſchneller nähert ſich die krumme Linie ihrer Aſymptote. Die krumme Linie, deren Gleichung iſt $x^ny = a^nb$, heißt die krummlinichte Aſymptote.

Wenn ein ins Unendliche fortlaufender Zweig einer krummen Linie keine gerade Linie zur Aſymptote hat, ſo mag doch ihre Beſchaffenheit im Unendlichen durch eine einfachere Gleichung ausgedruckt werden, als die vollſtändige Gleichung für die Linie iſt, und dadurch ihre Beſchaffenheit auch für ſehr große Abſciſſen faßlicher zu erkennen geben. Eine ſolche einfachere Gleichung ſey $at = u^2$, für eine andere Abſciſſenlinie als diejenige, auf welche ſich die Gleichung zwiſchen den Coordinaten x und y für die krumme Linie bezieht. Auf der neuen Abſciſſenlinie ſey die Abſciſſe t, und die normale Ordinate $= u$. Die krummlinichte Aſymptote iſt demnach eine Parabel mit dem Parameter a, und ihre Axe fällt in die neue Abſciſſenlinie.

Die Gleichung für die krummlinichte Aſymptote mag auch ſeyn $a^2t = u^3$, oder $at^2 = u^3$, oder überhaupt $a^mt^n = u^{m+n}$. Wäre der Exponens von u kleiner als der von t, ſo nähme man die mit den Ordinaten parallele durch den Anfangspunct der Abſciſſen zur Abſciſſenlinie, und verwechſelte die Benennungen und Bezeichnungen der Ordinaten und Abſciſſen. Die Ordinaten u werden zwar immer größer, und zuletzt unendlich groß, in Vergleichung mit jeder gegebenen Linie, bleiben aber doch in Vergleichung mit den Abſciſſen unendlich klein. Die Richtung der krummen Linie nähert ſich immer mehr der Richtung der Axe oder Abſciſſenlinie, ob ſie ſich gleich unendlich davon entfernt.

Die algebraiſchen Linien haben daher für ihre ins Unendliche fortlaufenden Zweige entweder eine hyperboliſche Aſymptote längs einer geraden Linie, der ſich ſich ohne Ende nähern, oder eine paraboliſche Aſymptote,

deren Richtung derjenigen einer geraden Linie immer näher kommt.

In dem Artikel, krumme Linien, werden mehrere Beyſpiele von den Aſymptoten beiderley Art, und ihrer Herleitung aus der Gleichung für eine krumme Linie mitgetheilt.

Von den Aſymptoten der Hyperbel handelt Apollonius in dem zweyten Buche ſeines Werks über die Kegelſchnitte, wo auch dieſe Benennung gebraucht wird. Sie ſind aber ſchon vor ihm den Geometern bekannt geweſen. Archimedes nennt ſie gerade Linien, welche dem Schnitte des ſtumpfwinklichten Kegels (der Hyperbel) am nächſten ſind. (Vorrede zu der Schrift von Konoiden und Sphäroiden, vergl. 28ten Satz.). Ein Italiener, Franciſcus Barocius, hat in einem weitſchweifigen Werke (Venedig 1586, auf 269 Quartſ.) dreyzehn Arten angegeben, wie zwey Linien gezogen werden können, die ſich immer näher kommen, ohne ſich zu ſchneiden, ſo weit ſie auch verlängert werden. Es iſt immer die Hyperbel, auſſer nach der zehnten und eilften Art. Nach der letztern dieſer iſt es die Konchoide, nach der zehnten eine krumme Linie, die er ſelbſt nicht näher zu beſtimmen vermag. Sie enthält die Durchſchnitte einer Folge von Kreiſen, die eine gemeinſchaftliche berührende haben, und einer zugeordneten Folge von Parallelen mit jener, die ſich derſelben, aber mit abnehmenden Abſtänden von einander, nähern. Ein Theil dieſes Werkes iſt polemiſch. Der Verfaſſer will die Fehler verſchiedener Geometer, die ſie in ihren Beweiſen von den Aſymptoten begangen haben, berichtigen, und findet ſelbſt den Apollonius nicht tadelfrey.

Newton hat zuerſt die krummlinichten Aſymptoten bey den Linien vom dritten Grade (oder krummen der zweyten Ordnung) angegeben.

Ausführlichern Unterricht über die Aſymptoten jeder Art findet man in

Euleri Introd. in Analyſin Infin. T. II. Cap. 7. 8.
Cramer Analyſe des lignes courbes. Ch. 8.

Aufgabe (Problema) iſt eine Frage, wie etwas Unbekanntes aus gegebenen Größen unter gewiſſen Bedingungen gefunden werden möge, in der Geometrie insbeſondere, eine Conſtruction zu erfinden, die das verlangte leiſtet, z. B. ein Rechteck in ein Quadrat oder in ein anderes mit einer gegebenen Seite zu verwandeln; durch drey Puncte einen Kreis zu beſchreiben; in einem Kreiſe ein Dreyeck zu zeichnen, deſſen Seiten, wann nöthig, verlängert, jede durch einen gegebenen Punct gehen. Eine Aufgabe kann auch zum Gegenſtande den Beweis eines Satzes haben, der aus Induction wahr gefunden iſt, oder als wahr behauptet wird. Die Frage ſelbſt, ihre Auflöſung, und der Beweis der Richtigkeit des Verfahrens müſſen in dem Vortrage deutlich unterſchieden werden. Bey den Anwendungen iſt es ſehr bequem, die Vorſchriften des Verfahrens kurz vorzufinden, ohne daß man nöthig habe, die Vorbereitungen zu der Auflöſung und die Beweiſe wieder durchzugehen, nachdem man ſie einmahl gehörig gefaßt und geprüft hat.

Eine beſtimmte Aufgabe (Problema determinatum, limitatum) iſt eine ſolche, die nur auf eine Art oder nur auf einige, der Anzahl nach beſtimmte, Arten aufgelöſet werden kann. Eine unbeſtimmte Aufgabe (Problema indeterminatum, illimitatum) iſt eine ſolche, die unzählich viele Auflöſungen zuläßt. Z. B. ein gleichſchenklichtes Dreyeck, deſſen Winkel an der Grundlinie doppelt ſo groß ſind als der Winkel am Scheitel, iſt nur auf eine Art möglich (Euklides IV. 10.); ein gleichſchenklichtes Dreyeck, deſſen Umfang und Inhalt gegeben ſind, iſt auf zweyerley Art möglich, wofern der Inhalt nur nicht größer iſt als der Inhalt eines gleichſeitigen von demſelben Umfange. Es iſt eine Aufgabe mit zwey Auflöſungen, aus zwey gegebenen Puncten an einen Punct eines gegebenen Kreiſes Linien ſo zu ziehen, daß die Linie, welche die beiden andern Durchſchnittspuncte jener Linie und des Kreiſes verbindet, der Linie durch die beiden gegebenen Puncte parallel ſey. (S. Analyſis als Methode,

5te Aufgabe, und mehrere daſelbſt, wie auch in dem Artikel, Anwendung der Analyſis auf die Geometrie.). Eine unbeſtimmte Aufgabe iſt, über einer gegebenen Linie ein Dreyeck zu zeichnen, worin der Winkel, welcher jener Linie gegen über ſteht, eine gegebene Größe habe; oder ein Dreyeck, worin die beiden andern Seiten ein gegebenes Verhältniß haben. Für beide iſt der Kreis der Ort der Auflöſung.

In der Analyſis iſt eine Aufgabe beſtimmt, wenn ſo viele unabhängige Gleichungen als unbekannte Größen vorhanden ſind. Sind weniger Gleichungen da als unbekannte Größen, ſo iſt die Aufgabe unbeſtimmt. Z. B. Zwey Quadrate von rationalen Wurzeln zu finden, deren Summe das Quadrat einer rationalen Wurzel iſt. Oder: eine Zahl zu finden, die durch m dividirt den Reſt p, durch n dividirt den Reſt q laſſe.

Bey der Auflöſung beſtimmter Aufgaben muß immer gezeigt werden, wenn, wie, und auf wie vielerley Arten die Aufgabe möglich iſt. Die Alten nannten dieſes διορισμος. determinatio. Pappus in coll. mathem. L. VII. praef.

Diophanteiſche Aufgaben ſind ſolche algebraiſche, deren Auflöſungen in ganzen oder in rationalen gebrochnen Zahlen verlangt werden, dergleichen die eben angeführten ſind. S. unbeſtimmte Analytik.

Lineariſche Aufgabe iſt eine geometriſche, die mittelſt des Durchſchnitts zweyer geraden Linien aufgelöſet werden kann. Damit ſtimmen in der Algebra die Aufgaben, welche auf eine Gleichung vom erſten Grade führen, worin die unbekannte Größe nur auf eine Dimenſion ſteigt.

Ebene Aufgabe (Problema planum) iſt eine ſolche, die mittelſt der Durchſchnitte einer geraden Linie und eines Kreiſes, oder eines Kreiſes mit einem andern Kreiſe aufgelöſet wird. Damit ſtimmen in der Algebra die Aufgaben, welche auf eine Gleichung vom zweyten

Grade führen, da hierin die unbekannte Größe zwey Dimenſionen erhält.

Körperliche Aufgabe (Problema ſolidum) iſt in der Geometrie eine ſolche, die nur mittelſt der Durchſchnitte eines Kreiſes und eines Kegelſchnittes aufgelöſet werden kann, z. B. die Aufgabe zwiſchen zwey gegebenen Linien zwey mittlere in geometriſcher Progreſſion zu finden. Eine ſolche iſt, ein gleichſchenklichtes Dreyeck zu zeichnen, in welchem die Winkel an der Grundlinie jeder dreymahl ſo groß ſind als der gegen über ſtehende Winkel, wodurch ſich das ordentliche Siebeneck in einen Kreis einſchreiben läßt. Sie führt auf eine Gleichung vom ſechsten Grade, die aber einer vom dritten Grade gleich zu halten iſt. (Goniometrie, VI.) Sie wird durch eine Parabel und den Kreis conſtruirt. So iſt es auch eine körperliche Aufgabe, ein Dreyeck zu zeichnen, in welchem die Winkel an der Grundlinie jeder viermahl ſo groß ſind, als der gegen über liegende Winkel, wodurch ein ordentliches Neuneck in einen Kreis eingeſchrieben wird. Die Aufgabe führt auf eine Gleichung vom achten Grade, die einer vom vierten Grade gleich zu halten iſt. Sie wird alſo durch den Kreis oder auch eine Hyperbel und die Parabel conſtruirt.

Die Benennungen, ebene und körperliche, für Aufgaben rühren daher, daß der Kreis eine Figur iſt, deren Zeichnung in einer Ebene unmittelbar ausgeführt werden kann, dagegen die Kegelſchnitte durch den Schnitt eines Kegels mit einer Ebene gebildet werden. Man muß eine gewiſſe Zuſammenſetzung von Linien machen, um ſie mit ſtetiger Bewegung in einer Ebene zu beſchreiben.

Überkörperliche Aufgabe (problema ſurſolidum) iſt eine ſolche in der Geometrie, die nicht anders als durch krumme Linien von einer höhern Gattung als die Kegelſchnitte ſind, aufgelöſet werden kann.

Örtliche Aufgabe (Problema locale) iſt eine unbeſtimmte Aufgabe, zu deren Auflöſung jeder Punct

einer gehörig zu beſtimmenden Linie dient. Sie iſt eine einfache, wenn dieſer Ort eine gerade Linie iſt, eine ebene, wenn es eine Kreislinie, eine körperliche, wenn es der Umfang eines Kegelſchnittes, eine überkörperliche (problema ſurſolidum), wenn es eine Linie von einer höhern Ordnung iſt.

Ein Lehrſatz wird in eine Aufgabe verwandelt, wenn die Relation der Größen, welche in dem Lehrſatze ausgeſagt iſt, zur Bedingung gemacht wird. Z. B. die Aufgabe, zwiſchen zwey Linien eine mittlere geometriſche Proportionale zu finden, enthält als Bedingung, was in dem Satze von der auf einen Durchmeſſer eines Kreiſes ſenkrechten Ordinate ausgeſagt wird. Dieſe Art Aufgaben ſind die einfachſten. Sie enthalten eine einfache Bedingung. Eine andere Art Aufgaben iſt die, wo mehrere Bedingungen zugleich zu erfüllen ſind, z. B. einen Kreis zu ziehen, der zwey gegebene gerade Linien berührt, und durch einem gegebenen Punct geht. Die Form, welche man einen Satze geben mag, ob die eines Lehrſatzes, oder die einer Aufgabe, iſt zwar nicht etwas ſehr weſentliches, allein es ſcheint doch, daß man Relationen der Größen in Sätzen, Bedingungen in Aufgaben aufſtellen müſſe. Z. B. die Relation zwiſchen dem Sonnenjahre, dem periodiſchen Monathe, und dem ſynodiſchen Monathe ſollte durch einen Lehrſatz dargeſtellt werden. Daraus erhalten dann die Aufgaben, den einen oder den andern Monath zu finden, ihre Auflöſung, gleichſam als Folgerungen.

Merkwürdige Aufgaben aus der reinen Mathematik, welche zu ihrer Zeit die Mathematiker beſchäftigt haben, ſind, die Beauniſche — die Deliſche — die Florentiniſche — die Iſoperimetriſche — die allgemeine der alten Geometer für Kegelſchnitte — die Kepleriſche — die Aufgabe von der Quadratur des Kreiſes — die Aufgaben von den Trajectorien, den rechtwinklichten und den reciproken — die Aufgabe, einen geradlinichten Winkel in drey gleiche Theile zu theilen.

Aus der angewandten Mathematik: die Alhazeniſche, die Balliſtiſche — die Aufgabe von drey Körpern, wie

man ſie kurz nennt, welche einen großen Theil der phyſiſchen Aſtronomie ausmacht — von der elaſtiſchen Krümmung — die Aufgabe von der Fall-Linie, auf welcher ein ſchwerer Punct am ſchnellſten fällt (brachyſtochrona) — auf welcher die Zeiten des Falles gleich groß ſind (iſochrona, tautochrona) — von der Zuſammenſetzung vollkommener Fernröhre — von der Gleichgewichtslinie oder Kettenlinie — von der Figur ſchwingender Saiten — von der Figur eines Körpers zum geringſten Widerſtande in einem flüſſigen Mittel. — Von dieſen letztern Aufgaben in der zweyten Abtheilung.

Aufheben eines Bruches (abbreviiren, verkleinern) iſt das Verfahren, wodurch der Bruch in kleinern Zahlen ausgedruckt wird, ohne ſeinen Werth zu ändern. Es geſchieht durch die Diviſion des Zählers und Nenners mit dem gemeinſchaftlichen Factor oder Theiler, wenn ein ſolcher vorhanden iſt. Wie dieſer gefunden wird, lehrt der Artikel: Theiler, gemeinſchaftlicher, der Zahlen.

Wenn Zähler und Nenner keinen gemeinſchaftlichen Theiler haben, ſo läßt ſich der Bruch in kleinern Zahlen nicht darſtellen, ohne etwas an dem Werthe zu ändern. Bey großen Zahlen im Zähler und im Nenner kann man oft unbedenklich etwas von der Genauigkeit der Bequemlichkeit in der Rechnung mit dem Bruche, und der faßlichern Vorſtellung aufopfern.

Wallis giebt in ſeiner Algebra, die 1685 zuerſt Engliſch herauskam, eine Methode an, Brüche in kleinern Zahlen auszudrucken, ſo daß ſie mit einer gewiſſen Anzahl Ziffern nicht genauer gefunden werden mögen. Er zeigt ſie nur an einem Beyſpiele, weitläufig und dunkel.

Die Rechnung für dieſes einzige Beyſpiel nimmt ſechs Folioſeiten ein, um zwey Brüche, deren einer größer, der andere kleiner als ein vorgegebener Bruch mit 7 Ziffern im Zähler und Nenner iſt, zu finden. Allein nach dem

von ihm angewandten Verfahren laſſen ſich leicht allgemeine Formeln berechnen, und man findet dadurch für den abgekürzten Bruch dieſelben Ausdrücke, welche die Reduction eines continuirlichen oder Kettenbruchs giebt, in der That auf demſelben Wege, auf welchem man in der gemeinen Arithmetik den gemeinſchaftlichen Theiler von Zähler und Nenner findet.

Der gegebene Bruch ſey $\frac{a}{b}$, und a größer als b. Es ſey

$\frac{a}{b} = m + \frac{c}{b}$	alſo	$a = mb + c$
$\frac{b}{c} = n + \frac{d}{c}$	„	$b = nc + d$
$\frac{c}{d} = p + \frac{e}{d}$	„	$c = pd + e$
$\frac{d}{e} = q + \frac{f}{e}$	„	$d = qe + f$
$\frac{e}{f} = r + \frac{g}{f}$	„	$e = rf + g$
etc.		etc.

wo alle Buchſtaben ganze Zahlen bedeuten. Es iſt c kleiner als b; d kleiner als c; e kleiner als d, u. ſ. f.

Man multiplicire die Gleichung

I. $a = mb + c$

mit n, und ſubſtituire für nc ſeinen Werth, $b - d$, ſo iſt

II. $na = (mn + 1)b - d$.

Dieſe werde mit p multiplicirt, und für pd der Werth, $c - e$, geſetzt, ſo iſt

$$npa = (mnp + p)b - c + e,$$

dazu die Gleichung I. addirt, wird erhalten

III. $(np + 1)a = (mnp + m + p)b + e$.

Durch die Multiplication mit q und Subſtitution für q e wird dieſe,

$$(npq+q)a=(mnpq+mq+pq)b+d-f.$$

Die Vereinigung mit II. giebt

$$\text{IV. } (npq+n+q)a=(mnpq+mn+mq+pq+1)b-f$$

u. ſ. f.

Die genäherten Werthe von $\frac{a}{b}$ ſind alſo

$$\text{I. } \frac{m}{1}; \quad \text{II. } \frac{mn+1}{n}; \quad \text{III. } \frac{mnp+m+p}{np+1};$$

$$\text{IV. } \frac{mnpq+mn+mq+pq+1}{npq+n+q}.$$

$$\text{V. } \frac{mnpqr+mnp+mnr+mqr+pqr+m+p+r}{npqr+np+nr+qr+1};$$

etc.

Es erhellt, daß der Zähler jedes Bruchs das Aggregat von dem Producte des Zählers des vorhergehenden Bruches in den gleichſtelligen Quotienten m, n, p, q, r, etc. und dem Zähler des zweyten vorhergehenden Bruchs iſt.

Man ſetze nur in der Reihe noch den Bruch $\frac{1}{0}$ vor, um das Geſetz auch auf den zweyten Bruch anzuwenden. Eben ſo verhält es ſich mit den Nennern. Die Brüche ſind abwechſelnd kleiner und größer als der vorgegebene Bruch $\frac{a}{b}$, weil die Vorzeichen des weggelaſſenen Bruches wechſeln. Da die Reſte c, d, e, f, g, etc. ſo klein ſind als ſie ſeyn können, ſo ſind die genäherten Werthe genauer als alle, die mit kleinern Zahlen ausgedruckt werden.

Exempel. Es ſey $\frac{a}{b}=\frac{8376571}{2684769}$.

Hier iſt m = 3; n = 8; p = 3; q = 46; r = 1; s = 1, etc. alſo die genäherten Werthe des Bruches I. $\frac{3}{1}$; II. $\frac{25}{8}$; III. $\frac{78}{25}$; IV. $\frac{3613}{1158}$; V. $\frac{3691}{1183}$; etc. Dieſes iſt der Bruch, auf deſſen Reduction Wallis ſechs Folioſeiten verwendet.

Durch dieſes Verfahren laſſen ſich Irrationalzahlen durch eine Reihe rationaler Brüche darſtellen, die ſich dem völligen Werthe mehr nähern als alle, die mit kleinern Zahlen ausgedruckt werden. Z. B. man habe gefunden, daß $\sqrt{3} = 1{,}7320508075 \ldots$ iſt. Hier iſt a = 17320508075 . . . ; b = 10000000000 . . . ferner m = 1; n = 1; p = 2; q = 1; r = 2; s = 1; t = 2; etc. Alſo iſt die Reihe der convergirenden Brüche für die Quadratwurzel aus 3 dieſe:

$\frac{1}{1}$; $\frac{2}{1}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{7}{4}$; $\frac{19}{11}$; $\frac{26}{15}$; $\frac{71}{41}$; $\frac{97}{56}$; $\frac{265}{153}$; $\frac{362}{209}$; $\frac{989}{571}$; $\frac{1351}{780}$; $\frac{3691}{2131}$; etc.

Mittelſt der Werthe der Brüche $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{d}{e}$, etc. werden die Brüche, woraus die Kettenbrüche beſtehen, gefunden.

Auflöſung iſt die wohl geordnete Darlegung des Verfahrens, wodurch das zufolge einer Aufgabe geſuchte erhalten wird. Es iſt mehr als eine Antwort, die auf beſtimmte Rechnungsfragen gegeben wird.

Die reinen geometriſchen Auflöſungen werden allein durch Zeichnung ſchicklicher Linien für den Verſtand bewerkſtelligt, ſo daß ſie durch ihre Durchſchnitte die geſuchten Größen darſtellen, wenn die Aufgabe eine beſtimmte iſt, oder daß jeder Punct derſelben der Aufgabe

ein Genüge thut, wenn die Aufgabe eine unbeſtimmte iſt. Wie man hiebey verfährt, iſt in dem Artikel, Analyſis als Methode, theils im Allgemeinen, ſo weit ſich darüber Vorſchriften geben laſſen, theils in Beyſpielen gewieſen. Man ſehe auch den Artikel, Ort, geometriſcher. Wird eine geometriſche Aufgabe durch Hülfe allgemeiner Rechnung aufgelöſet, ſo iſt die Auflöſung eine gemiſchte, insbeſondere eine trigonometriſche, wenn die trigonometriſchen (goniometriſchen) Formeln dabey angewandt werden, (ſ. Anwendung der Analyſis auf die Geometrie). Eine mechaniſche Auflöſung einer geometriſchen Aufgabe iſt eine ſolche, bey welcher man ſich einer krummen Linie bedient, zwiſchen deren Coordinaten keine algebraiſche endliche Gleichung Statt findet. Weil einige dieſer Linien, als die Spiralen, die Cykloide, die Epicykloiden, die Quadratrix, durch gewiſſe Bewegungen beſchrieben werden, und daher mechaniſche heißen, ſo iſt eine Auflöſung (oder Conſtruction) vermittelſt derſelben eine mechaniſche, die aber doch bloß im Verſtande geſchieht. Man nennt auch die Auflöſung einer geometriſchen Aufgabe eine mechaniſche; wenn ſie an einer wirklichen Zeichnung durch ſinnliche Werkzeuge ausgeführt wird, z. B. wenn eine ſenkrechte Linie mittelſt eines rechtwinklichten Dreyecks oder Winkelhakens gezogen, ein Winkel durch den Transporteur gezeichnet, eine Ellipſe, mittelſt eines dazu dienlichen Werkzeuges mit ſtetiger Bewegung eines Stiftes beſchrieben wird. Die praktiſche Richtigkeit einer ſolchen Auflöſung beruht auf der Genauigkeit des Werkzeuges und der Aufmerkſamkeit bey ihrem Gebrauche. Es giebt auch eine empiriſche Auflöſung in der Geometrie, bey der man ſich einer poſitio falſi bedient, z. B. wenn eine gerade Linie in eine gleiche Anzahl Theile durch Verſuche unmittelbar getheilt wird; wenn ein ordentliches Vieleck in einem Kreiſe durch Eintragung einer, zum Verſuche angenommenen, nöthigen Falls nach und nach veränderten Chorde eingeſchrieben wird.

Eine arithmetiſche Auflöſung iſt die Beantwortung einer Rechnungsfrage durch Zahlenrechnung, den Regeln

für den Fall der Frage gemäß. Eine **algebraiſche** Auflöſung iſt die Erfindung der Gleichung, welche die Verbindung zwiſchen den gegebenen und geſuchten Größen allgemein darſtellt, ohne auf eine beſtimmte Quantität zu ſehen. Wenn in den Bedingungen der Aufgabe ſchon ſo viele Gleichungen gegeben werden, als unbekannte Gröſſen zu beſtimmen ſind, ſo hat die Auflöſung wenig Schwierigkeit. Es kommt dabey nur auf eine geſchickte Auswahl der Größen an, die geſucht werden ſollen, da es oft dienlich iſt, nicht diejenigen unmittelbar zu ſuchen, nach welchen gefragt wird, ſondern andere, aus welchen ſie bequem gefunden werden können, wenn für dieſe die Gleichungen eine einfachere Form erhalten als für jene. Wenn aber in der Aufgabe nicht alle Data zu den nöthigen Gleichungen liegen, ſo müſſen dieſe aus den Lehrſätzen über die Formen der Größen, welche in der Aufgabe vorkommen, geholt werden. Die Aufgabe kann auch unbeſtimmt ſeyn, in welchem Falle man ſie als eine ſolche behandelt, oder eine Bedingung hinzufügt, wodurch ſie eine beſtimmte wird.

Die Auflöſungen in der eigentlichen Analyſis, der endlichen ſowohl als der unendlichen Größen, ſind ſo mannichfaltig als die Gegenſtände dieſer weitläufigen Wiſſenſchaft (ſ. Analyſis, Differential-Rechnung, Integral-Rechnung). Man muß bey dem Studium dieſer hohen Rechenkunſt die Wege, wodurch die Analyſten zu ihren Auflöſungen, ſo wie auch zu den Aufgaben ſelbſt gelangt ſeyn mögen, aufzuſpüren, und dadurch ſich ſelbſt Fertigkeit in der Auflöſung und auch der Aufſuchung von Aufgaben zu verſchaffen ſuchen. Es iſt vielleicht oft ſchwerer, Aufgaben zu machen, als vorgelegte Aufgaben aufzulöſen. Beydes gehört zur Analytik oder der mathematiſchen **Auflöſungskunſt**, die ein Werk des Erfindungsgeiſtes iſt, und nur da auf beſtimmten Regeln beruht, wo man die Unterſuchung auf ſolche Fälle von Verbindungen der Größen bringen kann, die vollſtändig entwickelt ſind.

Augenpunct oder **Hauptpunct**, (Punctum oculi ſ. viſus principale) iſt in der Perſpectiv der Punct auf der Tafel, wo die ſenkrechte von dem Auge auf ſie gezogene Linie ſie trifft, ſ. Perſpectiv.

Ausdehnung oder **ausgedehnte Größe** (Extenſio, extenſum) iſt zuſammenhangende, gleichartige Vielheit.

Die körperliche Ausdehnung iſt die allgemeine Form der Vorſtellung eines Körpers, nach Abſonderung jeder beſondern Beſchaffenheit und Wirkſamkeit deſſelben. Wir können den Körpern alles nehmen, ſelbſt die Wirklichkeit, nur nicht die Ausdehnung. Dadurch ſind ſie einer Geſtalt und Größe fähig, und ſind allein dadurch Gegenſtände der Geometrie. Die Ausdehnung, von allen ſinnlichen Beſchaffenheiten befreyt, iſt eine urſprüngliche, in unſerm Geiſte ſelbſt gegründete, Form der Vorſtellung, die allen Vorſtellungen von wirklichen Körpern zum Grunde liegt. Man kommt nicht ſowohl durch Abſonderung der ſinnlichen Eigenſchaften auf die Vorſtellung der Ausdehnung, ſondern ſetzt dieſe voraus, um jene an dieſe zu knüpfen. Betaſtung und Geſicht geben uns, jedes nach ſeiner Art, ein ſinnliches Bild der Ausdehnung. Die erſtere läßt uns aber unmittelbar nur etwas Widerſtehendes, verbunden mit andern Gefühlen erkennen; das Geſicht nur Licht und Farben. Unſer Geiſt iſt es, der ſich vermittelſt dieſer ſinnlichen vereinten Empfindungen Bilder eines zuſammenhangenden, ohne Ende theilbaren Ganzen ſchafft. Aber eben dieſe Vereinigung ganz ungleichartiger ſinnlicher Empfindungen zeigt, daß das Subſtrat, woran wir ſie knüpfen, ein Product unſers Verſtandes iſt.

Dieſe metaphyſiſchen Betrachtungen über den Gegenſtand der Geometrie ſollen dem Verſtande nur das völlige Eigenthumsrecht daran zuſichern. Wenn man aber auch die Ausdehnung als eine durch die Abſtraction aller ſinnlichen Eigenſchaften erworbene Vorſtellung betrachten, und in ſofern als etwas empiriſches anſehen wollte, ſo bleibt

doch die Form der Ausdehnung ganz das Product des Verſtandes. In der That aber iſt es einerley zu behaupten, daß wir an die ſchon in dem Geiſte vorhandene allgemeine Form der Körper ihre ſinnlichen Beſchaffenheiten knüpfen, oder zu ſagen, daß wir durch die Abſonderung derſelben bloß die Form ohne etwas wirkliches behalten. Nach beiden Vorſtellungsarten gehört die allgemeine Form dem Geiſte. Die Sinne geben nur Sinnliches zu erkennen.

Die formloſe Ausdehnung, was man in der Phyſik und Metaphyſik den Raum, den Inbegriff aller möglichen Stellen der wirklichen Körper, nennt, bietet dem Geometer nichts dar, was ihn beſchäftigen könnte. Die Formen der Ausdehnung ſind der Gegenſtand ſeiner Unterſuchungen. Dieſe geben wir ihr eigenmächtig, ohne ſie von der Erfahrung zu entlehnen, ob gleich die ſinnliche Betrachtung uns zur Erfindung derſelben Veranlaſſung geben kann. Die gerade Linie lernen wir nicht an einem ſtraff ausgedehnten Faden kennen, ſondern nennen dieſe gerade, weil wir unſern urſprünglichen Begriff von einer geraden Linie daran verſinnlicht antreffen. Läge der Begriff von einer geraden Linie nicht ſchon in unſerm Vorſtellungs-Vermögen, ſo würden wir an dem Faden nichts als eine körperliche Länge erblicken. Bey den weniger gemeinen Formen erhellt es gleich, daß der Begriff davon früher da iſt als die ſinnliche Darſtellung. Man zeichnet eine Ellipſe oder Parabel nach der angenommenen Regel ihrer Form, um ſich dieſe zu verſinnlichen; man giebt einem Körper die Form eines Sphäroids, eines Konoids, die man ſelbſt geſchaffen hat. Kepler ſagt ſehr richtig von dem Kreiſe: Specierum mathematicarum, quae Circulus dicitur, ineſt animae non tantum ut idea rerum externarum, ſed etiam ut forma quaedam ipſius animae. Harmon. L. IV. cap. 7. p. 168. Unter den Alten behaupteten beſonders die Platoniker, daß unſer Geiſt ſelbſt die mathematiſchen Formen und Verhältniſſe erzeuge. Umſtändlich handelt hievon Proklus in ſeinem Commentar über das erſte Buch der Euklideiſchen

Elemente, im 1ten und 2ten Buche. Ariſtoteles war der gegenſeitigen Meynung.

Die alten Geometer ließen ſich auf dieſe metaphyſiſchen Betrachtungen über den Urſprung der geometriſchen Begriffe nicht ein, vielleicht um auf keine Weiſe den Philoſophen Gelegenheit zur Einmiſchung in ihre Wiſſenſchaft zu geben. Euklides ſagt kurz, ein Körper iſt, was Länge, Breite und Tiefe hat; eines Körpers Gränze iſt Fläche; eine Fläche iſt was nur Länge und Breite hat; das Äuſſerſte einer Fläche ſind Linien; eine Linie iſt eine Länge ohne Breite; das Äuſſerſte einer Linie ſind Puncte.

Die auf irgend eine Art begränzte Ausdehnung iſt der geometriſche Körper. Seine Gränze, die an ihm, nicht als Theil von ihm, vorhanden iſt, heißt ſeine Oberfläche. Dieſe von dem Körper abgeſondert iſt die Fläche, die zweyte Gattung der Ausdehnung. Ihre Gränzen ſind die Umfangslinien, welche abgeſondert Linien ſind, die dritte Gattung der Ausdehnung. Zu dieſen kommt noch eine beſondere Gattung der Ausdehnung, die Winkel, ſo fern wir ſie uns als etwas Zuſammenhangendes, Gleichartiges, Theilbares bey der Vorſtellung der Lage der Linien gedenken.

Die geometriſche Ausdehnung iſt durchaus etwas Stetiges, allenthalben Zuſammenhangendes. Zwiſchenräume finden in ihr nicht Statt, da dieſe wo nichts wirkliches und von einander verſchiedenes gedacht wird, zu dem Ausgedehnten ſelbſt als Theile gehören müßten. Der geometriſche Körper iſt daher ins Unendliche theilbar. Allein man darf darum nicht die Theilbarkeit ohne Ende der phyſiſchen Ausdehnung beylegen, weil ſie der geometriſchen zukommt. S. Käſtners Geometrie §. 3.

Introduction à la Géométrie, ou développement de l' idée de l'étendue. Par l'Auteur du livre des Verités. à Brunswick. 1795. Der Verfaſſer ſucht den Begriff der Ausdehnung aus der Erfahrung herzuleiten und zu erklären. Die Abſonderung der

Gränzen, es ſey zwiſchen den Theilen eines einzelnen Gegenſtandes oder zwiſchen mehreren Dingen, iſt nach ihm der wahre Sinn, den man mit dem Worte, Ausdehnung, zu verknüpfen hat. Gränzen ſind aber ſelbſt eine Ausdehnung, und beziehen ſich auf etwas ausgedehntes.

Ausdruck (Expreſſio) iſt die ſymboliſche Darſtellung der Zuſammenſetzung einer Größe aus andern Größen, bekannten oder zum Theil unbekannten, unveränderlichen oder zum Theil veränderlichen. Z. B. der Ausdruck für die Wurzel der Gleichung $x^2 - 2ax + b = 0$ iſt dieſer, $a \pm \sqrt{(a^2 - b)}$; für das Quadrat der Ordinate einer Ellipſe auf der großen Axe, wenn die Abſciſſen vom Scheitel an genommen werden, iſt der Werth =

$$\frac{2bbx}{a} - \frac{bbxx}{aa}.$$

Auseinander fahrende (laufende) **Linien** (lineae divergentes) ſind erſtlich gerade, ſich ſchneidende, Linien nach derjenigen Gegend hin, wo ihr Abſtand immer mehr wächſt, je länger man ſie nimmt. In der Optik kommen divergirende Linien oder Strahlen, und ihr Gegentheil, die convergirenden, häufig vor. Zweytens heißen Parabeln von einer höhern Ordnung divergirend, wenn ihre Richtungen einen immer größern Winkel mit einander machen, je weiter die Schenkel verlängert werden, da bey der gemeinen Parabel ihre Richtungen ſich immer mehr dem Parallelismus nähern. Auch giebt es divergirende Hyperbeln, deren Schenkel ihre erhabene Seiten gegen einander kehren, und nach entgegengeſetzten Richtungen laufen. Newtoni enumeratio linearum tertii Ordinis. XII.

Ausmeſſen, ſ. Meſſen.

Ausſchnitt (Sector) einer Figur iſt ein Theil, der zwiſchen zwey geraden Linien, die aus einem Puncte innerhalb derſelben an den Umfang gezogen ſind, und dem von ihnen abgeſchnittenen Bogen des Umfangs enthalten

iſt. In dem Kreiſe insbeſondre iſt ein Ausſchnitt zwiſchen zwey Halbmeſſern und dem Bogen des Umfanges enthalten.

Ausſchnitt eines Körpers iſt ein Theil deſſelben der von einem Theile der Oberfläche als Grundfläche, und dem von jedem Puncte des Umfanges dieſes Theils nach einem Puncte innerhalb des Körpers gezogenen Linien begränzt wird. In der Kugel insbeſondere iſt ein Ausſchnitt ein kegelförmiger Theil, deſſen Spitze in dem Mittelpuncte der Kugel liegt.

Ausſonderung (excluſio) iſt eine Methode, arithmetiſche Aufgaben aufzulöſen, dadurch, daß man diejenigen Zahlen ausſondert, welche der Aufgabe kein Genüge thun. Frenicle, ein geſchickter franzöſiſcher Mathematiker, der zu den Zeiten des Descartes lebte, beſaß eine beſondre Geſchicklichkeit in der Anwendung dieſer Methode. Es war zu ſeiner Zeit ſehr üblich, daß die Mathematiker ſich Aufgaben vorlegten; Frenicle zeigte ſich bey dieſen gelehrten Turnieren immer auf dem Platze, und machte ſeiner Nation Ehre. Sogar Fermat und Descartes bewunderten die Gewandtheit, wodurch er ohne Algebra, durch die bloße Kraft ſeines Genie, mit Aufgaben fertig ward, welche die größten Mathematiker mit aller ihrer Algebra aufzulöſen Mühe hatten. Wenn er eine Aufgabe, die Zahlen betraf, vornahm, ſo ſuchte er nicht die Zahlen, welche die Bedingungen der Aufgabe erfüllten, ſondern diejenigen, welche ſich nicht dazu ſchickten. So ſehr man ihn bat, ſein Verfahren bekannt zu machen, wollte er ſich doch nicht dazu bequemen, aber nach ſeinem Tode fand es ſich unter ſeinen Papieren. Der Aufſatz iſt in der Sammlung abgedruckt, welche den Titel hat: Divers ouvrages de Mathématiques et de Phyſique par MM. de l'Acad. roy. des Sciences, à Paris 1693. Er enthält nur wenige allgemeine kurze Regeln, an der Zahl zehn, aber die Anwendungen auf zehn ausgeſuchte und ziemlich weitläufige Beyſpiele. Die Methode läßt ſich nicht in der Kürze beſchreiben: man muß ſie in dem Aufſatze ſelbſt ſtudieren. Doch iſt zu bemerken, daß ſie

ihre] Brauchbarkeit verloren hat, ſeitdem die algebraiſchen Methoden vollkommener und anwendbarer geworden ſind.

Dictionn. encyclop. art. Excluſion.

Ausziehung einer Wurzel, ſ. Wurzel.

Axe iſt eine gerade Linie in der Ebene einer krummen Linie, welche dieſe in zwey gleiche, ähnliche und auf beiden Seiten ähnlich liegende Theile zerſchneidet, z. B. in einer Parabel, in einer Ellipſe und Hyperbel. Die beiden letztern Linien haben zwey Axen, die auf einan der ſenkrecht ſind. Der Kreis hat unendlich viele Axen, alle durch den Mittelpunct. Viele krumme Linien haben keine Axen.

Man nennt aber auch diejenige gerade Linie in der Ebene einer krummen Linie, worauf die Abſciſſen genommen werden, die Axe der Abſciſſen, oder ſchlechtweg die Axe, und die durch den Anfangspunct der Abſciſſen mit den Ordinaten parallele die Axe der Ordinaten, der Ordinatenwinkel mag ein rechter oder ſchiefer ſeyn. Wenn bey einem ſchiefen Ordinatenwinkel die Ordinaten in demſelben Puncte auf beiden Seiten der Abſciſſenlinie ſich durchgehends gleich ſind, ſo heißt die Axe ein Durchmeſſer.

Axe eines geometriſchen Körpers iſt die gerade Linie, welche durch die Mittelpuncte aller ähnlichen parallelen Durchſchnitte des Körpers geht, vorausgeſetzt, daß die parallelen Durchſchnitte ähnliche Figuren mit einem Mittelpuncte ſind, und daß ihre Mittelpuncte in einer geraden Linie liegen. Wenn die parallelen Durchſchnitte Kreiſe ſind, und die Axe auf ſie ſenkrecht ſteht, ſo iſt die Axe zugleich die Axe der Umdrehung (Circumvolution, Rotation), z. B. in der Kugel, dem ſenkrechten Kegel, ſenkrechten Cylinder und Konoid. Ein ſchief ſtehender Kegel und Cylinder haben eine Axe im Allgemeinen, aber keine Drehungs-Axe. Wenn die Grundfläche eines Kegels oder Cylinders, anſtatt ein Kreis zu ſeyn, in eine Ellipſe verwandelt wird,

und alle mit ihr parallelen Durchſchnitte in jener ähnliche Ellipſen, die Mittelpuncte unverändert gelaſſen, ſo bleibt die gerade Linie durch dieſe Mittelpuncte eine Axe.

Die Axe eines Sphäroids, das durch die Umdrehung einer Ellipſe um eine ihrer Axen entſtanden iſt, iſt dieſe Axe.

Axioma, ſ. Grundſatz.

B.

Bacilli decimales, ſexagenales, ſ. Inſtrumentale Arithmetik.

Bakers Centralregel, ſ. Anwendung der Geometrie auf die Algebra.

Barlong, im Franzöſiſchen, ein rechtwinklichtes, ungleichſeitiges Parallelogramm. Barlongiſche Zahl iſt das Product zweyer um die Einheit verſchiedenen ganzen Zahlen. Die Summe der Reihe der geraden Zahlen, $2 + 4 + 6 \ldots + (2 + 2r)$ iſt eine ſolche. Denn ſie iſt $= \frac{1}{2}(1 + r)(4 + 2r) = (r + 1)(r + 2)$. (ſ. arithm. Reihe, 6.). Die Triangularzahlen ſind die Hälften einer barlongiſchen Zahl. Die Benennung von dem gleich vorher angeführten Worte rührt von der ehemals gewöhnlichen Vergleichung der Peoducte zweyer Zahlen mit Rechtecken her. Theon (ſ. Arithmetik, ihre Geſchichte) handelt in dem 13ten Kap. von dieſer Form der Zahlen. Er nennt ſie ἑτερομήκεις altera parte longiores. Die Auszeichnung dieſer Form der Zahlen mag wohl etwas bildliches zum Grnnde haben.

Baſedowiſche Regel, ſ. Regel der Zuſammenſetzung der Verhältniſſe.

Baſis, ſ. Grundfläche und Grundlinie.

Baſtardbruch (fractio ſpuria), beſſer ein uneigentlicher Bruch, d. i. deſſen Zähler ſo groß oder größer als der Nenner iſt.

Beauniſche Aufgabe iſt folgende: die Gleichung für die krumme Linie AM (Fig. 33. Tab. II.) zu finden, in welcher die Ordinate PM ſich zu der Subtangente PR verhält, wie eine gegebene Linie zu dem Unterſchiede der Ordinate und Abſciſſe, das iſt, wenn die gerade Linie AB unter dem Winkel von 45 Grad durch den Anfang der Abſciſſen A gezogen wird, welche PM in Q ſchneidet, und die gegebene Linie D heißt, ſo ſoll ſeyn PM : PR = D : MQ

De Beaune, Rath bey dem Landgerichte zu Blois im 17ten Jahrhundert, legte dieſe Aufgabe den Geometern vor. Sie war zu ſeiner Zeit merkwürdig, und von einer neuen Art. Man hatte bis dahin geſucht, aus der Natur einer krummen Linie die Lage der berührenden in jedem Puncte zu beſtimmen. Hier ſollte aus einer Eigenſchaft der berührenden Linie die Natur der krummen Linie gefunden werden. Descartes fand eine Eigenſchaft der geſuchten Linie, die ihm hätte zeigen können, daß ſie eine logarithmiſche Linie iſt, mit einem Ordinatenwinkel von 45 Grad, die Abſciſſen auf ihrer Aſymptote genommen. Er zeigte auch, wie ſie durch den Durchſchnittspunct zweyer ſich ſchneidenden Linien, die jede für ſich mit paralleler Bewegung fortrücken, beſchrieben wird. Es iſt Schade, daß er die Analyſis, wodurch er dieſes gefunden, nicht mitgetheilt hat. Er giebt bloß die Reſultate an, in einem Briefe an Beaune (Epiſtol. P. III. ep. 63.), wo aber die Aufgabe ſelbſt nicht wörtlich vorkommt. In einem Briefe an einen Ungenannten (l. c. ep. 71.) wird ſie angeführt, wie ſie von Beaune vorgelegt war. Als die Differential- und Integralrechnung aufkam, ward die Beauniſche Aufgabe wieder hervorgeſucht. In dem Journal des Savans 1692 erſchien eine Auflöſung, die l' Hopital und Johann Bernoulli gemeinſchaftlich gefunden hatten. Hernach gab Johann Bernoulli eine andere Auflöſung in den Actis Erud. 1693; noch eine mittelſt einer Reihe als Beyſpiel einer allgemeinen Methode, in A. Erud. 1694; eine Erläuterung der zweyten in A. E. 1696. Noch iſt in den Lectionibus Hoſpitalianis XI.

eine Auflöſung enthalten. Jakob Bernoulli machte die Aufgabe allgemeiner dadurch, daß er ſtatt der geraden Linie AB irgend eine krumme Linie ſetzte. Opp. nr. 72.

Es ſey AMN die geſuchte krumme Linie, die Abſciſſe $AP = x$, Ordinate $PM = y$, der Winkel APM ein Rechter, die gegebene Linie $D = a$. Es iſt die Subtangente $PR = \frac{ydx}{dy}$ (ſ. berührende Linie, 13.). Alſo iſt nach der Bedingung der Aufgabe,

$$dy : dx = a : y - x$$

das iſt

$$a\,dx = y\,dy - x\,dy.$$

In dieſer Differentialgleichung ſind die veränderlichen Größen nicht geſondert. Inzwiſchen hat man hier nicht nöthig, eine Subſtitution oder einen Multiplicator zu ſuchen. Man ſubtrahire auf beiden Seiten das Differential $a\,dy$, ſo iſt

$$a\,dx - a\,dy = y\,dy - x\,dy - a\,dy,$$

oder $$\frac{a\,(dx - dy)}{a + x - y} = - dy.$$

Da $\int \frac{du}{u} = \log nat \frac{u}{const}$, ſo iſt

$$\log nat \frac{a + x - y}{const} = - \frac{y}{a}, \text{ oder}$$

$$\log nat. \frac{const}{a + x - y} = + \frac{y}{a}.$$

Soll die krumme Linie durch den Anfangspunct der Abſciſſen gehen, ſo iſt der Logarithme $= 0$, wenn $y = 0$, und die dazu gehörige Zahl iſt $= 1$. Alſo iſt $const = a$, und

$$\log nat. \frac{a}{a + x - y} = \frac{y}{a}.$$

Man nehme auf der Abſciſſenlinie $AC = a$, ziehe CV unter dem Winkel von 45° oder parallel mit AB, verlängere PM bis an CV, in S, ſo iſt $MS = a + x - y$. Es ſey MT parallel mit CP, ſo iſt auch $MT = a + x - y$, und $CT = y\sqrt{2}$. Man ſetze $TM = u$; $CT = z$, ſo iſt

$$\log \text{nat.} \frac{a}{u} = \frac{z}{a\sqrt{2}} \cdot$$

Es iſt alſo die krumme Linie eine logarithmiſche, deren Aſymptote CV iſt. Daß die Coordinaten CT, TM einen Winkel von 45 Grad machen, iſt kein weſentlicher Unterſchied von derjenigen, wo der Coordinatenwinkel ein Rechter iſt.

Die berührende RM ſchneide die Aſymptote in V. Eben ſo, wie bey rechtwinklichten Coordinaten, iſt $TV = -\frac{u\,dz}{du}$ (ſ. berührende Linie, 13. 14.) Aus der Gleichung zwiſchen u und z folgt $-\frac{du}{u} = \frac{dz}{a\sqrt{2}}$, alſo iſt $TV = a\sqrt{2}$, oder die Subtangente auf der Aſymptote iſt unveränderlich, wie an der logarithmiſchen mit rechtwinklichten Coordinaten. (ſ. berührende Linie, 20.).

Dieſes hat Descartes gefunden. Er läßt die krumme Linie durch die ſtetige Durchſchneidung zweyer geraden Linien beſchreiben, deren eine ſich parallel mit AB, die andere parallel mit AC von dem Puncte A an bewegt. Die Geſchwindigkeit der erſtern läßt er gleichförmig ſeyn, die Geſchwindigkeit der andern aber zunehmen nach dem umgekehrten Verhältniſſe des auf AC noch rückſtändigen Weges für die mit AB parallele. In A ſollen beide Geſchwindigkeiten gleich groß ſeyn. Dieſes iſt ganz richtig. Die mit AB parallele ſey in LM, die mit AC parallele in TM, ihr Durchſchnitt M. Es ſey $AL = t$, und $LM = CT = z$, ſo iſt der ſenkrechte Abſtand der TM von $AC = y = \frac{z}{\sqrt{2}}$

Die Geſchwindigkeiten der Linien LM, TM, jener nach der Richtung AL, dieſer nach der Richtung PM, verhalten ſich wie $dt : dy$. Nun iſt $t = a - u$, alſo $dt = - du$. Die Gleichung zwiſchen u und z giebt

$$-\frac{au}{u} = \frac{dz}{a\sqrt{2}}.$$ Da $y = \frac{z}{\sqrt{2}}$, ſo iſt

$$\frac{dt}{a - t} = \frac{dy}{a}.$$ Daher iſt $dt : dy = a - t : a$

$= 1 : \frac{a}{a - t}$. In A, wo $t = 0$ iſt, iſt $dt : dy$ $= 1 : 1$. Man kann auch, wie man hieraus ſieht, TM ſich gleichförmig, und LM ungleichförmig bewegen laſſen, ſo wie man die Logarithmen urſprünglich in arithmetiſcher Progreſſion, die zugeordneten Zahlen in geometriſcher ſich vorſtellt.

Johann Bernoulli hat den Brief von Descartes an Beaune überſehen, als er in den Lect. Hoſpit. ſchrieb, Descartes habe in ſeinen Werken keine Auflöſung der Aufgabe gegeben, die er doch gefunden zu haben in einem Briefe behaupte.

Merkwürdig iſt es, daß in der Entſtehungsart der Beauniſchen Curve nach Descartes etwas ähnliches mit den Fluxionen vorkommt. Fluxionen ſind Verhältniſſe der Geſchwindigkeiten einer Linie und eines Punctes, durch deren zuſammengeſetzte Bewegung eine krumme Linie beſchrieben wird. Hier iſt auch das Neperiſche Syſtem angenommen, da die Geſchwindigkeiten der ſich bewegenden Linie zu Anfange gleich groß ſind.

Bedingung einer Aufgabe iſt eine Forderung, welcher bey der Auflöſung Genüge geſchehen muß. In jeder eigentlichen Aufgabe ſind eine oder mehrere Bedingungen zu erfüllen. In der unbeſtimmten Analytik iſt die allgemeine Bedingung, daß die geſuchten Größen ganze Zahlen oder auch rationale Brüche ſeyn.

Bedingungs-Gleichung (aequatio conditionalis, équation de condition) iſt eine ſolche, von wel-

cher die Möglichkeit der Aufſöſung einer Aufgabe, entweder überhaupt, oder auf eine vorgeſchriebene Art, abhängt.

In der unbeſtimmten Analytik iſt eine Bedingungsgleichung, $mm = ann + 1$, wo m und n ganze Zahlen ſind, wenn $axx + b$ ein Quadrat ſeyn ſoll. Auſſerdem muß es eine ganze Zahl f geben, welche für x geſetzt, die Formel $axx + b$ zu einem Quadrate macht.

Bedingungsgleichungen kommen beſonders in der Differential- und Integralrechnung vor, und enthalten die Relationen der parallelen Differentiale, welche vorhanden ſeyn müſſen, wenn die Integration einer Differentialgleichung möglich ſeyn ſoll. Dieſe heißen vorzüglich Bedingungsgleichungen. Diejenige für Differentialgleichungen vom erſten Grade zwiſchen zwey veränderlichen Größen iſt die einfachſte und vom häufigſten Gebrauche. S. Differentialgleichung.

Für eine Function von endlichen Differenzen irgend eines Grades, mit irgend einer Anzahl veränderlicher Größen hat Condorcet in den Abhandlungen der Pariſer Akademie 1770 die Bedingungsgleichungen angegeben. S. Couſin Calcul diff. et intégral. §. 565.

Bey beſondern Differentialformeln kommen auch Bedingungsformen zwiſchen den gegebenen Größen vor, woraus ſich die Fälle ergeben, in welchen das Integral ſich völlig, durch eine abbrechende Reihe von Gliedern, finden läßt.

Dergleichen laſſen ſich auch bey einigen Differentialgleichungen angeben, als in einer ſchweren, die Pfaff aufgelöſet hat. Disquiſit. analyticae. p. 137.

Befreundete Zahlen (numeri amicabiles) ſind ein Paar Zahlen, deren jede gleich iſt der Summe der aliquoten Theile der andern, z. B. 220 und 284. Die aliquoten Theile der erſten ſind 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110, und die Summe derſelben = 284.

Die aliquoten Theile der andern ſind 1, 2, 4, 71, 142, deren Summe = 220. Die Benennung, amicabiles, wird van Schooten zuerſt gebraucht haben.

Michael Stifel erwähnt dieſes einzigen Paares in ſeiner Ausgabe der Coß Chriſtoph Rudolphs. Einmal führt er es als Beyſpiel an, die aliquoten Theile einer Zahl zu finden (S 45), und ſetzt hinzu, es ſey luſtlich zu ſehen, wie ſo eben alle partes aliquote von 220 machen 284, und wie erumb alle partes aliquote von 284 ſo eben machen 220. Am Ende des Buchs (S. 819) braucht er ſie mit einigen andern Beyſpielen zum Beweiſe, daß, wiewohl ein jede Coß einen unausſprechlichen Begriff in ſich hat allerley künſtlicher Rechnung, dennoch man viel feiner Rechnung finde, welche der Coß nicht ſind unterworfen, ſondern neben der Coß fließen aus der Theorica. Um dieſe Behauptung zu widerlegen zeigt van Schooten (Exercit. math. L. V. ſect. 9.), wie man durch die Algebra befreundete Zahlen finden könne Die Methode gehört in die unbeſtimmte Algebra oder Analytik. Doch iſt das von Schooten gebrauchte Verfahren zu eingeſchränkt. Er findet dadurch drey Paare, 284 und 220; 18416 und 17296; 9437056 und 9363584. Zugleich führt Schooten eine von Descartes ihm mitgetheilte Regel, dieſe Gattung Zahlen zu finden, an, welche allerdings von dem Scharfſinne des Erfinders zeiget. Man wird ſie am leichteſten verſtehen, wenn ſie in Zeichen ausgedruckt wird. Es ſeyn P, Q, R unbeſtimmte Primzahlen, und A eine Potenz der Zwey. Man ſuche eine Potenz A von der Beſchaffenheit, daß $3A - 1 = P$; $6A - 1 = Q$; $18AA - 1 = R$, ſo ſind $2AR$ und $2APQ$ ein Paar befreundeter Zahlen. Die Regel iſt ebenfalls eine eingeſchränkte, da A eine Potenz der Zwey ſeyn ſoll. Auch bey Schootens Verfahren haben die beiden befreundeten Zahlen eine Potenz der Zwey zum gemeinſchaftlichen Factor.

G. W. Krafft hat in den neuen Petersburger Commentarien T. II. eine Unterſuchung über dieſe Materie mitgetheilt, die wegen der Bemerkungen über die Rela-

tion der Theiler einer Zahl und ihrer Summe lehrreich iſt. (De numeris amicabilibus atque aliis ad hanc doctrinam ſpectantibus). Die von ihm gefundene allgemeinere Regel iſt folgende: Es ſeyn P, Q, R Primzahlen, von welchen $R = (P + 1)(Q + 1) - 1$ iſt; ferner ſey a die Summe der Theiler einer Zahl A, die Eins und ſie ſelbſt mit eingeſchloſſen, und es ſey $A : a = R + 1 : PQ + R$, ſo ſind PQA und RA ein Paar befreundete Zahlen. Krafft ſucht zuerſt zu zwey Primzahlen, P und Q, die dritte R von der angegebenen Beſchaffenheit, und darauf die Zahl A, welche zu der Summe ihrer Theiler das Verhältniß $R + 1 : PQ + R$ hat. Eine Zahl aus ihrem Verhältniſſe zu der Summe ihrer Theiler zu finden, iſt wieder eine Aufgabe, die ſich nicht directe auflöſen läßt. Doch giebt Krafft eine Methode, die in manchen Fällen zum Ziele führt. Daneben hat er eine Tafel der Verhältniſſe der Zahlen von 1 bis 150 zu der Summe ihrer Theiler berechnet, worin man nachzuſehen hat, ob das gegebene Verhältniß einer Zahl zu der Summe ihrer Theile darin vorkommt, wodurch dann ein Paar befreundeter Zahlen gefunden iſt. Das Willkührliche bey der Annahme von P und Q kann die Entdeckung eines Paares ſolcher Zahlen ſehr langwierig machen. In den Beyſpielen, die Krafft beybringt, ſieht man keinen Grund der Beſtimmungen von P und Q. Ich würde mich zur Aufſuchung befreundeter Zahlen folgendes Verfahrens bedienen.

Da $R = PQ + P + Q$ ſeyn muß, ſo iſt $R + 1 : 2R - P - Q = A : a$, oder, wenn $A : a = m : n$ iſt, $R + 1 : 2R - P - Q = m : n$. Alſo iſt $nR + n = 2mR - m(P + Q)$, und

$$P + Q = \frac{(2m - n)R - n}{m}.$$ Da $P + Q = R - PQ$

iſt, ſo iſt $$PQ = \frac{(n - m)R + n}{m}.$$ Folglich werden, wenn für R irgend eine Primzahl angenommen wird,

P und Q durch eine quadratiſche Gleichung gefunden. Es iſt

$$P \text{ oder } Q = \frac{(2m - n)R - n}{2m}$$

$$\pm \frac{1}{2m} \sqrt{((2m - n)^2 R^2}$$

$$2 + (2m^2 + n^2 - 4mn)R + n^2 - 4mn);$$

Das obere Zeichen für eine der beiden Zahlen P oder Q, das untere für die andere. (ſ. Gleichung II. 1.) Man nehme für A irgend eine Zahl, und ſuche die Summe ihrer Diviſoren a, ſo ſind m und n gegeben. Nun muß ein ſolcher Werth der Primzahl R geſucht werden, daß die Wurzelgröße nicht allein einen möglichen rationalen Werth erhalte, ſondern daß auch P und Q ganze und zwar Primzahlen werden. Alle dieſe Bedingungen ſchränken die Möglichkeit der befreundeten Zahlen ſehr ein. Man hat nicht nöthig für R die Primzahlen von 1 an zu verſuchen. Denn der Werth von R darf nicht zwiſchen die Wurzeln der Gleichung, $(2m - n)^2 x^2$

$$+ 2(2m^2 + n^2 - 4mn)x + n^2 - 4mn = 0,$$

fallen, weil ſonſt die Größe unter dem Wurzelzeichen negativ wird, und wenn die Gleichung eine negative Wurzel hat, muß R größer als die poſit[illegible]e ſeyn. Nur wenn ſie unmögliche Wurzeln hat, giebt jeder Werth von R einen poſitiven Werth für die Größe unter dem Wurzelzeichen. (S. Gleichung I. 9.). Auch iſt zu bemerken, daß $\frac{(2m - n)R - n}{m}$ eine ganze Zahl ſeyn muß.

Exempel. Man nehme A = 4, ſo iſt die Summe der Diviſoren = 7, alſo m : n = 4 : 7; und P oder $Q = \frac{R - 7}{8} \pm \frac{1}{8}\sqrt{(R^2 - 62R - 63)}$. Die Gleichung $x^2 - 62x - 63 = 0$ hat nur eine poſitive Wurzel zwiſchen 60 und 61. Man hat alſo für R erſt von

61 an die Primzahlen zu verſuchen. Es müſſen $\frac{R-7}{4}$ und $\frac{3R+7}{4}$ ganze Zahlen ſeyn. Die erſte Bedingung macht 61 unbrauchbar. Die Zahl 67 giebt keine rationale Wurzel. Setzt man $R = 71$, ſo wird P oder Q $= 8 \pm 3$, beides Primzahlen, $P = 11$; $Q = 5$. Die beiden befreundeten Zahlen ſind 11. 5. 4 und 71. 4, das iſt 220 und 284.

Die unbeſtimmte Analytik leiſtet hier gute Dienſte. Die Größe unter dem Wurzelzeichen ſey $\alpha^2 R^2 + 2\beta R + \gamma$ welche ein Quadrat ſeyn ſoll. Die Wurzel des Quadrats ſey $\alpha R + p$, ſo iſt $2\beta R + \gamma = 2p\alpha R + p^2$, und daher $R = \frac{p^2 - \gamma}{2(\beta - p\alpha)} = \frac{\gamma - p^2}{2(p\alpha - \beta)}$. Dieſes iſt die Form von R, nach welcher man eine beliebige Anzahl Werthe von p in ganzen Zahlen verſuchen kann. Iſt γ gerade, ſo muß p auch gerade ſeyn; iſt γ ungerade, ſo iſt p auch ungerade. In dem erſten Falle ſetze man 2p ſtatt p, in dem andern $2p \pm 1$ ſtatt p. Die beſondere Beſchaffenheit der Formel für gegebene α, β, γ, mögen ſchickliche Abkürzungen an die Hand geben.

Wenn $\gamma = 0$ iſt, ſo ſetze man $\sqrt{(\alpha^2 R^2 + 2\beta R)}$ und $= pR$, es iſt $R = \frac{2\beta}{p^2 - \alpha^2}$. Kann man demnach einer in dreytheiligen Wurzelgröße für R einen Werth $r + u$ ſetzen, ſo daß dadurch das gegebene Glied der Wurzelgröße verſchwindet, ſo giebt dieſes eine beträchtliche Erleichterung. Dieſes wird erhalten, wenn r eine der Wurzeln der Gleichung, $\alpha^2 u^2 + 2\beta u + \gamma = 0$, iſt.

Exempel Es ſoll $R^2 - 62R - 63$ das Quadrat einer ganzen Zahl, und zugleich R eine Primzahl ſeyn, wenn es möglich iſt. Es iſt alſo $R = \frac{p^2 + 63}{-2(31 + p)}$.

Weil p ungerade und negativ ſey muß, ſo ſetze man $p = -2q - 1$, und es iſt $R = \frac{q^2 + q + 16}{q - 15}$ $= q + 16 + \frac{256}{q - 15}$. Hieraus ergiebt ſich, daß $q - 15$ ein Factor von 256 iſt, oder daß $q = \frac{256}{r}$ $+ 15$, wo r ein Factor von 256 iſt. Die Factoren 1, 2, 4 geben für R keine Primzahl, aber $r = 8$ giebt $q = 47$, und $R = 71$.

Exempel. Man ſuche, ob aus der Zahl 5 ſich, wie vorher aus 4, ein Paar befreundeter Zahlen herleiten laſſe. Es iſt alſo $A = 5$, $a = 6$, und $m : n = 5 : 6$; alſo

$$P \text{ oder } Q = \frac{2R - 3}{5} \pm \tfrac{1}{5}\sqrt{(4R^2 - 17R - 21)}.$$

Zugleich muß $\frac{2R - 3}{5}$ eine ganze Zahl ſeyn. Da alle Primzahlen ſich mit einer der Ziffern, 1, 3, 7, 9, endigen, ſo ſind hier nur diejenigen, die ſich mit 9 endigen, brauchbar, und es hat alſo R die Form $10p - 1$. Setzt man dieſen Werth für R, ſo wird die Wurzelgröße $= \sqrt{25(16p^2 - 10p)}$. Soll dieſe rational ſeyn, ſo iſt $p = \frac{10}{16 - q^2}$. Offenbar iſt keine ganze Zahl für q vorhanden, welche p zu einer ganzen poſitiven Zahl macht; aber auch kein Bruch. Denn wenn man ſtatt q einen Bruch $\frac{q}{r}$ ſetzt, ſo iſt $p = \frac{10r^2}{16r^2 - q^2}$. Hier müßte, da r^2 kein Factor des Nenners iſt, der Nenner entweder 10 oder 5 ſeyn, daß iſt, $16r^2 - q^2 = 10$ oder 5, welches für ganze Zahlen q und r wenigſtens nicht möglich iſt. Es kann alſo ein Paar befreundeter Zahlen nicht den gemeinſchaftilchen Factor 5 haben.

Euler hat in dem zweyten Theile ſeiner Opuſculorum (Berolini 1750) eine Abhandlung über die befreundeten Zahlen geliefert, die wegen des dabey angebrachten künſtlichen Verfahrens, dergleichen Zahlen zu entdecken, lehrreich iſt. Sie iſt deutlich geſchrieben. Es ſind darin 61 Paare befreundeter Zahlen angegeben. Die Methoden erfordern alle gewiſſe Verſuche, und die Kunſt beſteht darin, die Ungewißheit des Verſuchens zu vermindern. Euler giebt den befreundeten Zahlen die Formen apq und ar; oder apq und abr; oder abpq und acr, wo a, b, c angenommene Zahlen, p, q, r geſuchte Primzahlen ſind. Die Factoren derſelben Zahlen haben nichts gemeinſchaftliches. Auch ſucht er in den Formen zap und zbq, worin a, b, p, q die vorige Bedeutung haben, aus dieſen als angenommenen Zahlen den gemeinſchaftlichen Factor z.

Bekanntes Glied iſt in einer Gleichung dasjenige, welches nicht in die unbekannte Größe multiplicirt iſt, es mag eintheilig oder vieltheilig ſeyn. Vieta nannte es Homogeneum corporationis.

Benannte Zahlen ſind diejenigen, deren Einheit ein beſtimmter Begriff iſt. Z. B. 12 Fuß, 20 Thaler. Bey der Rechnung mit benannten Zahlen muß man die Eintheilung der Einheit in kleinere Theile kennen.

Benannte Zahlen können nicht mit einander multiplicirt werden. Wenn bey der Anwendung der Regel de Tri eine ſolche Multiplication vorkommt, ſo iſt der eine Factor allemahl als eine abſolute Zahl mit Bruchtheilen, die ſich auf eine abſtracte Einheit beziehen, oder auch ohne ſolche, zu betrachten. Wenn benannte Zahlen durch einander dividirt werden, ſo müſſen beide gleichartig ſeyn. Der Quotient zeigt an, wie vielmahl der Diviſor ſelbſt oder ein gewiſſer Theil deſſelben, in dem Dividendus enthalten iſt.

Bernoulliſche Zahlen ſind die Coefficienten des niedrigſten Gliedes in den Summen der geraden Potenzen ganzer Zahlen von 1 bis x. Es iſt nämlich, wenn S. x^{2n} die Summe der geraden Potenzen mit dem Exponenten 2n von der Wurzel 1 bis x bedeutet, (Potenz III. 13.)

$$S.x^2 = \tfrac{1}{3}x^5 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x$$

$$S.x^4 = \tfrac{1}{5}x^5 \ldots\ldots - \tfrac{1}{30}x$$

$$S.x^6 = \tfrac{1}{7}x^7 \ldots\ldots + \tfrac{1}{42}x$$

$$S.x^8 = \tfrac{1}{9}x^9 \ldots\ldots - \tfrac{1}{30}x$$

u. ſ. f.

Die abſoluten Zahlen $\tfrac{1}{6}$, $\tfrac{1}{30}$, $\tfrac{1}{42}$, $\tfrac{1}{30}$, ſind die erſten vier Bernoulliſchen Zahlen. Den Namen haben ſie von ihrem Erfinder, Jakob Bernoulli. (Potenz. III. 19.)

2. Euler hat die erſten 15 dieſer Zahlen in den Inſtitt. Calc. diff. P. II. §. 122 mitgetheilt. In den Comm. Petrop. novis. T. XIV. hat er ſie bis zur ſiebzehnten berechnet. Jakob Bernoulli hat nur die fünf erſten angegeben, und gezeigt, wie ſie folgweiſe aus den vorhergehenden gefunden werden, das allgemeine Geſetz ihrer Fortſchreitung aber nicht beſtimmt. Dieſes hat Moivre zuerſt bemerkt (Miſcell. Analyt. Suppl. p. 9). Euler hat es einfacher, und zur numeriſchen Berechnung bequemer dargeſtellt. Calc. diff. P. II. §. 123. Er hat auch den Gebrauch dieſer Zahlen zur Vereinfachung mancher Reihen, insbeſondere bey Summirungen, gezeigt.

3. Die erſten 12 Bernoulliſchen Zahlen ſind

$A = \frac{1}{6}$; $B = \frac{1}{30}$;

$C = \frac{1}{42}$; $D = \frac{1}{30}$;

$E = \frac{5}{66}$; $F = \frac{691}{2730}$;

$G = \frac{7}{6}$; $H = \frac{3617}{510}$;

$J = \frac{43867}{798}$; $K = \frac{174611}{330}$

$L = \frac{854513}{138}$; $M = \frac{236364091}{2730}$.

4. Es ſeyn die Bernoulliſchen Zahlen, A, B, C, D . . . . $\overset{-3}{N}$, $\overset{-2}{N}$, $\overset{-1}{N}$, N, etc. wo N die nte derſelben, $\overset{-1}{N}$, die (n — 1)te, u. ſ. f. iſt. Die Binomial-Coefficienten in der (2n + 1)ten Potenz ſeyn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. ſo iſt (Potenz III. 20).

$$\mathfrak{A}N - \mathfrak{C}\overset{-1}{N} + \mathfrak{E}\overset{-2}{N} - \mathfrak{G}\overset{-3}{N} + \ldots \pm \mathfrak{F}C \mp \mathfrak{D}B \pm \mathfrak{B}A \pm 1 = \pm \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}.$$

Setzt man für n folgweiſe 1, 2, 3, etc. ſo iſt

$$3A + 1 = + \frac{3}{2}$$

$$5B - \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} A - 1 = - \frac{5}{2}$$

$$7C - \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} B + \frac{7 \cdot\cdot 3}{1 \cdot\cdot 5} A + 1 = + \frac{7}{1}$$

$$9D - \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} C + \frac{9 \cdot\cdot 5}{1 \cdot\cdot 5} B - \frac{9 \cdot\cdot 3}{1 \cdot\cdot 7} A - 1 = - \frac{9}{2}$$

$$11E - \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} D + \frac{11 \cdot\cdot 7}{1 \cdot\cdot 5} C - \frac{11 \cdot\cdot 5}{1 \cdot\cdot 7} B + \frac{11 \cdot\cdot 3}{1 \cdot\cdot 9} A + 1 = + \frac{11}{2}$$

u. ſ. w.

5. Um das Geſetz der Formation deutlicher zu machen, ſetze man

$$A = 1.2\alpha \quad ; \quad B = 1.2.3.4\beta$$
$$C = 1.2..6\gamma \quad ; \quad D = 1.2....8\delta$$
$$E = 1.2..10\varepsilon \quad ; \quad \text{etc.}$$

ſo iſt

$$\alpha + \frac{1}{1.2.3} = + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{1.2}$$

$$\beta - \frac{\alpha}{1.2.3} - \frac{1}{1..5} = - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{1..4}$$

$$\gamma - \frac{\beta}{1.2.3} + \frac{\alpha}{1..5} + \frac{1}{1..7} = + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{1..6}$$

$$\delta - \frac{\gamma}{1.2.3} + \frac{\beta}{1..5} - \frac{\alpha}{1..7} - \frac{1}{1..9} = - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{1..8}$$

$$\varepsilon - \frac{\delta}{1.2.3} + \frac{\gamma}{1..5} - \frac{\beta}{1..7} + \frac{\alpha}{1..9} + \frac{1}{1..11} = + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{1...10}.$$

u. ſ. f.

Die Größen $-1, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, etc. machen eine rücklaufende Reihe aus, deren Relations-Scale iſt

$$+\frac{1}{1.2 3} \; ; \; -\frac{1}{1.2..5} \; ; \; +\frac{1}{1.2..7}, \text{ u. ſ. f.}$$

nur daß zu dem hieraus entſtehenden Werthe jeder noch eine Größe von der Form kommt, wie diejenigen ſind, die in den vorhergehenden Formeln den Theil rechter Hand ausmachen.

6. Man vergleiche mit dieſen Formeln diejenigen, welche für die Relationen der Coefficienten in der aus einer gebrochenen Function entſtehenden Reihe, in dem Art.

Rücklaufende Reihen, 9. ſich finden. Es erhellt daraus, daß die obigen Zahlen α, β, γ, δ, etc. Coefficienten in einer Reihe ſind, die aus einer rationalen gebrochnen Function einer veränderlichen Größe entſteht, worin Zähler und Nenner eine ohne Ende fortgehende Reihe ſind. Um die gebrochne Function nach dem hier vorkommenden Falle einzurichten, ſetze man den

Dividendus $= 1 - az + bz^2 - cz^3 + dz^4 - ez^5 + \text{etc.}$

Diviſor $= 1 - Az + Bz^2 - Cz^3 + Dz^4 - Ez^5 + \text{etc.}$

Quotienten $= 1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \varepsilon z^5 + \text{etc.}$

wo A, B, C, D, etc. aber nicht die Bernoulliſchen Zahlen bedeuten, ſondern Coefficienten, die noch beſtimmt werden ſollen. Es iſt nun

$$1 = 1$$

$$\alpha + A = + a$$

$$\beta - A\alpha - B = - b$$

$$\gamma - A\beta + B\alpha + C = + c$$

$$\delta - A\gamma + B\beta - C\alpha - D = - d$$

$$\varepsilon - A\delta + B\gamma - C\beta + D\alpha + E = + e$$

etc.

Die Vergleichung mit den Formeln für α, β, etc. in (5) giebt $A = \frac{1}{1.2.3}$; $B = \frac{1}{1.2..5}$;

$C = \frac{1}{1.2..7}$; $D = \frac{1}{1.2..9}$; $E = \frac{1}{1.2...11}$

u. ſ. w. Ferner

$a = \frac{1}{2}.\frac{1}{1.2}$; $b = \frac{1}{2}.\frac{1}{1.2.3.4}$;

$c = \frac{1}{2}.\frac{1}{1.2..6}$; $d = \frac{1}{2}.\frac{1}{1.2..8}$; $e = \frac{1}{2}.\frac{1}{1.2..10}$ etc.

Nun iſt $\sin\varphi = \varphi - \frac{1}{1.2.3}\varphi^3 + \frac{1}{1.2..5}\varphi - \frac{1}{1...7}\varphi^7 + \text{etc.}$ und $\cos\varphi = 1 - \frac{1}{1.2.}\varphi + \frac{1}{1.2.3.4}\varphi^4 - \frac{1}{1.2..6}\varphi^6 + \text{etc.}$ (Cyklometrie 5. 6.) Man ſetze demnach φ^2 für z, und multiplicire zugleich den Diviſor durch φ, dagegen man den Quotienten durch φ dividire, ſo iſt der Dividendus $= \frac{1}{2} + \cos.\,\varphi)$; der Diviſor $\sin\varphi$, und der Quotient $= \frac{1}{\varphi} - \alpha\varphi^3 - \beta\varphi^3 - \gamma\varphi^5 - \delta\varphi^7 -$ etc. Nun iſt $\frac{1+\cos\varphi}{2\sin\varphi} = \frac{1}{2}\,\text{cotang.}\,\frac{1}{2}\varphi$ (Goniometrie, 38.).

Folglich iſt

$$\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{\varphi} - \alpha\varphi - \beta\varphi^3 - \gamma\varphi^5 - \delta\varphi^7 - \text{etc.}$$

Die Bernoulliſchen Zahlen ſind alſo Factoren der Coefficienten in der Reihe für $\cot\frac{1}{2}\varphi$. Es iſt, wenn dieſe Zahlen ſelbſt wieder eingeführt werden,

$$\cot\frac{1}{2}\varphi = \frac{2}{\varphi} - \frac{2A}{1.2}\varphi - \frac{2B}{1.2.3.4}\varphi^3 - \frac{2C}{1.2..6}\varphi^6 - \frac{2D}{1.2...8.}\varphi^7 - \text{etc.}$$

8. Wenn $\cot\varphi = \frac{1}{\varphi} - a\varphi - b\varphi^3 - c\varphi^6 - d\varphi^7 - e\varphi^9 -$ etc. geſetzt wird, ſo iſt (Cyklometrie, 15.)

$3a = 1$	$5b = aa$
$7c = 2ab$	$9d = 2ac + bb$
$11e = 2ad + 2bc$	$13f = 2ae + 2bd + cc,$
$15g = 2af + 2be + 2cd$ etc.	

Da die Coefficienten unveränderlich ſind, ſo iſt

$$\cot \tfrac{1}{2}\varphi = \frac{2}{\varphi} - \tfrac{1}{2} a\varphi - \tfrac{1}{8} b\varphi^3 - \tfrac{1}{32} c\varphi^5 - \tfrac{1}{128}\varphi^7 - \tfrac{1}{512}\varphi^9 - \text{etc.}$$

Alſo iſt

$4\alpha = a$; $4^2.\beta = b$; $4^3.\gamma = c$; $4^4.\delta = d$; $4^5.\varepsilon = e$; etc. Setzt man für a, b, c, etc. dieſe Werthe in den angeführten Formeln, ſo laſſen dieſe ſich folgweiſe durch $4, 4^2, 4^3$, etc. dividiren, und es bleiben dieſelben Relationen zwiſchen den Zahlen α, β, γ, etc. wie zwiſchen a, b, c, etc. nur daß ihre Werthe andere ſind. Es iſt

$$3\alpha = \tfrac{1}{4} \qquad 5\beta = \alpha\alpha$$
$$7\gamma = 2\alpha\beta \qquad 9\delta = 2\alpha\gamma + \beta\beta$$
$$11\varepsilon = 2\alpha\delta + 2\beta\gamma \qquad 13\zeta = 2\alpha\varepsilon + 2\beta\delta + \gamma\gamma$$
$$15\eta = 2\alpha\zeta + 2\beta\varepsilon + 2\gamma\delta \text{ etc.}$$

9. Die Relationen der Bernoulliſchen Zahlen, A, B, C, D, etc. ſelbſt ſind folgende:

$$3A = \frac{2.1}{1.2}.\tfrac{1}{2}$$

$$5B = \frac{4.3}{1.2}. AA$$

$$7C = \frac{6.5}{1.2}. 2AB$$

$$9D = \frac{8.7}{1.2}.2AC + \frac{8..5}{1..4}. BB$$

$$11E = \frac{10.9}{1.2}.2AD + \frac{10..7}{1..4}.2BC$$

$$13F = \frac{12.11}{1.2}.2AE + \frac{12..9}{1..4}.2BD + \frac{12..7}{1..6}. CC$$

$$15G = \frac{14.13}{1.2}.2AF + \frac{14..11}{1..4}.2BE + \frac{14..9}{1..6}. 2CD$$

etc.

Der Weg, auf welchem dieſe merkwürdigen Relationen der Bernoulliſchen Zahlen hier gefunden ſind, iſt ein anderer, als der mühſamere, auf welchem Euler in den Inſtitt. Calc. diff. P. II. cap. 5. dazu gelangt iſt.

Berührende gerade Linie an einem Puncte einer krummen Linie, (Tangente), iſt diejenige, welche zwiſchen zwey ſchneidenden Linien, die durch dieſen Punct und einen andern, auf entgegengeſetzten Seiten deſſelben, gezogen ſind, innerhalb ihres ſpitzigen Winkels liegt, dieſer Winkel mag noch ſo klein und kleiner als jeder angebbare ſeyn.

1. Die krumme Linie ſey A M R, (Fig. 34. Tab. II). Durch den Punct M, und die beiden Puncte N, n, auf entgegengeſetzten Seiten von M, ſeyn die ſchneidenden, N M S, M n s, gezogen, ſo liegt die berührende T M t innerhalb des ſpitzen Winkels S M s und ſeines Scheitelwinkels, ſo klein auch der W. S M s werden mag. Wenn die Linien N M S und M n s ſich um M drehen, ſo fallen ſie, indem ſie ihre Stellen wechſeln auf der berührenden in eine einzige gerade Linie zuſammen.

2. Kann die krumme Linie nur in zwey Puncten von einer geraden geſchnitten werden, ſo iſt eine berührende diejenige, welche nur einen Punct mit ihr gemein hat, und ganz auf einer Seite derſelben liegt. Es giebt aber viele krumme Linien, die von einer geraden Linie in mehr als zwey Puncten geſchnitten werden. Darum kann man die berührende nicht allgemein für diejenige erklären, die mit der krummen Linie nur einen Punct auf die gedachte Art gemein hat, oder man müßte dieſes auf einen gewiſſen Theil der krummen Linie einſchränken, wie Archimedes bey ſeiner Spirallinie thut. Er zeigt von dieſer, daß jeder ihrer Umläufe nur in einem Puncte von der berührenden getroffen wird.

3. Wie die berührende an einem Kreiſe gezogen wird, lehren die Elemente, ſ. Kreis.

4. In einem Kegelſchnitte kann durch jeden Punct eine gerade Linie gelegt werden, welche alle unter dem ge-

hörigen Winkel gezogenen parallelen Chorden oder Doppelordinaten halbirt. Die mit dieſen Chorden durch den Endpunct dieſer Linie gezogene parallele Linie berührt den Kegelſchnitt, ſ. Linien der zweyten Ordnung.

5. Die Benennung, Tangente, wird ſchicklich der Linie, welche in der Goniometrie und Trigonometrie zur Beſtimmung eines Winkels gebraucht wird, eigen gelaſſen werden können.

Analytiſche Methode, gerade berührende an eine krumme Linie zu ziehen.

6. Es ſey AMR (Fig. 34.) ein Bogen der krummen Linie, für welche eiue Gleichung zwiſchen den Coordinaten AP und PM gegeben iſt. Man nehme irgend einen Punct N auf der einen oder der andern Seite von M, und ziehe NQ parallel mit MP, ſo findet zwiſchen AQ. und QN dieſelbe Gleichung Statt, wie zwiſchen AP und PM. Durch M, N werde eine gerade Linie NMS gezogen, welche die Abſciſſenlinie APQ in S treffe. Es ſey Mm parallel mit AQ, ſo iſt PS: PM = Mm: Nm. Das Verhältniß Mm: Nm ſuche man durch die beiden Abſciſſen und Ordinaten, und durch PS auszudrucken. Setzt man in dieſem Verhältniſſe AP = AQ, und MP = NQ, ſo geht die ſchneidende SMN in die berührende TMt über. Denn durch eine ähnliche Annahme für die ſchneidende Mns auf der andern Seite von M wird Ps = PS, daher Mns mit NMS in eine gerade Linie zuſammen fällt, das iſt, beide fallen in die berührende TMt.

7. Exempel. I. Es ſey AMR (Fig. 34.) eine Parabel, deren Axe AP, und Parameter = a iſt. Die Ordinaten MP, NQ ſeyn ſenkrecht auf die Axe; und AP = x; MP = y; AQ = z; NQ = u; die Subtangente PT = t, und die Subſecante PS = v. Es iſt ax = y^2; und az = u^2; ferner v: y = z — x: u — y. Jene erſtere Gleichung von der zweyten abgezogen giebt $a(z-x) = u^2 - y^2 = (u+y)(u-y)$. Daraus iſt z — x: u — y = u + y: a; folglich v: y = u + y: a. Die-

ſelbe Proportion wird erhalten, wenn N auf der andern Seite von M, in n, genommen wird. Setzt man $u = y$, ſo werden die Werthe von PS und Ps ſich gleich, das iſt, $v = t$, und $t : y = 2y : a$, alſo $t = \frac{2y^2}{a}$, oder $t = 2x$. Iſt PT gefunden, ſo iſt dadurch die berührende beſtimmt.

8. Exempel. II. Es ſey AMB (Fig. 35.) eine halbe Ellipſe, deren halbe große Axe $AC = a$; halbe kleine $CD = b$ iſt. Die Conſtruction und die Bezeichnungen wie in dem 1. Exempel. Die Gleichung für die Coordinaten AP ($= x$) und PM ($= y$) iſt $b^2 (2ax - x^2) = a^2 y^2$, und für AQ, QN iſt ſie $b^2 (2az - z^2) = a^2 u^2$. Durch die Subtraction wird erhalten $2ab^2 (z - x) - b^2 (z^2 - x^2) = a^2 (u^2 - y^2)$, das iſt, $2ab^2 (z - x) - b^2 (z + x) (z - x) = a^2 (u + y) (u - y.)$ Da $v : y = z - x : u - y$, ſo iſt $v : y = a^2 (u + y) : 2ab^2 - b^2 (z + x)$, es mag N auf der einen oder der andern Seite von M liegen. Setzt man $z = x$, und $u = y$, ſo werden die beiden Werthe der Subſecante v für entgegengeſetzte Lagen von N einander gleich, und $= PT$, ſo daß $t : y = a^2 y : b^2 (a - x)$, oder $t = \frac{a^2 y^2}{b^2 (a - x)} = \frac{2ax - x^2}{a - x}$. Dieſes giebt die merkwürdige Proportion, $CP : AP = BP : PT$.

9. Exempel. III. Es ſey die Gleichung für die krumme Linie: $y = a + bx + cx^2 + dx^3$, und für die Coordinaten u und z ſey ſie $u = a + bz + cz^2 + dz^3$. Die krume Linie iſt eine paraboliſche der zweyten Ordnung. Hieraus iſt $u - y = b (z - x) + c (z^2 - x^2) + d (z^3 - x^3)$, oder $u - y = b (z - x) + c (z + x) (z - x) + d (z^2 + zx + x^2) (z - x)$; alſo $v : y = 1 : b + c (z + x) + d (z^2 + zx + x^2)$. Setzt man $z = x$, ſo iſt $t = \frac{y}{b + 2cx + 3dx^2}$. Auf dieſelbe Art findet man für paraboliſche Linie höherer Ordnun-

gen die Subtangenten, vermittelſt derer die berührenden ſich ziehen laſſen.

10. Exempel. IV. Die Gleichung zwiſchen den Coordinaten ſey eine ungeſonderte (oder y eine functio implicita von x, nämlich:

$$ay^3 - bxy^2 - cx^2y + dx^3 + exy = 0.$$

Statt der Coordinaten x und y nehme man nun die beiden z und u, für welche eben ſo iſt

$$au^3 - bzu^2 - cz^2u + dz^3 + ezu = 0.$$

Zieht man die erſtere Gleichung von dieſer ab, ſo iſt

$$a(u^3 - y^3) - b(u^2 - y^2)z - by^2(z - x)$$
$$- c(z^2 - x^2)u - cx^2(u - y) + d(z^3 - x^3)$$
$$+ e(z - x)u + ex(u - y) = 0,$$

das iſt

$$[a(u^2 + uy + y^2) - bz(u + y) - cx^2 + ex]$$
$$(u - y) = [by^2 + cu(z + x) - d(z^2 + zx + x^2)$$
$$- eu](z - x).$$

Alſo iſt

$$v : y = [a(u^2 + uy + y^2) - bz(u + y) - cx^2 + ex] :$$
$$[by^2 + cu(z + x) - d(z^2 + zx + x^2) - eu].$$

Setzt man $u = y$ und $z = x$, ſo iſt

$$t : y = [3ay^2 - 2bxy - cx^2 + ex] :$$
$$[by^2 + 2cxy - 3dx^2 - ey].$$

11. Exempel. V. Es ſey x der Logarithme von y in dem Syſtem, deſſen Baſis $= a$ iſt, wenn nämlich die dadurch bezeichneten Linien in Zahlen mittelſt einer beliebigen Einheit ausgedruckt werden. Dieſe iſt die Ordinate AB in dem Anfangspuncte der Abſciſſen A. (Fig. 36.) Demnach iſt $y = a^x$. In der Figur iſt PM $= y$, und AP $= x$. Eine andere Zahl ſey u, und ihr Logarithme z in demſelben Syſtem, ſo iſt $u = a^z$. In der Figur wird u durch QN, und z durch AQ dargeſtellt. Aus beiden Gleichungen folgt erſtlich durch die Diviſion, $\frac{u}{y} = a^{z-x}$

Setzt man $a = 1 + b$, ſo iſt nach dem binomiſchen Lehrſatze, $\frac{u}{y} = 1 + (z - x)\, b + \frac{(z-x)(z-x-1)}{1 \cdot 2}\, b^2 + z - x - 2\, \frac{(z-x-1)(z-x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\, b^3 + \text{etc.}$

alſo iſt

$$\frac{u-y}{z-x} = y\left(b + \frac{z-x-1}{2}\, b^2 + \frac{(z-x-1)}{2} \cdot \frac{(z-x-2)}{3}\, b^3 + \text{etc.}\right).$$

Die Subſecante (in der Figur P S) iſt $= \frac{z-x}{u-y}$

$y = \frac{1}{b+q}$, wo q das ganze nach b folgende Stück der hier gefundenen Reihe bedeutet. Setzt man in derſelben $z = x$, ſo erhält man den Werth der Subtangente P T

$$t = \frac{1}{b - \frac{1}{2} b^2 + \frac{1}{3} b^3 - \frac{1}{4} b^4 + \text{etc.}}.$$

Die Subtangente an der logarithmiſchen Linie iſt alſo eine unveränderliche Größe. In dem Artikel von den Logarithmen wird gezeigt, daß $b - \frac{1}{2} b^2 + \frac{1}{3} b^3 - \frac{1}{4} b^4 + \text{etc.} = \log.\, \text{nat.}\, (1 + b) = \log.\, \text{nat.}\, a$ iſt. Folglich iſt die Subtangente $t = \frac{1}{\log.\, \text{nat.}\, a}$ Will man ſie als Linie, ohne eine Einheit anzunehmen, ausdrucken, ſo iſt $t = \frac{AB}{\text{l. nat.}\, (a : AB)}$. Da Logarithmen ſich nie auf Linien oder benannte Größen, ſondern nur auf abſolute Zahlen beziehen, ſo iſt log a, wenn a eine Linie bedeutet, als $\log. \frac{a}{1}$ zu betrachten, wo für 1 die Linie geſetzt wird, die vorher zur Einheit diente. Für die Zahl t wird nun $\frac{t}{AB}$ ge-

ſetzt, wo t eine abſolute Linie, ohne Beziehung auf eine Einheit, bedeutet.

Anwendung der Differentialrechnung zur Beſtimmung der berührenden Linie.

12. Eine berührende gerade Linie kann auch erklärt werden, als diejenige, welche mit der krummen Linie in dem Berührungspuncte einerley Richtung hat. An der geraden TMt (Fig. 34.) ſeyn die Abſciſſen AP, AQ, wie an der krummen AMR, die Ordinaten PM, Qt, ſo wird ihre Richtung beſtimmt durch das Verhältniß der Unterſchiede der beiden Abſciſſen und der Ordinaten, Mm : tm, welches für jeden Unterſchied daſſelbe bleibt, und = PT : PM iſt. An der krummen Linie AMR wird die Richtung in dem Puncte M beſtimmt durch das Gränzverhältniß der Unterſchiede Mm : Nm, da das Verhältniß endlicher Unterſchiede die Richtung der Chorde oder der ſchneidenden SMN angiebt. Demnach iſt die berührende gerade Linie diejenige, an welcher das Verhältniß der Unterſchiede zweyer Abſciſſen und der zugehörigen Ordinaten dem Gränzverhältniſſe dieſer Unterſchiede an der Curve gleich iſt.

13. Es ſey nun für die krumme Linie AMR (Fig. 34.) die Abſciſſe AP = x, Ordinate PM = y, die berührende MT, die Subtangente PT = t, ſo iſt $t = \frac{y\,dx}{dy}$.

Denn das Gränzverhältniß von Nm : Mm wird durch $dy : dx$ bezeichnet. Das demſelben gleiche an der berührenden iſt PM : PT; folglich iſt $dy : dx = y : t$.

Man kann die Formel für t auch folgendergeſtalt abfaſſen. Es ſey die Differentialgleichung zwiſchen den Coordinaten, $P\,dx = Q\,dy$, ſo iſt $Pt = Qy$, und $t = \frac{Qy}{P}$.

Die Formeln gelten für jeden Coordinatenwinkel.

14. Wenn der Coordinaten-Winkel ein rechter iſt, ſo iſt die Tangente des Winkels TMP, der berührenden mit der Ordinate (d. i. der Curve in M mit der Ordinate)

$= \frac{PT}{PM} = \frac{dx}{dy}$; und die Tangente des W. MTP, der berührenden mit der Abſciſſenlinie $= \frac{dy}{dx}$.

15. Die Subtangente liegt mit dem Anfangspuncte der Abſciſſen auf derſelben Seite der Ordinate, wenn die abſoluten Veränderungen der Coordinaten gleichnamig (beides Zunahmen oder Abnahmen) ſind; auf verſchiedenen Seiten, wenn dieſe ungleichnamig ſind. Ein poſitiver Werth von $\frac{y\,dx}{dy}$ zeigt an, daß die poſitive Abſciſſe von ihrem Anfangspuncte an, und die Subtangente P T von dem Grundpuncte P der Ordinate angenommen, entgegengeſetzte Richtungen haben; ein negativer Werth von $\frac{y\,dx}{dy}$ zeigt das Gegentheil an. Bey negativen Abſciſſen verhält es ſich umgekehrt. Nämlich hier zeigt ein poſitiver Werth der Subtangente an, daß ihre Richtung dieſelbe wie die der negativen Abſciſſe iſt. Man hat hier aber lieber auf die Richtung der poſitiven Abſciſſen zu achten, um die Beurtheilung der Lage der Subtangente einfacher zu machen.

16 Die Differentialrechnung leiſtet das auf einem kürzern Wege, was die obige Differenzenrechnung auf einem längern fand. Das Verfahren iſt nach beiden im Weſentlichen daſſelbe, nach jener aber iſt es kürzer, weil in den Differentialformeln alle die Rechnungen ſchon enthalten ſind, die nach der andern Rechnungsart in jedem Falle erſt gemacht werden müſſen. Die Differenzenrechnung erläutert aber die Anwendung der Differentialrechnung auf dieſen Fall, und überhaupt ihr Verfahren ſehr gut. Man ſieht daraus, wie ein von der Quantität der Unterſchiede unabhängiges Verhältniß entſteht, und daß dabey nichts als unbedeutend klein weggelaſſen wird, ſondern daß Größen oder Verhältniſſe gleich geſetzt werden, die der Beſchaffenheit des Geſuchten zufolge nicht ungleich ſeyn

dürfen. Zur Vergleichung beider Rechnungsarten wollen wir die obigen Beyſpiele nach der Differentialrechnung behandeln.

17. Die krumme Linie ſey eine Parabel, deren Gleichung iſt $ax = yy$. Nun iſt $a\,dx = 2y\,dy$, daher $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{a}$; alſo die Subtangente $t = \frac{2yy}{a} = 2x$.

18. Die krumme Linie ſey eine Ellipſe, deren Gleichung iſt $bb\,(2ax - xx) = aayy$. Die Differentialgleichung iſt $bb\,(a-x)\,dx = aay\,dy$; daher $\frac{dx}{dy} = \frac{aay}{bb\,(a-x)}$, und die Subtangente $t = \frac{aayy}{bb\,(a-x)} = \frac{(2a-x)\,x}{a-x}$.

19. Die krumme Linie ſey eine von der paraboliſchen Gattung, und ihre Gleichung, $y = a + bx + cx^2 + dx^3$. Die Differentialgleichung iſt $dy = b\,dx + 2cx\,dx + 3dx^2\,dx$.

Daher $t = \frac{y}{b + 2cx + 3dx^2}$.

20. Die Gleichung für die krumme Linie ſey
$$ay^3 - bxy^2 - cx^2y + dx^3 + exy = 0,$$
ſo iſt die Differentialgleichung, wenn man zuerſt bloß x, und darauf y veränderlich ſetzt, (Diff. Gleich. 4 u. 11.)
$$(-by^2 - 2cxy + 3dx^2 + ey)\,dx$$
$$+ (3ay^2 - 2bxy - cx^2 + ex)\,dy = 0$$
folglich $t = \frac{y\,(3ay^2 - 2bxy - cx^2 + ex)}{by^2 + 2cxy - 3dx^2 - ey}$.

21. Iſt die Gleichung die transſcendente: $y = a^x$, ſo wird aus der Differenzen-Gleichung die Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = y\,(b - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{3}b^3 - \text{etc.})$ hergeleitet, indem für den Quotienten der endlichen Differenzen der

Differential-Quotient $\frac{dy}{dx}$ geſetzt, zugleich aber auch $z = x$ genommen wird. Zu vergl. Differ. Formeln §. 12.

Die Subtangente, $\frac{y\,dx}{dy}$, iſt die Conſtante

$$\frac{1}{b - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{3}b^3 - \text{etc.}}$$

22. Iſt auf derſelben Seite der Abſciſſenlinie mehr als eine ſtetige Folge von Ordinaten, wenn nämlich die Curve mehr als einen Zweig auf dieſer Seite hat, ſo hat die Subtangente für Puncte der Curve, die auf den verſchiedenen Zweigen zu einer gemeinſchaftlichen Abſciſſe gehören, verſchiedene Werthe. Sie kann daher nicht bloß von x eine Function ſeyn. Um die verſchiedenen Werthe derſelben zu beſtimmen, verbinde man die Gleichung für den Differentialquotienten, $\frac{dx}{dy}$, als eine endliche veränderliche Größe, p, mit der Gleichung zwiſchen x und y, und leite daraus durch die Wegſchaffung von y eine Gleichung zwiſchen dem Quotienten p und x her. Aus dieſer Gleichung müſſen ſich alle Werthe des Quotienten p für irgend eine Abſciſſe ergeben, und daraus die Subtangenten zu dieſer Abſciſſe. Iſt die Gleichung eine algebraiſche, ſo muß ihr Grad wenigſtens ſo groß ſeyn, als die Anzahl der möglichen Werthe, welche der zu einer und derſelben Abſciſſe gehörige Differentialquotient haben kann.

23. Schneiden ſich zwey oder mehrere Zweige der Curve in einem Puncte, ſo ſind in dieſem ſo viele berührende als Zweige, die ihn gemein haben. Die Formel für die Subtangente kann aber keine derſelben angeben, weil die Werthe von y für dieſen Punct nicht verſchieden ſind. Aber die Gleichung zwiſchen dem Differentialquotienten p und der Abſciſſe (22.) giebt alle Werthe von p eben ſo gut an, als wenn alle Ordinaten zu einer Abſciſſe verſchieden ſind.

24. Ein leichterer und auch in allgemeinerer Rückſicht merkwürdiger Weg die Subtangenten für den Durchſchnittspunct zweyer oder mehrerer Zweige zu finden, iſt folgender.

Es ſey $\frac{dx}{dy} = \frac{Q}{P}$, wo P und Q Functionen von x und y ſind. In dieſen ſetze man x + e für x und y + f für y, und bezeichne dieſe Ausdrücke der Coordinaten durch x^1 und y^1, ſo daß $\frac{dx^1}{dy^1} = \frac{Q + \Delta Q}{P + \Delta P}$, wo P und Q dieſelben Functionen von x und y wie vorher, ihre Differenzen ΔP und ΔQ aber zugleich von e und f ſind. Für x = a, und y = b, werde ſowohl P als Q Null, ſo iſt $\frac{dx^1}{dy^1} = \frac{\Delta Q}{\Delta P}$. Je kleiner e und f genommen werden, deſto näher kommt der Quotient $\frac{dx^1}{dy^1}$ dem $\frac{dx}{dy}$, und $\frac{\Delta Q}{\Delta P}$ dem $\frac{dQ}{dP}$. Daher iſt für die Coordinaten a und b der Differentialquotient $\frac{dx}{dy} = \frac{dQ}{dP}$, wo x = a, und y = b zu ſetzen iſt. Dividirt man in $\frac{dQ}{dP}$ Zähler und Nenner durch dy, ſo enthalten ſie den Differentialquotienten $\frac{dx}{dy}$ nebſt beſtändigen Größen. Wird nun die Gleichung auf beiden Seiten durch $\frac{dP}{dy}$ multiplicirt, ſo entſteht eine quadratiſche für $\frac{dx}{dy}$. Hiebey wird vorausgeſetzt, daß $\frac{dP}{dy}$ und $\frac{dQ}{dy}$ nicht zugleich Null ſind, und daß der erſtere Quotient nicht eine gegebene Größe ſey; dann erhält

man zwey Werthe für $\frac{dx}{dy}$ und dadurch auch für die Subtangente an dem Doppelpuncte, wo ſich zwey Zweige ſchneiden, und $x = a$; $y = b$ iſt,

Wenn in ΔP und ΔQ alle Glieder ſich heben, die e und f einfach enthalten, und nur die mit den Quadraten und höhern Potenzen nebſt Producten von e und f bleiben, ſo wird die Gränze von $\frac{\Delta Q}{\Delta P}$ eine gebrochene Function, die das Quadrat von $\frac{dx}{dy}$ enthält. Iſt dieſes nicht bloß im Zähler, ſondern auch im Nenner enthalten, ſo entſteht aus der Gleichung $\frac{dx}{dy} = \frac{dQ}{dP}$ eine cubiſche für $\frac{dx}{dy}$, alſo für den Fall, da drey Zweige ſich in einem Puncte ſchneiden. Wenn in $\frac{\Delta Q}{\Delta P}$ auch e^2, f^2 und ef wegfallen, ſo entſteht eine Gleichung vom vierten Grade für $\frac{dx}{dy}$ in dem Falle, daß vier Zweige ſich in einem Puncte ſchneiden. Auf ähnliche Art bey noch größerer Anzahl gleicher Ordinaten an einem Puncte.

25. Exempel I. Die Gleichung ſey

$$x^3 + xy^2 - 5x^2 + 3x - 4y + 5 = 0,$$

welche für $x = +1$ dieſe wird: $y^2 - 4y + 4 = 0$, oder $(y-2)^2 = 0$, ſo daß beide Werthe von $y = +2$ ſind. Die krumme Linie iſt Fig. 37 Tab. III. abgebildet. Sie ſchneidet die Abſciſſenlinie AX in drey Puncten B, C, D, für welche die Abſciſſen AB, AC, AD die Wurzeln der cubiſchen Gleichung, $x^3 - 5x^2 + 3x + 5 = 0$ ſind, und erſtreckt ſich mit zwey unendlichen Schenkeln, MU, DU, längs der Aſymptote AU, die durch den Anfang der Abſciſſen A geht. Sie hat in Beziehung auf die Abſciſſenlinie zwey Zweige, die ſich in M ſchneiden, für welchen Punct die Abſciſſe $AP = +1$, und die Or-

dinate $PM = +2$ iſt. Hier ſind zwey berührende TMt und $T'Mt'$, deren Lage zu beſtimmen iſt. Für einen unbeſtimmten Punct der Curve iſt

$$\frac{dx}{dy} = \frac{4 - 2xy}{3x^2 + y^2 - 10x + 3}.$$

Für den Punct M, an dem $x = +1$, und $y + 2$ iſt, ſind Zähler und Nenner Null. Da $dQ = -2xdy - 2ydx$, und $dP = 6xdx + 2ydy - 10dx$; ſo iſt für $x = +1$ und $y = +2$;

$$dQ = -2dy - 4dx = -2\left(1 + \frac{2dx}{dy}\right)dy,$$

$$dP = +4dy - 4dx = 4\left(1 - \frac{dx}{dy}\right)dy.$$

Folglich iſt

$$\frac{dx}{dy} = -\left(1 + \frac{2dx}{dy}\right) : 2\left(1 - \frac{dx}{dy}\right).$$

Daraus wird erhalten

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 - \frac{2dx}{dy} - \frac{1}{2} = 0,$$

und daher $\frac{dx}{dy} = 1 \pm \sqrt{\tfrac{3}{2}}$.

Die Subtangenten ſind $PT = 2 + 2\sqrt{\tfrac{3}{2}}$; und $PT' = 2 - 2\sqrt{\tfrac{3}{2}}$. Die negative hat die Richtung der poſitiven Abſciſſe AP, zufolge (14.).

26. Exempel. II. Die Gleichung für eine krumme Linie ſey

$$x^3 + xy^2 - 2x^2 - 2y + 2 = 0,$$

ſo iſt

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2 - 2xy}{3x^2 - 4x + y^2}.$$

Für $x = +1$ wird $yy - 2y + 1 = 0$, ſo daß y zwey gleiche Werthe, $+1$ hat. Für dieſe wird der Zähler und Nenner des Quotienten $\frac{dx}{dy}$ Null. Es iſt

$dQ = -2y\,dx - 2x\,dy$, und $dP = 6x\,dx - 4\,dx + 2y\,dy$, alſo für $x = +1$, und $y = +1$,

$$dQ = -2dx - 2dy = -2\left(\frac{dx}{dy}+1\right)dy,$$

$$dP = 2dx + 2dy = 2\left(\frac{dx}{dy}+1\right)dy.$$

Demnach iſt $\frac{dx}{dy} = -1$, und die Subtangente $\frac{y\,dx}{dy} = -1$. Dieſer einfache Werth zeigt an, daß die krumme Linie für die Coordinaten, $x = +1$, und $y = +1$ eine Spitze hat, in welcher zwey Zweige an einer gemeinſchaftlichen Berührungslinie zuſammen kommen. Sie iſt in Fig. 38. Tab. III. abgebildet. Sie erſtreckt ſich mit zwey unendlichen Schenkeln MU, BU an der Aſymptote AU hin, und ihre beiden Zweige vereinigen ſich in M, ohne ſich zu ſchneiden. Die Subtangente iſt PT, negativ, und hat daher von P aus mit den poſitiven Abſciſſen dieſelbe Richtung.

Lage der Berührenden für Ordinaten aus einem Puncte.

27. Es iſt BMR (Fig. 39. Tab. III.) eine krumme Linie, in deren Ebene ein beſtimmter Punct C, von dem an die krumme Linie gerade wie CM gezogen werden. Jeder Punct M der Curve wird durch die Länge von CM und ihren Winkel mit einer firen durch A gelegten geraden AC beſtimmt. Es wird eine allgemeine Formel für die Lage der berührenden TMt gegen CM geſucht, vermittelſt welcher der Winkel CMT aus der Gleichung zwiſchen CM und dem Winkel ACM hergeleitet werden könne.

Man ziehe noch eine Ordinate CN, welche die berührende in t ſchneide, und beſchreibe mit CM als Halbmeſſer den Bogen Mm innerhalb des Winkels MCN. Der veränderliche Radius der Curve CM ſey y, und $CN = y + \Delta y$;

der Winkel $ACM = \varphi$, und $MCN = \Delta\varphi$. Ein Winkel iſt bey der Vergleichung mit Linien ein Kreisbogen, deſſen Halbmeſſer die lineariſche Einheit iſt. Die berührende iſt auch hier die gerade, an welcher das Gränzverhältniß der Veränderungen der Coordinaten, nämlich tm und MCt gleich iſt dem Gränzverhältniß der Veränderungen Nm und MCN an der Curve. Man ziehe noch die ſenkrechte CP auf die berührende, ſo iſt coſ MCP

$= \frac{CP}{CM}$, und coſ tCP $= \frac{CP}{Ct}$, daher

$\cos MCP - \cos tCP = \frac{CP(Ct - CM)}{CM.Ct}$; das iſt

(Goniometrie, 28.),

$2 \sin \frac{1}{2}(MCP + tCP). \sin \frac{1}{2} MCt =$

$\frac{CP(Ct - CM)}{CM.Ct}$, und $\frac{Ct - CM}{Mct} =$

$\frac{CM.Ct}{CP} \cdot \frac{2 \sin \frac{1}{2} Mct}{Mct} \cdot \sin \frac{1}{2}(MCP + tCP)$.

Die Gränze dieſes Werthes iſt $\frac{CM^2 \sin MCP}{CMP}$,

oder, weil $CP = MC. \cos MCP$ iſt, dieſe,

$\frac{CM. \sin MCP}{\cos MCP.}$, oder $\frac{CM}{\tang C.MP}$. Dieſe Gränze

iſt auch die von dem Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta \varphi}$. Da dieſe durch

$\frac{dy}{\varphi d}$ bezeichnet wird, ſo iſt $\frac{dy}{d\varphi} = \frac{y}{\tang CMP}$, alſo iſt

$\tang CMP = \frac{y\,d\varphi}{dy}$.

Das Differentialverhältniß von tm zu MCt kann man etwas kürzer durch die Differentialrechnung erhalten. Es iſt $CM = CP. \sec MCP$, und das Differential von

$cM = CP. d\, ſec.\, MCP = CP.\, ſec.\, MCP.\, tang\, MCP. dMCP. = CM.\, tang\, MCP. dMCP$
$= \frac{CM}{tang\, CMP} dMCP.$ (ſ. Differentialformeln.)

28. Exempel. Es iſt AMR (Fig. 40. Tab. III.) eine Parabel, deren Axe AX, Brennpunct F. Die Ordinate aus dem Puncte F iſt $FM = y$, der Winkel $AFM = \varphi$, der Parameter $= a = 4AF$. Die Gleichung zwiſchen y und φ iſt

$$\tfrac{1}{2} a = (1 + coſ\varphi)\, y,$$

wo $coſ\varphi$ für einen ſtumpfen Winkel negativ iſt.

Es iſt $dy = \frac{a\, ſin\, \varphi\, d\varphi}{2(1 + coſ\varphi)^2} = \frac{y\, ſin\, \varphi\, d\varphi}{1 + coſ\varphi}$;

alſo $\frac{y d\varphi}{dy} = \frac{1 + coſ\varphi}{ſin\, \varphi} = cot\, \tfrac{1}{2}\varphi$.

Die berührende in M ſey TMt, ſo iſt tang FMT $= cot\, \tfrac{1}{2}\varphi$; alſo $FMT = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi$.

Man ziehe MQ parallel mit AX, ſo iſt $FMQ = \varphi$. Ferner ſey MN ſenkrecht auf TMT, ſo iſt $FMN = \tfrac{1}{2}\varphi$, alſo $NMQ = NMF$, und $QMt = FMT$. Wenn AMR die von F an ſie gezogenen Linien nach dem Geſetze der Zurückſtrahlung für das Licht zurück ſendet, ſo ſind die zurückgeworfenen der Axe parallel, und die mit der Axe parallelen Linien werden nach dem Brennpunct hin gebogen.

Daher iſt der Winkel MTF der berührenden mit der Axe gleich dem FMT, weil jener $= QMt$ iſt. Folglich iſt $FT = FM$. Auch iſt $FN = FM$, weil $FNM = NMQ = NMF$. Alſo $FN = FT$.

29. Exempel. Es iſt AMB (Fig. 41.) eine halbe Ellipſe, AB die große Axe, C der Mittelpunct, F, G ſind die Brennpuncte, man ſucht die Winkel der Linien FM, GM mit der berührenden TMt.

Es ſey $AC = a$, $CF = CG = e$, und $aa - ee = bb$, dem Quadrat der halben kleinen Axe; $FM = y$;

AFM $= \phi$, ſo iſt $y = \frac{bb}{a - e\cos\phi}$. Daraus $dy = - \frac{bbe\sin\phi . d\phi}{(a - e\cos\phi)^2}$ negativ, weil y abnimmt, wenn ϕ wächſt. Alſo iſt tang TMF $= \frac{y d\phi}{dy}$ $= - \frac{a - e\cos\phi}{e\sin\phi}$, wo die Negation einen ſtumpfen Winkel anzeigt. Oder es iſt tang tMF $= \frac{a - e\cos\phi}{e\sin\phi}$.

Die Linie aus dem andern Brennpuncte, GM, ſey $= z$, und AGM $= \omega$, ſo iſt $z = \frac{bb}{a + e\cos\omega}$, und tang TMG $= \frac{a + e\cos\omega}{e\sin\omega}$.

Setzt man für die Zähler ihre Werthe durch y und z, ſo iſt tang tMF $= \frac{bb}{ey\sin\phi}$; und tang TMG $= \frac{bb}{ez\sin\omega}$. Da $y : z = \sin\omega : \sin\phi$, oder $y \sin\phi = z . \sin\omega$, ſo ſind beide Tangenten einander gleich, und die gleichnamigen Winkel der Linien aus den Brennpuncten mit der berührenden ſind gleich groß.

30. Exempel. Es ſey $\frac{y d\phi}{dy} = a$, einer unveränderlichen Größe, ſo iſt $d\phi = \frac{a dy}{y}$, daher $\phi = a$ lognat $\frac{y}{c}$, wo c eine willkührliche Größe iſt. Die Linie iſt die logarithmiſche Spirale.

Berührende krumme Linien.

31. Eine krumme Linie berührt eine andere, wenn ſie in einem gemeinſchaftlichen Puncte dieſelbe gerade berührende haben.

32. Einen Kreis zu ziehen, der eine krumme Linie AMR (Fig. 42. T. III.) in dem Puncte M berührt, ziehe man zuerſt die berührende TMt mittelſt der Subtangente PT, und auf dieſe die ſenkrechte NMn. Auf dieſer nehme man irgend einen Punct C, (auf der einen oder der andern Seite von TMt,) und beſchreibe aus dieſem als Mittelpunct durch M einen Kreis, ſo berührt dieſer die krumme Linie. Liegt der Kreis auf derſelben Seite der berührenden geraden mit der krummen Linie, ſo geht er entweder zwiſchen der geraden berührenden und der krummen Linie durch, oder die krumme Linie liegt zwiſchen der geraden berührenden und dem Kreiſe, wie es in der Figur der Fall iſt, oder der Halbmeſſer des Kreiſes hat eine ſolche Größe, daß der damit beſchriebene Kreis den Uebergang von den Kreiſen in der einen Lage zu denen in der andern macht. Dieſe ausgezeichnete Größe des Halbmeſſers findet ſich bey dem oſculirenden Kreiſe oder Krümmungskreiſe.

33. Aus der Gleichung für eine krumme Linie werde die endliche Differenz zweyer Ordinaten, Δy, durch die zugehörige Differenz der Abſciſſen, Δx, mittelſt des Taylorſchen Lehrſatzes dargeſtellt, nämlich

$$\Delta y = \frac{dy}{dx}\Delta x + \frac{d^2 y}{1.2\,dx^2}\Delta x^2 + \frac{d^3 y}{1.2.3\,dx^3}\Delta x^3 + \text{etc.}$$

Die Differentialquotienten ſollen immer veränderlich bleiben, ſo daß die Reihe nirgends abbricht. Ueber derſelben Abſciſſenlinie, und mit demſelben Anfangspuncte der Abſciſſen, ſey eine andere krumme Linie verzeichnet, an welcher die Differentialquotienten eine endliche Reihe ausmachen. Die Ordinaten an dieſer ſeyn z, zu der mit jener erſtern Linie gemeinſchaftlichen Abſciſſe x, und

$z = Conſt + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 +$ etc. mit einer endlichen Anzahl Glieder. Für $x = h$, und $y = k$ ſey $z = y = k$, und die Conſt. werde dieſer Annahme gemäß beſtimmt, damit beide Linien eine gemeinſchaftliche Ordinate für $x = h$ erhalten.

Wenn $\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx}$; $\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$; $\frac{d^3z}{dx^3} = \frac{d^3y}{dx^3}$; u. ſ. f. ſo berührt die paraboliſche Linie die gegebene in dem Endpuncte der Ordinate k, und die Berührung iſt deſto inniger, je mehr Glieder in der Reihe für z genommen ſind.

34. Es ſey zuerſt $z = C + ax + bx^2$, welches eine Gleichung für eine Parabel iſt, ſo iſt $\frac{dz}{dx} = a + 2bx$, und $\frac{d^2z}{dx^2} = 2b$, alſo nach dem Taylorſchen Lehrſatze, $\Delta z = (a + 2bx)\Delta x + b\Delta x^2$, wie man es auch durch die Differenzenrechnung findet. Setzt man die beiden Glieder dieſes Werthes von Δz den beiden erſten in dem Werthe von Δy gleich, ſo ſind dadurch die Werthe von a und b beſtimmt, da x einen gegebenen Werth h hat. Setzt man nämlich der Abkürzung wegen,

$$\Delta y = \alpha\Delta x + \beta\Delta x^2 + \gamma\Delta x^3 + \delta\Delta x^4 + \text{etc.}$$

ſo iſt $a + 2bh = \alpha$, und $b = \beta$, alſo $a = \alpha - 2\beta h$, und $z + \Delta z$ iſt von $y + \Delta y$ nur durch die Glieder verſchieden, welche die dritte Potenz und höhere von Δx enthalten, ſo daß der Unterſchied gegen Δz oder Δy in einem viel ſtärkern Verhältniſſe abnimmt, als nach welchem die Differenzen Δx kleiner gemacht werden. Die paraboliſche Linie entfernt ſich von der gegebenen Curve weniger als die gerade berührende an dem gemeinſchaftlichen Puncte beider. Für die gerade berührende ſey die Gleichung $t = C + (a + 2bh)x$, und $C = k - (a + 2bh)h$, ſo iſt $\Delta t = (a + 2bh)\Delta x$, welches mit Δy nur in dem erſten Gliede der Reihe übereinkommt. Die jetzt beſtimmte paraboliſche Linie nähert ſich auch der Curve mehr als jede andere ihrer Gattung, welche die Curve in demſelben

Puncte wie jene berührt. Denn für die letztere ſey die Gleichung $\Delta z^1 = \text{Conſt} + mx + nx^2$, wo z^1 ihre Ordinate bedeutet, ferner $m + 2n = \alpha$, aber nicht $n = \beta$, ſo berührt ſie zwar die gegebene Curve, weil ſie eine gemeinſchaftliche berührende mit ihr hat, die Differenz Δz^1 weicht aber in dem zweyten Gliede ihres Werthes von dem Werthe Δy ab.

35. Es ſey $z = \text{Conſt.} + ax + bx^2 + cx^3$, ſo iſt $\Delta z = (a + 2bx + 3cx^2)\Delta x + (b + 3cx)\Delta x^2 + c\Delta x^3$, wie man es ſowohl durch die Differentialrechnung aus dem Taylorſchen Lehrſatze, als durch die Differenzenrechnung findet. Nun ſey $a + 2bh + 3ch^2 = \alpha$; $b + 3ch = \beta$; $c = \gamma$, ſo iſt für $x = h$ die Ordinate z an der paraboliſchen Linie von der Ordinate y an der gegebenen Curve nur in denen Gliedern verſchieden, welche Δx^4 und höhere Potenzen von Δx enthalten. Die Abweichung nimmt daher bey Verminderung der Differenz Δx ſehr ab. Die paraboliſche Linie berührt die Curve genauer als die von der erſten Gattung es thut.

36. Auf dieſe Art kann man paraboliſche Linien höheren Grades finden, welche die gegebene Curve noch vollkommener berühren. Wenn die paraboliſche Linie des erſten Grades zwiſchen der Curve und der geraden berührenden durchgeht, ſo geht die paraboliſche des zweyten Grades zwiſchen jener und der Curve hin, die vom dritten Grade zwiſchen der vom zweyten und der Curve. u. ſ. f.

37. Man darf daher für einen Bogen irgend einer krummen Linie den Bogen einer paraboliſchen ſetzen, wenn man ſich nur wegen der Gränze der Fehler verſichern kann. Denn aus der Gleichung zwiſchen den Coordinaten ergiebt ſich der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$, und daraus die folgenden; aus dieſen die Größen α, β, γ, etc. und daraus a, b, c, etc. nebſt der Conſtans. Auch ohne die endliche Gleichung für die Curve zu haben, genügt es an dem erſten Differentialquotienten, wenn nur die Ordinate

für die Abſciſſe h bekannt iſt. Allein man muß wohl bemerken, daß zwey Linien, ungeachtet einer ſehr genauen Berührung in einem Puncte, ſich doch beträchtlich von einander entfernen können. Man darf ohne Einſchränkung eine oſculirende paraboliſche Linie ſo wenig als einen oſculirenden Kreis für eine andere krumme Linie ſetzen. Der Unterſchied zwiſchen Δz und Δy nimmt in einem viel ſtärkern Verhältniſſe zu, als in welchem Δx wächſt. Verändert man den Werth der Abſciſſe k, die zu einem Berührungspuncte gehört, ſo erhält man eine andere oſculirende Linie, weil die Werthe von α, β, γ, etc. nebſt der Ordinate k ſich ändern, und die Conſt. erhält auch einen andern Werth. Dazu kömmt, daß, wenn die Reihe der Differentialquotienten nicht abbricht, die Reihe für Δy nur durch kleine Werthe von Δx in Beziehung auf die lineariſche Einheit convergirend gemacht werden mag.

38. Die paraboliſchen Linien haben als oſculirende oder annähernde Linien vor dem Krümmungskreiſe den Vorzug, daß ſie ſich jedem Laufe einer andern Linie durch die Änderung ihrer Krümmung gleichſam mehr anſchmiegen als ein Kreis, deſſen Krümmung unveränderlich iſt, und daß man nach Beſchaffenheit der Umſtände ſie von einem höhern oder niedrigern Grade nehmen kann. Auch iſt es bequem, daß ſie dieſelben Abſciſſen mit der aufgegebenen Curve behalten, und daß beider Ordinaten parallel ſind. Aber ſie bleiben immer nur berührende Linien.

39. In einer Unterſuchung über das balliſtiſche Problem (Mathem. Abhandlungen, Potsdam 1797) iſt eine oſculirende paraboliſche Linie an dem Wurfspuncte der Trajectorie in einem widerſtehenden Mittel für dieſe ſelbſt genommen. Daß die berührende von dieſer bey einem beträchtlichen Bogen ſehr abweichen werde, iſt begreiflich.

Normale und Subnormale.

40. Wegen des Zuſammenhanges mit der Unterſuchung finde hier auch die Beſtimmung der Normale und

Subnormale an irgend einem Puncte einer krummen Linie ihre Stelle.

41. Die Normale iſt die auf die berührende in dem Berührungspuncte gezogene ſenkrechte. In Fig. 40. iſt es die Linie MN. Die Subnormale iſt das Stück der Abſciſſenlinie PN zwiſchen der Ordinate und Normale.

42. Bey rechtwinklichten Coordinaten iſt, wenn TP die Subtangente iſt, TP : PM = PM : PN. Da $TP = \frac{y\,dx}{dy}$; ſo iſt die Subnormale $PN = \frac{y\,dy}{dx}$.

43. Exempel I. Es ſey AMR (Fig. 40.) eine Parabel, ſo iſt $ax = yy$, alſo $\frac{1}{2}\,a\,dx = y\,dy$, und $PN = \frac{1}{2}a$.

44. Exempel II. Es iſt AMB (Fig. 41.) eine halbe Ellipſe, die halbe große Axe $AC = a$, die halbe kleine $CD = b$; $AP = x$; $PM = y$, ſo iſt $bb\,(2ax - xx) = aayy$. Daraus iſt $bb\,(a-x)\,dx = aay\,dy$, alſo iſt $PN = \frac{bb}{aa}(a-x)$, und $AC^2 : CD^2 = CP : CN$.

Die Normale an der Ellipſe halbirt den Winkel FMG der aus den Brennpuncten nach M gezogenen Linien, wegen (29.).

45. Exempel III. An der Hyperbel iſt, bey gleichförmigen Bedeutungen der Buchſtaben, $bb\,(2ax + xx) = aayy$, alſo die Subnormale $= \frac{bb}{aa}\,(a + x)$.

Geſchichte der Methoden Berührende zu ziehen.

46. Die alten Geometer beſtimmten die Lage der berührenden bloß durch Hülfe der Geometrie. Als man im 17ten Jahrhundert die Rechnung mit der Geometrie zu verbinden anfieng, war man ſehr angelegentlich auf Methoden bedacht, die berührenden durch allgemeine analyti-

ſche Regeln zu beſtimmen. Descartes giebt in ſeiner Geometrie, 2ten B. ein Verfahren an, Normalen an eine jede krumme Linie zu ziehen, für welche eine algebraiſche Gleichung vorhanden iſt, und ſagt davon, daß dieſe Aufgabe unter allen, die er kenne, die nützlichſte und allgemeinſte ſey, ja auch, daß ihm in der ganzen Geometrie die Auflöſung derſelben das liebſte wäre. Es iſt freylich noch etwas unbequem, allein als einer der erſten Verſuche in dieſer Art merkwürdig. Aus einem Puncte der Abſciſſenlinie als Mittelpunct werde ein Kreis beſchrieben, der die Curve in zwey oder mehrern Puncten ſchneide. Man verbinde die allgemeine Gleichung zwiſchen dem Halbmeſſer dieſes Kreiſes, dem Abſtand ſeines Mittelpunctes von dem Anfange der Abſciſſen (v) und den Coordinaten der Curve mit der beſondern Gleichung für dieſe, und ſuche denjenigen Werth von v, für welchen zwey Durchſchnittspuncte zuſammenfallen. Durch dieſen Werth wird der Kreis ein berührender, und der Halbmeſſer in dem Berührungspuncte die Normale an demſelben Descartes beſtimmt durch die Methode der Indeterminirten die Form der Coefficienten, wodurch die Gleichung für v zwey gleiche Wurzeln erhält. Einen bequemern Weg, die berührende zu ziehen, worauf er durch Fermats Methode geleitet war, zeigt er an einem Beyſpiele in einem ſeiner Briefe (Epiſt. T. III. p. 175.). Aus der Gleichung für eine Curve leitet er eine Gleichung zwiſchen dem Abſtande zweyer Ordinaten und der zu einer derſelben gehörigen Subſecante her, und ſetzt in dieſer den Abſtand der Ordinate Null, ſo verwandelt ſich die Subſecante in die Subtangente. — In Wolfs Analyſis Finit. §. 410, 440, 491. ſind Beyſpiele der erſtern Methode an den drey Kegelſchnitten anzutreffen.

47. Die eben erwähnte Methode von Fermat iſt ſinnreich, und dadurch merkwürdig, daß ſie die erſte Anwendung der Methode der Gränzen iſt. Fermat hatte dieſe ſchon zur Beſtimmung der größten oder kleinſten Werthe einer Function gebraucht, und zeigte an der Para=

bel, wie ſie auch die berührende zu finden diene. Er hat nie eine Erklärung, noch einen allgemeinen Beweis dieſer Methode mitgetheilt, ſondern begnügte ſich ſie in beſondern Anwendungen zu zeigen. Dies verleitete Descartes zu einem Mißverſtändniſſe, daß er glaubte, eine berührende ſollte die größte unter allen Linien seyn, die von einem Puncte an die convexe Seite einer Curve gezogen werden können. Als er nach dieſer Vorausſetzung die berührende an einen Kreis aus einem gegebenen Puncte ziehen wollte, mußte er etwas widerſprechendes finden. Auch übereilte er ſich ſehr, wie er das Verfahren, welches Fermat bey der Parabel gebraucht hatte, auf andere Linien anwenden wollte. Aus Eiferſucht gegen Fermat ſuchte er deſſen Methoden fehlerhaft zu finden, und begieng dadurch ſelbſt Mißgriffe. Von dem Streite, der hierüber zwiſchen Descartes und Fermats Verehrern entſtand, ſehe man die Briefe des erſtern, 47 bis 54, in der latein. Ausgabe; die Preißſchrift von Genty über Fermat, und die Geſchichte der Mathematik von Montucla, Th. 2. S. 138 ff. der 2ten Ausg Der letztere hat aber den Geiſt der Fermatſchen Methode nicht recht gefaßt. Die Methode der Tangenten hängt nach Fermat gar nicht von der Methode zur Beſtimmung der Größten und Kleinſten ab, ſondern beide ſind Anwendungen eines allgemeinen Verfahrens, die Gränze eines Verhältniſſes zur Beſtimmung der Relation gewiſſer Größen zu gebrauchen.

48. Fermats Methode berührende zu ziehen verdient, wegen der Verwandtſchaft mit der Methode durch die Differentialrechnung, hier gezeigt zu werden. Es ſoll dies aber an einem Beyſpiele geſchehen, welches etwas ſchwerer iſt als das von Fermat genommene, und wobey Descartes ſelbſt den Sinn der Methode verfehlte. In Fermats Werken, die nach ſeinem Tode herausgegeben ſind, iſt ſein Verfahren für berührende nirgends beſtimmt erklärt, und auch nicht bewieſen.

Es ſey AMR (Fig. 43. Tab. III.) eine krumme Linie, welche in M von der geraden TMR berührt werde.

Die Abſciſſenlinie ſey AX, welche von MT in T geſchnitten wird. Zu dem Puncte M gehören die Coordinaten AP, PM, zu einem andern Puncte N die Coordinaten AQ, QN. Die verlängerte QN treffe die berührende TM in R. Man ſetze $AP = x$; $PM = y$; $AQ = x + e$; $QN = z$; $TP = t$. Nun iſt $t : t + e = y : QR$, aber that zu $t + e$ ein kleineres Verhältniß als y zu z, oder $\frac{t}{t+e} < \frac{y}{z}$. Dieſe Formel der Ungleichheit nähert ſich immer mehr und ohne Ende einer Formel der Gleichheit, da QR und QN ſich einander immer näher kommen, je kleiner der Abſtand PQ zwiſchen den beiden Ordinaten wird, und, indem QN in MQ fällt, das Verhältniß beider das der Gleichheit wird. Iſt nun y oder eine Potenz derſelben eine geſonderte Function von x, damit z durch x und e ausgedruckt werden könne, ſo geht die Ungleichheit in Gleichheit über, wenn $e = o$ genommen wird, ohne daß darum die Gleichung identiſch würde. Dieſes wird ein Beyſpiel deutlich machen.

Die krumme Linie ſey eine Ellipſe, für welche die Gleichung iſt: $aayy = bb(2ax - xx)$. Für die Coordinaten $x + e$ und z iſt ſie: $aazz = bb(2a(x + e) - (x + e)^2)$. Daher iſt

$$\frac{t^2}{(t+e)^2} < \frac{2ax - xx}{2a(x+e) - (x+e)^2}.$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten mit dem Product der beiden Nenner, ſo iſt nach gehöriger Reduction, durch Aufhebung der gleichen Glieder, und Diviſion durch e,

$$t^2(2a - 2x - e) < (2t + e)(2ax - xx).$$

Wenn e verſchwindet, ſo bleibt

$$t^2(a - x) = t(2ax - xx),$$

ſo daß $t = \frac{2ax - xx}{a - x}$.

49. Hudde erleichterte die erſte Methode des Descartes durch die Regel, welche er fand, um einer Glei-

chung zwey oder mehr gleiche Wurzeln zu geben. S. Huddenii epiſt. I. de reductione aequationum, in acceſſion. ad Carteſii Geom. p. 436.

50. Huygens ward durch die von Fermat nur angedeutete Regel veranlaßt, ihr eine bequemere Form zu geben. Dieſe iſt vollkommen diejenige, welche durch die Differentialrechnung gefunden wird. Statt der Bezeichnungen dx und dy hat er e und $\frac{ey}{z}$, wo z die Subtangente bedeutet. In der Gleichung zwiſchen x und y ſetzt er $x + e$ für x, und $y + \frac{ey}{z}$ für y, und läßt das Quadrat nebſt den höhern Potenzen der Differenzen weg. Er erweiſet ſeine Regel an einem Beyſpiele, ſo daß man die Allgemeinheit derſelben daraus einſieht. Seine Regel iſt folgendergeſtalt ausgedruckt: Nachdem alle Termini der vorgegebenen Gleichung auf eine Seite gebracht ſind, multiplicire man alle diejenigen, welche y enthalten, durch die Anzahl der Dimenſionen von y, und dieſes giebt den Dividendus. Darauf multiplicire man alle Terminos, die x enthalten, ebenfalls mit der Anzahl der Dimenſionen von x in jedem, und dividire jeden derſelben durch x ſelbſt; dieſes iſt der Diviſor zu jenem Dividendus. Der Quotient iſt die Linie z, wodurch er die Subtangente bezeichnet. Hugenii Opera varia Vol. 1. pag. 495. Der Aufſatz iſt zuerſt in den Divers ouvrages de Mathem. et de Phyſ. par Mrs. de l' Acad. R. 1693 erſchienen. Huygens ſagt, daß Hudde und de Slüſe ihm eine mit der ſeinigen übereinſtimmende Regel mitgetheilt hätten; er wiſſe aber nicht, auf welchem Wege ſie von ihnen gefunden ſey. Die Regel, wie de Slüſe ſie vorgetragen hat, ſteht in den Philoſoph. Tranſactionen vom J. 1672 und 1673. Huygens wird die Regel vor dieſer Zeit ſchon gefunden haben, ob er gleich den Beweis viel ſpäter erſt bekannt gemacht hat.

51. Barrow beſchäftigt ſich viel mit der Beſtimmung der berührenden, in ſeinen Lection. geom. VIII.

IX. X. Seine wirklich künſtlichen Methoden ſind ganz in Vergeſſenheit gerathen, ſo daß auch Montucla davon nichts weiter anführt als die Regel, welche Barrow zuletzt giebt. Barrow zeigt, wie man aus der berührenden an einer Curve die berührende an einer andern Curve, die aus jener auf gewiſſe Art beſtimmt wird, finden könne, theils in einem Durchſchnittspuncte mit jener, theils in andern Puncten; nicht allein bey parallelen Ordinaten, ſondern auch bey ſolchen, die aus einem Puncte gezogen ſind. Nun mag man für die erſtere Curve einen Kreis nehmen, oder für ſie eine gerade ſetzen. Will man alſo an eine gegebene Curve berührende ziehen, ſo muß man zuerſt eine Relation derſelben zu einer geraden Linie, zum Kreiſe oder einer Curve, deren berührende ſich ziehen laſſen, ſuchen, und zwar eine ſolche, dergleichen Barrow zum Grunde gelegt hat. Das Verfahren erfordert, wie in der ältern Geometrie gewöhnlich iſt, in jedem Falle beſondere Veranſtaltungen. Am Ende (pag. 80.) giebt Barrow eine allgemeine Regel, bey parallelen Ordinaten eine berührende in jedem Puncte zu ziehen. Sie iſt ganz die in (13*) vorgetragene. Er leitet ſie aus dem Verhältniſſe Mm : Nm in dem als unendlich klein betrachteten Dreyeck MmN (Fig. 34. Tab. II.) her. Er bezeichnet die beyden Glieder des Verhältniſſes durch e und a. Die Größen P, Q in der Formel $P dx = Q dy$ (13*.) beſtimmt er eben ſo wie es durch die Differentialrechnung geſchieht, und vertauſcht e und a (d. i. dx und dy) mit t und y.

52. Die Methoden dieſer Geometer finden bey irrationalen Größen in der Gleichung für eine Curve Schwierigkeit, noch mehr, wenn die Relation der Coordinaten Bogen oder Flächenräume einer andern krummen Linie in ſich ſchließt, wiewohl doch Barrow ſchon gewiſſe Fälle dieſer Art aufgelöſet hat. Newton aber war durch ſeine Fluxionen-Rechnung im Stande, bey allen Arten von Gleichungen für krumme Linien berührende zu ziehen. Dieſes zeigt er in dem Tractat: Methodus Fluxionum et ſerierum infinitarum, in neun verſchiedenen Fällen, und fügt noch

ſieben hieher gehörige Aufgaben, aber ohne Auflöſung, hinzu, z. B. den Punct zu finden, wo die berührende einen gegebenen Winkel mit der Abſciſſenlinie macht; wo ſie gegen dieſe am meiſten oder am wenigſten geneigt iſt; eine krumme Linie nach einem gewiſſen Geſetze zu beſchreiben, die eine andere der Lage nach gegebene in einem gegebenen Puncte berührt. Wenn man dieſe Unterſuchungen in Newtons Schrift durchgeht, ſo vergleiche man damit die von Barrow gegebenen Auflöſungen, wo transſcendente Functionen vorkommen.

Newton hat ſchon im J. 1665 ſeine neue Rechnungs-Methode auf die Aufgabe von den berührenden angewandt. Da er die krummen Linien durch Zuſammenſetzung von Bewegungen entſtehen ließ, ſo gab die Richtung des beſchreibenden Punctes ihm die berührende in jedem Puncte des Weges. Z. B. wenn in Fig. 34. der Punct M der Ordinate PM auf derſelben in der Richtung PM ſich bewegt, indem zugleich die Ordinate ſich parallel von P nach Q fortrückt, und der Punct auf der Ordinate den Weg mN beſchrieben hat, nachdem PM in QN gerückt iſt, ſo würde die gerade MN die Richtung der zuſammengeſetzten Bewegung ſeyn, wenn beyde Bewegungen nach mN und PQ gleichförmig wären. Sind ſie dieſes nicht, ſo iſt der Weg des beſchreibenden Punctes eine krumme Linie; das Verhältniß der Geſchwindigkeiten nach PQ und PM in dem Puncte M iſt das Gränzverhältniß der Linien Mm, mN, und die Richtung iſt die Linie TM in dem Dreyecke TPM, worin TP : PM jenes Gränzverhältniß iſt.

53. Früher ſchon hat Roberval die Lage der berührenden aus der Zuſammenſetzung zweyer Bewegungen hergeleitet. Er bemerkte, daß die berührende nichts anders als die Richtung des ſie beſchreibenden beweglicher Punctes iſt, wiewohl er hievon keinen deutlichen und einleuchtenden Beweis giebt. Er konnte ſeinen Grundſatz aber nur in beſondern Fällen anwenden. Denn dazu iſt es nöthig, das Verhältniß der Geſchwindigkeiten für die par-

tiellen oder relativen Bewegungen zu entwickeln. Wo eine krumme Linie keine Eigenſchaft zeigte, woraus dieſes Verhältniß unmittelbar hergeleitet werden konnte, war die Methode in ſeinen Händen unzulänglich. Der leichteſte Fall iſt bey den Kegelſchnitten. Auf der Ellipſe hat der beſchreibende Punct zwey gleiche relative Geſchwindigkeiten, wodurch er ſich dem einen Brennpuncte nähert, und von dem andern ſich entfernt. Die berührende halbirt alſo den Winkel beyder Richtungen. Auf der Hyperbel ſind die relativen Geſchwindigkeiten in Abſicht auf die Brennpuncte gleich, und beyde entfernend oder nähernd. Daher halbirt die berührende ebenfalls den Winkel der beyden Richtungen, und geht zwiſchen den Brennpunkten durch.

54. Als Leibnitz ſeine Differentialrechnung in den Actis Erud. 1684 bekannt machte, zeigte er die vortheilhafte Anwendung derſelben zur Beſtimmung der berührenden in ein paar Beyſpielen, die für die bis dahin bekannten Methoden zu ſchwer geweſen wären. Es ſind darin irrationale Ausdrücke und Bruchgrößen gehäuft. Er bemerkt, daß ſeine Methode ſich auch auf transſcendente Linien erſtreckt. An den ältern Methoden tadelt er, daß ſie nur die Differenz einer einzigen veränderlichen Größe, und nicht zugleich die Differenzen der damit verbundenen Größſen gebrauchen, daher es nach denſelben nöthig iſt, Brüche und Irrationalgrößen wegzuſchaffen.

Leibniz möchte immer die Methode berührende zu ziehen von Barrow gelernt haben, und es bliebe doch ſeine Erweiterung derſelben durch die von ihm erfundene Differentialrechnung eine wichtige Verbeſſerung, worauf ſo große Geometer, wie Barrow und Huygens nicht gekommen ſind, da ſie ſich ganz an geometriſche Methoden hielten. Allein Leibnitz hat hier alles oder das meiſte aus ſich ſelbſt genommen. In dem Aufſatze de Geometria recondita, cet. A. E. 1686. erzählt er, wie er ſchon in den erſten Zeiten ſeines mathematiſchen Studium auf die Betrachtung des von ihm ſehr treffend genannten charakteriſtiſchen Dreyecks gekommen ſey, das iſt, des Dreyecks von den

verſchwindenden Differenzen der Coordinaten und des Bogens einer krummen Linie, woraus er ſehr viele Lehrſätze hergeleitet, die er hernach bey den beiden Gregory's und Barrow gefunden habe. Da die Anwendung der algebraiſchen Rechnung ihn nicht befriedigt habe, ſey er auf ſeine Analyſis Indiviſibilium et infinitorum gerathen. Jakob Bernoulli äußerte in ſeinem Aufſatze, ſpecimen calc. diff. in dimenſione Parabolae helicoidis, A. Er 1691. daß wer die Barrowiſche Rechnung gefaßt hätte, die von Leibnitz gefundene nicht verfehlen könnte, als welche auf jene ganz gegründet ſey, und etwa nur in der Notation der Differentiale, und einigen Abkürzungen der Rechnung ſich unterſcheide. In einem folgenden Aufſatze, ſpecimen alterum calculi differentialis, ib. 1691 lenkte er aber ein, und erklärte ſich dahin, daß die Uebereinſtimmung beider Methoden nicht weiter gehe, als daß, wenn man die eine begriffen habe, die andere deſto leichter verſtanden werden könne. Auch leiſte die Leibnitziſche Rechnung vieles, was die Barrowiſche nicht im Stande ſey, und es habe eine ſeltene Kraft des Geiſtes erfordert, die Rechnung ſo kurz und einfach zu machen, als Leibnitz ſie geliefert hat.

Berührungspunct iſt der Punct, wo eine krumme Linie von einer geraden, oder von einer andern krummen Linie berührt wird.

Berührungswinkel (Angulus contactus, ſeu contingentiae) iſt die Lage, die ein Bogen einer krummen Linie gegen die ſie berührende an dem Berührungspuncte hat.

Der Winkel einer krummen Linie mit einer geraden ſie ſchneidenden iſt der Winkel, welchen die berührende an jener in dem Durchſchnittspuncte mit dieſer macht. Denn bey dieſem Winkel kommt es bloß auf die Richtung der krummen Linie in dem Durchſchnittspuncte an, nicht auf die benachbarten Theile des Bogens. Der Winkel einer

krummen Linie mit der ſie berührenden ſelbſt iſt alſo vollkommen Null. Sieht man aber auf die Ablenkung der krummen Linie von der berührenden geraden, ſo kann dieſe als ein gemiſchtlinichter Winkel (angulus mixtilineus) des Bogens der krummen Linie und der berührenden an dem einen Endpuncte betrachtet werden, nach der Analogie des Winkels zweyer geraden Linien. Man kann einen ſolchen Winkel aber nicht mit geradlinichten, auch nicht mit ſolchen unendlich kleinen, ſondern nur mit andern ſeiner Art vergleichen. Der Kreis giebt ein Mittel zu dieſer Vergleichung.

Es ſey A E (Fig. 44. Tab. III.) ein Bogen eines Kreiſes, deſſen Mittelpunct C iſt. In A ſey die berührende AD. Euklides zeigt (III. 16.), daß zwiſchen der auf AC ſenkrechten (oder berührenden) A D und dem Kreiſe keine gerade Linie gezogen werden kann, daher der Winkel des Kreiſes und der berührenden AD kleiner iſt als jeder ſpitzige geradlinichte Winkel.

Ob nun gleich jede gerade Linie A F, die durch A innerhalb des W. C A D gezogen wird, den Kreisbogen A E B ſchneidet, ſo laſſen ſich doch unendlich viele Kreiſe ziehen, die zwiſchen dem Bogen A E und der gemeinſchaftlichen berührenden durchgehen, nämlich alle, die aus einem Mittelpuncte auf der Linie durch A und C, mit einem Halbmeſſer, größer als A C, beſchrieben werden. (Käſtners Anfangsgründe der Geom. S. 20. Zuſ. 6.) Die ſtetige Ablenkung iſt an den größern Kreiſen geringer als an den kleinern, bey gleicher Länge der Bogen.

Die Ablenkung des Kreisbogens A E in E von der berührenden A D, in Abſicht auf die Richtung, iſt der Winkel der in E berührenden mit A D, das iſt der Winkel ACE. Auf dem mit A G beſchriebenen Kreiſe ſey der Bogen A e = A E, ſo iſt die Ablenkung des Bogens A e in e der Winkel AGe. Nimmt man die Bogen A E, A e gleich groß, ſo verhalten ſich die Ablenkungen in E und e wie A G : A C, weil bey gleichen Bogen die Win-

kel ſich umgekehrt wie die Halbmeſſer verhalten. Statt der Ablenkungen gleich großer Bogen in den Endpuncten mag man auch kurz die Ablenkungen der ganzen unbeſtimmten Bogen ſetzen. Dieſes ſind die gemiſchtlinichten Winkel DAE, DAe, welche zwar nicht mit geradlinichten Winkeln verglichen werden können, aber doch ein beſtimmbares Verhältniß unter ſich haben, nämlich das umgekehrte Verhältniß ihrer Halbmeſſer. Mit einem geradlinichten Winkel kann der gemiſchtlinichte nicht verglichen werden, weil auf den Schenkeln jenes die Theile immer dieſelbe Lage gegen einander behalten, auf dieſem nicht.

Nun ſey MAm (Fig. 45.) ein Bogen einer krummen Linie, an welcher in A die berührende gerade DAd gezogen iſt, und BAb ein Kreisbogen, der aus einem Mittelpuncte C auf der durch A normalen AC beſchrieben iſt, ſo daß zwiſchen demſelben und dem Bogen der Curve MAm kein anderer Kreisbogen durchgehen könne, ſondern jeder andere, aus einem Mittelpuncte auf der Normale beſchriebene Kreis entweder zwiſchen DAd und MAm durchgehe, oder innerhalb des Kreisbogens BAb falle, das iſt, es ſey AC der Halbmeſſer des Krümmungskreiſes. Solchergeſtalt iſt der Berührungswinkel in A an der krummen Linie MAm und an dem Kreiſe BAb derſelbe. In jedem andern Puncte der krummen Linie, wie M, iſt der Berührungswinkel daſelbſt und an dem zugehörigen Krümmungskreiſe auch gleich groß. Daher verhalten ſich die Berührungswinkel in A und M umgekehrt wie die Halbmeſſer der Krümmung in A und M.

Die Halbmeſſer der Krümmung verhalten ſich umgekehrt wie die Krümmungswinkel; alſo verhalten ſich die Berührungswinkel wie die Krümmungswinkel, d. i. die Winkel zweyer aneinander ſtoßenden Bogen einer Curve.

Über den Berührungswinkel iſt im 16ten Jahrhundert ein lebhafter Streit zwiſchen Peletarius (Pelle-

tier) und Clavius entſtanden. Der erſte behauptete, der Berührungswinkel ſey kein wahrer Winkel, überhaupt keine Größe, ſondern die gerade berührende am Kreiſe falle mit dem Umfange zuſammen, und ſey nicht gegen ſie geneigt; der Winkel des Halbkreiſes mit dem Durchmeſſer ſey allerdings einem geradlinichten Rechten gleich.

Clavius behauptete dagegen, der Berührungswinkel im Kreiſe ſey wirklich ein Winkel, und zwar eine Größe, die ſich ins Unendliche theilen laſſe, zwar nicht durch eine gerade Linie, aber wol durch den Umfang eines größern Kreiſes; doch ſey er kleiner als jeder mögliche geradlinichte; der Winkel des Halbkreiſes ſey kleiner als ein geradlinichter Rechter, doch aber größer als jeder geradlinichte ſpitze Winkel. Auch ſeyn der Berührungswinkel und ein geradlinichter ungleichartige Größen, und könnten daher nicht verglichen werden. Dieſes zur Erwiederung auf einen Grund, den P. für ſeine Behauptung anführte. Clavius hat ſeines Gegners Gründe und ſeine eigenen in ſeinem Commentar über Euklides Elemente (III. 28) angeführt.

Die Geſchichte des Streites und die Unterſuchung der Frage hat Wallis in einer Abhandlung 1656 vorgetragen, welcher er eine Vertheidigung noch 1685 folgen ließ. Beide Abhandlungen ſtehen in dem zweyten Theile ſeiner Werke, p. 605 — 664. Die zweyte Abhandlung ward dadurch veranlaßt, daß ein Jeſuit, Leotaud, in ſeiner Cyclomathia, 1662, die Vertheidigung des Clavius übernommen hatte. Wallis erklärt ſich für die Meinung des Peletarius.

Man kann ſagen, daß beide Recht haben, weil ſie den Winkel einer krummen Linie mit einer geraden ſich verſchiedentlich gedenken. Tacquet ſagt in ſeiner Ausgabe des Euklides, daß beide ſich irrige Vorſtellungen von der Natur der Winkel machten. Dieſe ſeyn keine Größen, ſondern Beſchaffenheiten (modi) einer Größe, und könnten nur in Abſicht auf Congruenz oder Nicht-Congruenz verglichen werden.

Ein Berührungswinkel kann unendlich klein, oder unendlich groß, in Vergleichung mit Berührungswinkeln an Kreiſen ſeyn. Wenn zwiſchen der krummen Linie MAm und der in A berührenden geraden DAd kein Kreisbogen durch A, aus einem Mittelpuncte auf der Normale AC, gezogen werden kann, ſo groß auch der Halbmeſſer genommen werden mag, ſo iſt der Krümmungswinkel MAD unendlich klein, und die Krümmung von MAm in A unendlich gering. Umgekehrt, wenn jeder Kreis, der aus einem Mittelpuncte auf der Normale durch A beſchrieben wird, zwiſchen der berührenden DAd und der krummen Linie durchgeht, der Halbmeſſer mag noch ſo klein genommen werden, ſo iſt der Krümmungswinkel der krummen Linie in A unendlich groß, und die Krümmung daſelbſt unendlich ſtark.

Exempel. Die krumme Linie AMN (Fig. 46.) ſey eine höhere Parabel, deren Gleichung iſt $y^3 = a^2x$. Die Axe ſey AX; auf dieſer die Abſciſſe $AP = x$, die ſenkrechte Ordinate $PM = y$. Man ziehe AM, und auf dieſe die ſenkrechte MQ, welche AX in Q ſchneidet, und ſetze $AQ = 2u$. Da $AP : AM = AM : AQ$ iſt, ſo iſt $2ux = x^2 + y^2$, und $2u = x + \frac{y^2}{x}$. Für unſere krumme Linie iſt $2u = x + \frac{a^2}{y}$. Dieſes iſt der Durchmeſſer AQ eines Kreiſes, der durch M geht. Je näher M an A genommen wird, deſto größer wird dieſer Durchmeſſer. Nimmt man alſo einen Punct m auf dem Bogen AM zwiſchen A und M, ſo geht der durch die Puncte A, m auf gleiche Art beſchriebene Kreis zwiſchen dem durch die Puncte A, M beſchriebenen und der in A beide berührenden AD hindurch. Nimmt man zwiſchen A und m wieder einen Punct, und beſchreibt durch dieſen und A aus einem Mittelpuncte auf AX einen Kreis, ſo nähert ſich dieſer der berührenden noch mehr als der durch A, m, beſchriebene. Die Gränze aller dieſer Kreiſe iſt

ein Kreis mit einem unendlich großen Durchmeſſer; das iſt, die Ablenkung der krummen Linie in A von der berührenden iſt unendlich gering, oder die Krümmung unendlich klein.

Die krumme Linie ſey eine andere Art von höherer Parabel, deren Gleichung iſt $y^3 = ax^2$. Nun iſt $2u = x + \sqrt{ay}$. Ein Kreis durch A und m beſchrieben, aus einem Mittelpuncte auf AX, fällt innerhalb des durch A, M auf gleiche Art beſchriebenen Kreiſes; die Ablenkung der krummen Linie von der berührenden AD wird immer größer, und in A unendlich ſtark, wo der Durchmeſſer des Kreiſes unendlich klejn iſt.

Wenn die Gleichung iſt $y^4 = a^3 x$, ſo iſt $2u = x + \frac{a^3}{y^2}$, und die Ablenkung von der berührenden in A iſt unendlich geringer als an der krummen Linie, deren Gleichung iſt $y^3 = a^2 x$. Läßt man die Exponenten von y nach der Folge der natürlichen Zahlen zunehmen, ſo entſteht eine Folge von Berührungswinkeln, deren jeder unendlich klein gegen den vorhergehenden iſt. Für die erſte in dieſer Reihe von krummen Linien, die apolloniſche Parabel, deren Gleichung $y^2 = ax$, iſt der Berührungswinkel in A gleich dem an einem Kreiſe mit dem Durchmeſſer a.

An der krummen Linie, deren Gleichung iſt $y^4 = ax^3$, iſt $2u = x + \sqrt[3]{ay^2}$. Unterſcheidet man dieſes u durch ein Strichlein von dem u für die Linie mit der Gleichung $y^3 = ax^2$, ſo iſt die Gränze für $u : u' = \sqrt{y} : \sqrt[3]{y^2} = 1 : \sqrt[6]{y}$; da in dem Werthe des Durchmeſſers der Theil x gegen den zweyten Theil zuletzt unendlich klein wird. An der krummen Linie mit der Gleichung $y^4 = ax^3$ iſt alſo der Berührungswinkel bey A unendlich größer als an der andern, mit der Gleichung $y^3 = ax^2$.

Zu vergleichen: Newtoni Methodus fluxionum et ſerierum infin. p. 114. edit. Caſtillion.

Beſtändige Größe (Conſtans) iſt diejenige, die nach der Integration einer Differentialgleichung dem Integral beygefügt wird, weil bey der Differentiation einer Gleichung dasjenige Glied, was bloß eine unveränderliche Größe enthält, weggelaſſen wird, und alſo bey jeder Integration ein ſolches Glied als vorhanden anzunehmen iſt. Was es für einen Werth habe, muß aus den Bedingungen der Verbindung der Größen beſtimmt werden. In manchen Fällen iſt es Null. In allgemeinen Unterſuchungen bleibt es unbeſtimmt, und wird durch Conſt. oder C bezeichnet.

Beſtimmt iſt, wobey nichts willkührliches Statt hat. Eine beſtimmte Aufgabe iſt, die nur auf eine Art aufgelöſet werden kann, oder zu welcher die mögliche Anzahl der verſchiedenen Auflöſungen gegeben wird. Eine beſtimmte Gleichung iſt, worin nur eine einzige unbekannte Größe vorkommt. Eine beſtimmte Zahl iſt, deren Verhältniß zur Einheit gegeben wird, wie 8; $\frac{3}{4}$; $\frac{10}{3}$. Dahin gehören aber auch alle Irrationalzahlen, wenn gleich der Exponens ihres Verhältniſſes zu der Einheit oder zu einer rationalen Zahl nicht vollſtändig angegeben werden kann.

Beſtimmter Schnitt (Sectio determinata; διωρισμενη τομη) iſt die Benennung einer geometriſchen Aufgabe, worüber Apollonius, der große Geometer des Alterthums, eine Abhandlung in zwey Büchern oder Abtheilungen geſchrieben hat, die verloren ſind. Pappus hat in ſeinen mathematiſchen Sammlungen in der Vorrede zu dem 7ten Buche eine kurze Nachricht von dem Inhalte dieſer Schrift gegeben, und in dieſem Buche 51 Sätze, die zu den Aufgaben von dem beſtimmten Schnitte nöthig ſind (Lemmata) mit den Beweiſen vorgetragen. Nach Anleitung jener Nachricht hat Snellius ein ähnliches Werk zu liefern unternommen, in dem Apollonius Batavus, Lugd. 1608. pagg. 37. 4. Es iſt aber noch ſehr unvollſtändig, wie man aus dem bloßen Anblick

erkennen mag. Die Hülfsſätze bey Pappus ſind nicht benutzt. Daher iſt Robert Simſon mit dieſer Bearbeitung der Aufgabe ſehr unzufrieden. Um dieſelbe Zeit mit Snellius beſchäftigte ſich Marinus Ghetaldus aus Raguſa mit dieſer Aufgabe. Seine Conſtructionen ſind aber nach Montucla's Urtheil oft zu ſchwerfällig. Ein Italiener, Giannini, iſt dieſem Schriftſteller zufolge beſſer in die Methode des alten Geometers eingegangen. Inzwiſchen iſt die Schrift des Snellius vor nicht langer Zeit von einem Engländer Lawſon ins Engliſche überſetzt, London 1772, und mit einer neuen Reſtauration von Wales begleitet. Eine Wiederherſtellung des Apolloniſchen Werkes, die von dem Original kaum verſchieden ſeyn mag, hat Robert Simſon geliefert. Er hat eben ſo viele Hauptaufgaben und ſo viele beſondere Fälle (epitagmata), als nach Pappus Anzeige in dem griechiſchen Werke waren, auch eben ſo viele Beſtimmungen eines größten oder kleinſten Verhältniſſes, wo ein ſolches Statt findet. Zu den zwey Büchern des Apollonius hat er noch zwey eigene gefügt, die etwas ſchwerere verwandte Aufgaben enthalten. In der Sammlung, Rob. Simſon Opera reliqua, Glasguae, 1776. 4. ſind die wiederhergeſtellten Bücher des Apollonius von S. 59—193; die beiden zugefügten von S. 198—313 enthalten. Dieſes Werk iſt dienlich ſich eine Übung in der geometriſchen Analyſis und Syntheſis zu verſchaffen, wozu ein Theil deſſelben auch ſchon hinreichend ſeyn möchte.

Die Aufgabe fordert, auf einer geraden Linie einige Puncte ſo anzugeben, daß die Rechtecke oder Quadrate von den Theilen ein gegebenes Verhältniß haben, bey einer beſtimmten gegenſeitigen Lage der Puncte. Daher die Benennung der Aufgabe.

I. Auf einer geraden Linie ſind zwey Puncte, A, B, gegeben, und neben bey eine gerade Linie von gegebener Länge D, es wird auf jener der Punct P geſucht, ſo daß $PA^2 : PB^2$, oder auch $PA \times D : PB^2$ einem gegebenen Verhält-

niſſe gleich ſey, der Punct P mag zwiſchen A und B, oder außer beiden, auf dieſer oder jener Seite liegen ſollen.

A P B C

II. Auf einer geraden Linie ſeyn drey Puncte, A, B, C, gegeben, es wird der Punct P geſucht, ſo daß $PA \times D : PB \times PC$, oder $PA^2 : PB \times PC$ einem gegebenen Verhältniſſe gleich, und die gegenſeitige Lage aller vier Puncte irgend eine beſtimmte ſey. Die beygefügte Anordnung iſt nur eine einzelne.

A P B C D

III. Auf einer geraden Linie ſeyn vier Puncte, A, B. C, D, gegeben, es wird der Punct P geſucht, ſo daß $PA \times PB : PC \times PD$ einem gegebenen Verhältniſſe gleich, und die gegenſeitige Lage aller fünf Puncte irgend eine beſtimmte ſey.

Die Aufgaben haben, als algebraiſche betrachtet, gar keine Schwierigkeit. Sie führen nur auf Gleichungen vom zweyten Grade Das Künſtliche nach der Methode der Alten beſteht darin, ſie bloß durch Verbindungen von Verhältniſſen, und durch Zuſammenſetzungen von Rechtecken und Quadraten, mittelſt einer geometriſchen Rechnung allein, oder mit Zuziehung einer Conſtruction aufzulöſen, und zwar ſo, daß P die verlangte Lage gegen die gegebenen Puncte erhalte. Apollonius hat die Auflöſungen auf zweyerley Art gegeben, einmahl bloß durch gerade Linien, nach dem Verfahren des Euklides im zweyten Buche der Elemente, dann aber auch auf eine feinere und lehrreichere Art durch Anwendung der an einen Halbkreis gezogenen Linien, die mit den Theilen auf der gegebenen in Verbindung gebracht werden. Die Mannichfaltigkeit der Fälle, welche nach der Methode der Alten alle einzeln vorgenommen werden mußten, und die Beſtimmung des Verhältniſſes, welches zu der Gränze der Möglichkeit und Unmöglichkeit einer Auflöſung gehört, mit der Angabe, ob es größer oder kleiner ſey, als jedes andere, das eine Auf-

Löſung möglich macht, verurſachten, daß die Abhandlung weitläufig wurde. Sie hat 51 Lemmata, und 83 Lehrſätze enthalten.

Simſon macht das eine Glied des Verhältniſſes der Rechtecke und Quadrate um eine gegebene Größe größer oder kleiner, und ſetzt das Verhältniß dieſes veränderten Gliedes zu dem andern Gliede einem gegebenen gleich. Z. B. bey drey gegebenen Puncten in nr. II.

$$AP \times D - D \times E : PB \times PC = m : n,$$

oder auch

$$AP \times PB - D \times E : PC^2 = m : n,$$

wo D und E gegebene Längen, und m : n ein beſtimmtes Verhältniß iſt.

Unter den Lemmaten, die Pappus vorgetragen hat, ſind manche merkwürdige Verhältniſſe, die durch Abtheilungen auf einer Linie entſtehen. Der folgende Satz (XL. bey Pappus) diene zum Beyſpiel.

A C D E B

Es ſind auf einer geraden Linie fünf Puncte, A, B, C, D, E, ſo genommen, daß

$$AC \times CB : AE \times EB = CD^2 : DE^2,$$

ſo iſt

$$AC \times AE : BE \times BC = AD^2 : BD^2.$$

Der Beweis, den Pappus giebt, läßt ſich hier nicht mittheilen, weil dazu andere Sätze nöthig ſind. Beide Proportionen ſind Folge einer dritten, nämlich dieſer:

$$AD \times DB : CD \times DE = AD - BD : CD - DE.$$

Denn man ſetze $AD = a$, $BD = b$; $CD = c$; $DE = d$, ſo iſt die letztere Proportion

$$ab : cd = a - b : c - d,$$

alſo $ab\,(c - d) = cd\,(a - b)$.

Multiplicirt man auf beiden Seiten mit $c + d$, und ſubtrahirt darauf beiderſeits $cc\,dd$, ſo erhält man

$$(a + d)(b - d)\,cc = (a - c)(b + c)\,dd,$$

woraus die erſte Proportion folgt. Die zweyte erhält man auf ähnliche Art, nachdem man die anfängliche Gleichung mit $a + b$ multiplicirt hat.

Ein verwandter Satz iſt folgender (XXXIX. bey Pappus). Wenn

$$AB \times AE : DB \times DE = AC^2 : CD^2,$$

ſo iſt

$$AB \times DB : AE \times DE = CB^2 : CE^2.$$

Bey dem Gebrauche der vorigen Bezeichnungen giebt die erſte Proportion die Gleichung,

$$(a + b + d)\,cc + 2bcd = abd.$$

Hieraus

$$\text{ſowohl } (b + c)^2 d = (a + b)\,(bd - cc)$$
$$\text{als } (c + d)^2 b = (a + d)\,(bd - cc),$$

woraus ſich die zweyte Proportion ergiebt.

Beugungspunct, ſ. Wendungspunct.

Bewegung iſt im mathematiſchen Verſtande die Vorſtellung von der ſtetigen Veränderung der Lage eines Punctes, einer Linie, einer Fläche oder eines Körpers. Es iſt ein dem Verſtande urſprünglich angehöriger Begriff, wodurch wir die ſinnlichen Erſcheinungen bey Veränderung der Lage der Körper gegen einander in Verbindung zu bringen vermögend ſind. Die Bewegung, welche in der reinen Mathematik nur gedacht wird, legen wir den Körpern als etwas an ihnen vorhandenes bey. Dem Verſtande gehört die Form der Bewegung. Die Form iſt nur in ihm vorhanden, da der zurückgelegte Weg eines Körpers nichts wirkliches, und ſeine Lage nur etwas augenblickliches iſt.

Linien werden durch ſtetige Bewegung eines Punctes erzeugt. Weil allenthalben in ihr Puncte gedenkbar ſind, ſo kann man einen Punct ſtetig durch ſie hinführen. So fährt man beym Abzeichnen einer Figur auf einem durchſcheinenden Papier mit einem Stifte über ihren Gränzen hin.

Flächen werden durch die Bewegung einer Linie erzeugt. Eine gerade Linie bleibe in derſelben Ebene, ſich gleich und parallel, ſo entſteht ein Parallelogramm. Verändert ſie ſich, ſo kann jede ebene Figur dadurch entſtehen. Man mag ſie auch um einen feſten Punct in derſelben Ebene, ſich drehen laſſen. Bleibt ſie ſich gleich, ſo beſchreibt ſie eine Kreisfläche, ihr Endpunct die Kreislinie. Verändert ſie ſich, ſo kann jede krummlinichte Figur dadurch beſchrieben werden. Das Geſetz der Veränderung beſtimmt die Natur der krummen Linie. So werden in der Aſtronomie Ellipſen durch einen veränderlichen radius vector beſchrieben, der ſich um den einen Brennpunct dreht. Bleibt die beſchreibende gerade Linie nicht in derſelben Ebene, geht aber doch ſich parallel durch eine in ſich zurücklaufende krumme Linie, als einen Kreis, eine Ellipſe, ſo beſchreibt ſie die Oberfläche eines Cylinders oder cylinderförmigen Körpers. Geht ſie durch einen fixen Punct, indem ſie ſich längs jener krummen Linie bewegt, ſo beſchreibt ſie die Oberfläche eines Kegels oder kegelförmigen Körpers.

Körper werden durch Bewegung einer ebenen Fläche erzeugt. So ein Parallelepipedum durch die ſich parallele Bewegung eines Parallelogramms. Verändert die ebene Figur ihre Größe, bleibt ſich aber ähnlich, ſo entſteht, bey Beobachtung eines gewiſſen Geſetzes, ein Kegel oder kegelförmiger Körper. Jeder Körper kann durch eine nach einem gewiſſen Geſetze ſich verändernde Figur, bey paralleler Bewegung hervorgebracht werden. Die erzeugende Ebene mag ſich auch um eine in ihr gezogene gerade Linie drehen. So kann ſie cylinderförmige und kegelförmige Körper beſchreiben. Bey jenen iſt die Ebene ein Parallelogramm, deſſen Grundlinie aber veränderlich ſeyn mag; bey dieſen iſt die Ebene ein geradlinichtes Dreyeck, deſſen Grundlinie dieſelbe oder veränderlich iſt. Durch Umdrehung einer krummlinichten Figur, um eine Axe, die ſie in gleiche und ähnliche Hälften theilt, entſtehen Körper, die zum Theil zu dem Kegelgeſchlechte gerechnet werden.

Die alten Geometer haben die Vorſtellung einer Bewegung in die Geometrie aufgenommen. Euklides läßt die Kugel, den ſenkrechten Kegel und Cylinder durch Umdrehung einer ebenen Figur entſtehen. Apollonius, der in ſeiner Erklärung des Kegels den ſchiefen mit begreift, läßt die Kegelfläche durch eine gerade Linie beſchrieben werden, welche durch einen fixen Punct gelegt iſt, und längs dem Umfange eines Kreiſes, in welchem aber jener Punct nicht liegt, herumgeführt wird. Archimedes führte eine gedoppelte Bewegung in die Geometrie ein, nämlich bey ſeiner Spirale. Dieſe wird beſchrieben, indem eine unbeſtimmte gerade Linie ſich um einen fixen Punct gleichförmig in derſelben Ebene bewegt, und ein Punct auf derſelben gleichförmig fortrückt. Er bringt hier auch den Begriff von Geſchwindigkeit in eine geometriſche Unterſuchung. Er zeigt, daß bey der gleichförmigen oder gleich geſchwinden Bewegung eines Punctes die Wege ſich wie die Zeiten verhalten, auch, daß bey zwey Puncten, deren jeder eine gleichförmige Bewegung hat, die in gleichen Zeiten beſchriebenen Wege ein gegebenes Verhältniß haben.

Die Neuern haben auch ungleichförmige Bewegungen in die Geometrie eingeführt. Neper legt in der Theorie der Logarithmen zwey Bewegungen zum Grunde, eine gleichförmige und eine ungleichförmige, wobey die Geſchwindigkeiten in geometriſcher Progreſſion abnehmen. Descartes gebrauchte ungleichförmige Geſchwindigkeiten bey der Conſtruction der Beauniſchen Curve. Newtons Fluxionen ſind Verhältniſſe der Geſchwindigkeiten der Puncte, Linien und Ebenen, die durch ihre Bewegung Linien, Flächen und Körper erzeugen. Indem die Ordinate einer krummen Linie parallel mit ſich ſelbſt auf der Abſciſſenlinie fortrückt, rücke ein Punct auf ihr in ihrer Richtung fort, entweder nach der Abſciſſe hin oder ſich entfernend. Das Geſetz der Geſchwindigkeit dieſes Punctes in Beziehung auf die Geſchwindigkeit der Ordinatenlinie beſtimmt die Curve.

Vergl. Käſtners Geſchichte der Mathem. Bd. IV. S.

Beweis iſt eine Verbindung von Sätzen, welche entweder den Grund enthält, warum einem Subjecte ein Prädicat beygelegt wird, oder welche zeigt, wie aus einem Satze ein anderer Satz hergeleitet wird. In mathematiſchen Unterſuchungen iſt das Subject entweder eine Größe mit einer gewiſſen Form, z. B. die geometriſchen, Kreis, Ellipſe, Kegel, unter den arithmetiſchen, eine dekadiſch ausgedruckte Zahl, eine Potenz einer eintheiligen Größe mit irgend einem Exponenten; oder das Subject iſt eine Verbindung mehrerer Größen, z. B. Aggregat, Product, Bruch, Proportion, Gleichung, Progreſſion. Ein Subject kann oft auch als ein Satz betrachtet werden, z. B. eine Proportion, eine Gleichung enthalten wirklich jede einen gewiſſen Satz. Das Prädicat iſt die Beſtimmung einer Gleichheit, bisweilen auch einer Ungleichheit, in geometriſchen Sätzen außer dieſer Beſtimmung in einigen Fällen eine gewiſſe Lage der Linien und Flächen.

Sehr häufig oder am häufigſten wird ein Satz, manchmahl mehrere, als Bedingung oder Vorausſetzung (hypotheſis) aufgeſtellt, und daraus mit Zuziehung ſchon erwieſener Sätze ein neuer Satz hergeleitet.

Daß ſowohl die Sätze, welche in einem Beweiſe angewandt werden, richtig ſeyn, als auch, daß in der Art ihrer Verbindung keine Mängel ſich finden müſſen, oder daß, wie die Logiker ſich ausdrücken, Materie und Form der Schlüſſe richtig ſeyn, wird in der Mathematik um ſo ſtrenger gefordert, da es bey mathematiſchen Beweiſen leicht iſt, darauf zu achten, und hier keine der Schwierigkeiten ſich findet, die bey philoſophiſchen und phyſikaliſchen Unterſuchungen häufig eintreten.

Von den Schlußarten, die in der Logik entwickelt werden, gebraucht man in der Mathematik nur die nach der erſten Figur, in welcher man von dem Allgemeinen auf das Untergeordnete ſchließt. In der reinen Mathematik werden nur allgemein bejahende Sätze aufgenommen. Jene Schlußart kommt nur in der Analyſis und analytiſchen Geometrie vor. Was z. B, von Gleichungen allgemein

erwieſen iſt, gilt auch von einer Gleichung irgend eines Grades, und einer individuellen; die Entwickelung einer Größe in die Form einer Reihe wird auf jeden beſondern Fall angewandt, ſo auch die Differentiation und Integration einer Function, die im Allgemeinen gelehrt iſt. Die Eigenſchaften, welche Linien der zweyten Ordnung zukommen, werden jeder der drey Gattungen dieſer Ordnung beygelegt. — In der Geometrie, nach Art der Alten behandelt, wird nie vom Allgemeinen auf das Untergeordnete geſchloſſen, ſondern die Eigenſchaften des Untergeordneten werden beſonders erwieſen. Z. B. an dem Kreiſe wird gezeigt, daß das Quadrat der halben Chorde, die ſenkrecht auf einem Durchmeſſer ſteht, dem Rechtecke von den Abſchnitten des Durchmeſſers gleich iſt, obgleich dieſer Satz ſchon in einem andern von den Segmenten zweyer, auf irgend eine Art ſich ſchneidenden Linien enthalten iſt.

Die Schlußarten, welche in der Mathematik am häufigſten gebraucht werden, ſind folgende.

I. Wenn A, B, C, D, E, etc, irgend welche Größen, auch zuſammengeſetzte, bedeuten, und es von dieſen erwieſen iſt, daß $A = B$, und $B = C$ iſt, ſo folgt, daß $A = C$ iſt. Iſt $C = D$, ſo folgt, daß $A = D$ iſt; wenn ferner $D = E$ iſt, ſo iſt $A = E$, u. ſ. f. ſo lang auch die Reihe ſeyn mag.

II. Iſt erwieſen oder bedungen, daß $A = B$ und $C = D$ iſt, ſo iſt $A + C = B + D$, und auch $A - C = B - D$; ferner $A + C = B + C$ und $A - C = B - C$.

III. Iſt erwieſen oder bedungen, daß $A = B$ iſt, ſo iſt $mA = mB$, und $\frac{A}{m} = \frac{B}{m}$. Auch ſind die gleichnamigen Potenzen und Wurzeln von A und B gleich. Die Differentiale dergleichen Functionen A, B, ſind gleich. Die Integrale der gleichen Differentialfunctionen A, B, mit zwey veränderlichen Größen ſind gleich, oder nur um eine beſtändige Größe verſchieden.

IV. Sind A und B ungleich, ſo ſind auch $A + C$ und $B + C$ ungleich; ſo wie $A - C$ und $B - C$. Iſt A

größer als B, und B größer als C, ſo iſt A größer als C. Iſt A kleiner als B, und B kleiner als C, ſo iſt A kleiner als C.

V. Es bedeuten A = o, B = o, C = o, D = o etc. Gleichungen zwiſchen gegebenen und unbekannten Größen, oder Gleichungen zwiſchen unveränderlichen und veränderlichen Größen; dieſe mögen theils angenommene theils vorher erwieſene ſeyn. Aus der Verbindung von A = o und B = o durch ſolche Verwandlungen, wie II. und III. enthalten, entſtehe eine Gleichung P = o; durch die Verbindung der Gleichung D = o (oder B = o; oder der neuen P = o) und C = o, entſtehe eine Gleichung Q = o. Aus der Verbindung einer dieſer Gleichungen mit der Gleichung D = o entſtehe wieder eine, R = o. So fährt man fort, bis daß man auf eine Gleichung kommt, welche die Relation zwiſchen den Größen darſtellt, die mit einander verknüpft werden ſollen, die übrigen ausgeſondert. Dieſer Gang der Beweiſe iſt der gewöhnlichſte in der Analyſis. Da Proportionen in der That Gleichungen, nämlich zwiſchen zwey Verhältniſſen, ſind, ſo iſt derſelbe Gang auch in geometriſchen Beweiſen, nach Art der Alten, häufig anzutreffen, hier aber öfterer mit den andern Schlußarten, beſonders I. verbunden, als es in der Analyſis geſchieht.

Alle Mittelſätze, die bey einem Beweiſe angewandt werden, müſſen vorher erwieſen ſeyn, wenn ſie nicht eine bedungene Relation der Größen enthalten. In dem Beweiſe ſelbſt muß bloß ihre Combination vorgenommen werden. Es iſt ein Fehler gegen die gute Methode, Beweiſe in Beweiſe einzuſchalten. Wo man dergleichen Parentheſen antrifft, und ſie zu überſchlagen nicht im Stande iſt, muß man ſie heraus heben, und als einen beſondern Satz voran gehen laſſen. Es iſt auch ſehr gut, bey der Schlußart V. alle Gleichungen, die gebraucht werden, vorher aufzuſtellen, wodurch die Überſicht des Beweiſes erleichtert wird, oder dieſes als Leſer für ſich zu thun, wenn der Verfaſſer des Beweiſes es nicht für nöthig gehalten hat. Man ſieht gleich Anfangs, worauf es bey dem Beweiſe ankommt.

Eine von den alten Geometern oft gebrauchte Beweisart, die Gleichheit zweyer Größen A und B zu zeigen, iſt, daß bewieſen wird, A könne nicht größer, und auch nicht kleiner als B ſeyn.

In der Analyſis des Unendlichen nach Art der Alten behandelt, kommt folgende Schlußart vor. Wenn A eine Größe iſt, die zwiſchen zwey andern P, Q ſo enthalten iſt, daß A immer größer als P und kleiner als Q iſt, ſo nahe auch P und Q durch Veränderung in der Anzahl und Quantität ihrer Theile einander kommen, und wenn die gemeinſchaftliche Gränze, welcher P und Q ſich ohne einen beſtimmbaren Unterſchied nähern, G heißt, ſo iſt A = G.

Von dieſer und der vorhergehenden Schlußart ſ. Exhauſtions-Methode.

In einigen Fällen iſt folgende Schlußart brauchbar. Wenn zwey Größen zwiſchen zwey veränderlichen Größen, deren Unterſchied kleiner als jede angebbare Größe gemacht werden kann, enthalten ſind, ſo ſind ſie einander gleich. ſ. Proportion.

Beweiſe durch Induction, das iſt, eine allgemeine Behauptung aus Bemerkungen des Zutreffenden in beſondern Fällen, finden in der Geometrie gar nicht Statt; in der Arithmetik und Analyſis müſſen ſie bisweilen die Stelle der ſtrengen und allgemeinen Beweiſe vertreten. Die Formen der Zahlen haben zuweilen Eigenſchaften, die ſich nicht leicht erweiſen laſſen, ob ſie gleich in allen einzelnen Fällen die Probe halten. Z. B. der Satz, daß jede ganze Zahl ſich in vier oder wenigere Quadrate zerlegen läßt. Die Summen der Potenzen von Zahlen, die in arithmetiſcher Progreſſion ſind, bis zu der ſechsten Potenz, fand Wallis durch eine mühſame Induction (Arithm. Infin. Prop. 19. 39. ſeq.). Das Geſetz der Binomial-Coefficienten iſt zuerſt durch Induction, anfangs nur, von Briggs, für ganze Exponenten, hernach von Newton für gebrochne, durch wirkliche Ausziehung einer Wurzel, gefunden. Die Induction wird vornemlich bey den Coefficienten einer Reihe, oder auch bey den gleich-

ſtelligen Coefficienten mehrerer Reihen, angewandt, ihr Geſetz zu finden. Inzwiſchen muß man, wenn es nur möglich iſt, immer allgemeine Beweiſe ſuchen.

Ein bequemer Weg dazu iſt oft folgender. Man zeige, daß das aus der Induction gefundene Geſetz für jeden folgenden Coefficienten gilt, wenn es für die vorhergehenden gültig iſt, oder daß es für den (m + 1)ten Coefficienten gilt, wenn es für den mten angenommen wird. Käſtner hat dieſe Beweisart oft gebraucht. Jakob Bernoulli mag ſie zuerſt angewandt haben. Acta Erud. 1686, pag. 360. Opp. T. I. nr. 24. Ars conjectandi, p. 93.

Ein analogiſcher Beweis iſt, wenn eine Formel, die bey einer gewiſſen Beſchaffenheit der Größen richtig erwieſen iſt, auch auf andere Fälle, wo dieſe Beſchaffenheit nicht iſt, ausgedehnt wird. Z. B. wenn der binomiſche Lehrſatz, nachdem er für ganze, poſitive Exponenten erwieſen iſt, auch bey gebrochnen, und bey negativen Exponenten angewandt wird. Es war ein analogiſcher Beweis, wodurch Newton aus der Quadratur ſolcher krummen Linien, deren Gleichung iſt $y = (1 = x^2)^m$, wenn m eine ganze poſitive Zahl iſt, die Quadratur eines circularen und hyperboliſchen Segments, aus der Gleichung $y = (1 \pm x^2)\, \frac{1}{2}$, mittelſt einer Interpolation herleitete. (Newtoni Opuſc. T. I. nr. XI. ſ. Binom. Lehrſatz.)

Die Beweiſe vermittelſt des Gebrauchs entgegengeſetzter Größen kommen bey den Alten nicht vor. Jeder Fall wurde unabhängig von dem andern erwieſen. Wir leiten aus den Reſultaten der Rechnung für einen ausgewählten Fall, in welchem alle Größen abſolut (poſitiv, in Beziehung auf die negativen) genommen werden, die Reſultate für diejenigen Fälle, in welchen eine oder mehrere negativ, in Beziehung auf die ihnen gleichnamigen in dem Normalfalle, geſetzt werden, bloß durch gehörige Verwandlung der Vorzeichen her. Dieſes iſt ein wichtiges Abkürzungsmittel des Vortrages.

Die Beweiſe der Elementarſätze in der Arithmetik mag man an beſtimmten Zahlen führen, nur ſo, daß

daraus die Allgemeinheit des Satzes oder des Verfahrens daraus erhelle, indem die individuellen Zahlen nur die Stelle allgemeiner Zeichen vertreten.

Man theilt die Beweiſe ein in ſynthetiſche und analytiſche. Jene gehen von den Eigenſchaften des Subjectes oder den bedungenen Sätzen aus, und verbinden damit die ſchicklichen, ſonſt erwieſenen Sätze, um zu dem Prädicate oder der Folgerung in dem aufgeſtellten Satze zu gelangen. Die analytiſchen Beweiſe gehen von der Folgerung aus, und zeigen, daß man dadurch auf einen zugeſtandenen Satz kommt. Die letztern kommen ſelten vor. Wenn aber ein Schriftſteller einen Satz behauptet, ohne ihn zu beweiſen, ſo iſt ein analytiſcher Beweis ein guter Weg ſich von der Richtigkeit zu verſichern, in dem Falle, daß man den directen Weg dazu nicht finden kann. S. Analyſis als Methode.

Die Beweiſe ſind noch entweder directe, oder indirecte, die man auch apagogiſche nennt. Die directen zeigen, wie ein Satz aus den Prämiſſen folgt; die indirecten zeigen, daß das Gegentheil unmöglich iſt, der Satz alſo wahr, weil ein drittes nicht Statt findet. Die letztern werden am meiſten gebraucht darzuthun, daß ein Satz auch umgekehrt richtig iſt. Im erſten und dritten Buche des Euklides kommen viele Beyſpiele vor.

Bezeichnung (notatio) iſt die Darſtellung der Größen, ihrer Formen und Verbindungen durch gewiſſe willkührliche Zeichen (Symbole, Charaktere) und deren Zuſammenſetzungen. Dadurch wird die Theorie der Sache auf die Theorie der Zeichen reducirt. Die alten Geometer bedienten ſich keiner andern Zeichen als der Buchſtaben, wodurch die Linien angedeutet wurden. Diophantus nahm erſt einige Zeichen für die unbekannte Größe und die Potenzen an. Die Bezeichnungen in der Algebra und Analyſis ſind allmählich eingeführt, ſo wie die Rechnungen mehr zuſammengeſetzt wurden. Die zunehmenden

Verwickelungen in den Verbindungen der Größen, je allgemeiner und vielbefaſſender die analytiſchen Unterſuchungen werden, machen noch weitere Bezeichnungen nöthig. So ſind in der combinatoriſchen Analyſis durch Hindenburg manche neue Bezeichnungen durch gewiſſe Combinationen der Buchſtabenzeichen eingeführt. Arbogaſt hat in ſeinem Calcul des dérivations (Strasbourg 1800) viele neue Zeichen zufolge ſeiner neuen Methode angenommen. Auch Burmann iſt bemüht für combinatoriſche Rechnungen eine neue Bezeichnungsart anzugeben, die Kürze und Deutlichkeit mit einander vereinige.

Die Buchſtabenzeichen reichen oft bey verwickelten Rechnungen nicht zu, darum hat man ſchon lange durch Strichelchen an der Spitze, oder durch Marken über ihnen, den Mangel zu erſetzen geſucht. Bey den Buchſtaben iſt der Vortheil, daß man die Zeichen ſich zugleich hörbar macht, welches bey andern willkührlichen Zeichen nicht Statt hat.

Die mathematiſchen Zeichen ſtellen entweder die Gröſſen, oder ihre Formen, oder ihre Verbindungen dar.

Die Größen ſelbſt werden durch Buchſtaben angedeutet, die bekannten oder gegebenen und die unveränderlichen Größen durch die erſten Buchſtaben eines Alphabets, die unbekannten und die veränderlichen durch die letztern Buchſtaben; Zahlfactoren häufig durch die mittlern Buchſtaben m, n, p, etc. Gewiſſe zuſammengeſetzte Größen von beſtimmter Form, wie die Binomial-Coefficienten, die Bernoulliſchen Zahlen, werden oft durch ihnen vorzüglich gewidmete Buchſtaben bezeichnet, ſo wie überhaupt zuſammengeſetzte Größen, wie die Coefficienten in einer Reihe, durch einzelne Buchſtaben ausgedruckt werden.

Zu den Zeichen der Formen gehören das Zeichen einer Potenz, wie a^m; das Wurzelzeichen, $\sqrt[n]{a}$; die abgekürzten Wörter ſin A; coſ A; tang A, etc. auch log A oder l A. Ferner die Bezeichnungen der erſten, zweyten u. ſ. f.

Unterſchiede einer Reihe von Größen, Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, etc.; eines Differentialverhältniſſes, wie $dx : dy$; eines Integrals $\int X dx$, wo X eine Function von x iſt. Das allgemeinſte Zeichen einer Form iſt die Bezeichnung einer Function einer veränderlichen Größe x durch ϕx oder ψx, oder $F x$; zweyer ſolcher Größen x, y durch $\phi(x, y)$ oder $F(x, y)$ u. ſ. f.

Zu den Zeichen der Verbindungen gehören die Zeichen der Addition, Subtraction, Multiplication, Diviſion, (S. Buchſtabenrechnung) der Verhältniſſe, und Proportionen. Von den Zeichen der Verbindungen in der combinatoriſchen Analyſis ſ. dieſe.

Eine Überſicht der gewöhnlichen Zeichen in dem Artikel: Zeichen.

Beziehung (relatio) iſt erſtlich die Verknüpfung einer Größe mit einer andern nach ihren geometriſchen Verhältniſſe, und ſo fern mit Verhältniß (ratio) einerley. Zweytens zeigt es eine Nebenbeſtimmung in Abſicht auf Lage, oder Vergrößerung und Verminderung an, das iſt, was man Poſitiv und Negativ nennt. Nämlich um mehrere verwandte Fälle einer Verbindung von Größen in einer einzigen Rechnung zu begreifen, ändert man nur die Vorzeichen der Größen, welche in Abſicht der ihnen gleichnamigen eine entgegengeſetzte Beſchaffenheit, oder Beziehung erhalten. Da man auch in einem Aggregat von Größen diejenigen, welche verſchiedene Vorzeichen haben, entgegengeſetzte nennt, ſo kommt hier auch eine Beziehung der Größen, nach dieſer Beſchaffenheit, vor.

Relation heißt, drittens, überhaupt die Art, wie eine Größe aus andern zuſammengeſetzt wird. Die Relation der Ordinaten an einer krummen Linie zu den Abſciſſen wird durch die Gleichung für die krumme Linie beſtimmt.

Beziehungs-Scale (Scala relationis) iſt die Reihe der mit ihren Vorzeichen verbundenen Factoren, womit die Glieder einer rücklaufenden Reihe von irgend einem an, rückwärts genommen, folgweiſe multiplicirt

werden, um das nächſtfolgende Glied zu erhalten, ſ. rück- laufende Reihe.

Billion iſt eine Million von Millionen, ſ. Zahl.

Bimediale, ſ. Mediale.

Binariſche Arithmetik, ſ. Dyadik.

Binion, eine Verbindung von zwey Größen oder Dingen aus mehrern gleichartigen, ſ. Combination.

Binomial-Coefficienten (unciae binomiales) ſind die Zahlen, welche anzeigen, wie oft in der entwickelten Potenz eines Binomium, a + b, jede Gattung von Product aus den Theilen deſſelben vorkommt. Die Form derſelben iſt in dem Artikel, binomiſcher Lehrſatz, entwickelt. Wenn ſie von dem des zweyten Gliedes an gezählt werden, ſo iſt der rte Coefficient in der nten Potenz des Binomium a + b gleich der Anzahl der Combinationen von r Dingen aus n, ohne Wiederholungen.

1. Zur abgekürzten Bezeichnung ſowohl der Stelle als der Potenz dienen, nach der von Hindenburg gewählten bequemen Art, die Buchſtaben des deutſchen großen Alphabets, mit dem Exponenten der Potenz oben an der linken Seite. Weil der Coefficient des erſten Gliedes der Potenz allemahl = 1 iſt, ſo bekommt dieſer keinen beſondern Buchſtaben. Es iſt, wenn der Exponent der Potenz = n iſt,

$$^n\mathfrak{A} = n; \; ^n\mathfrak{B} = \frac{n.n-1.}{1.2}; \; ^n\mathfrak{C} = \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3};$$

$$^n\mathfrak{D} = \frac{n.n-1.n-2.n-3.}{1.2.3.4}. \text{ u. ſ. f.}$$

Die Puncte zwiſchen den Factoren vertreten die Stelle der Klammern oder Parentheſenzeichen. Die hier aufgeſtellten Ausdrücke werden in dem gegenwärtigen Artikel als bloße Formen von Größen, ohne Rückſicht auf eine beſondere Beziehung, betrachtet, daher n jede Art von Zahl, ganze

oder gebrochne, bejahte oder verneinte, ſeyn mag. Der binomiſche Lehrſatz, allgemein genommen, beruht auf den Eigenſchaften dieſer Zahlen.

2. Die Coefficienten in einer unbeſtimmten Stelle, als der mten, bezeichnet Hindenburg durch einen Buchſtaben aus der Schwabacher Schrift, als ${}^{n}\mathfrak{M}$, ſo daß

$${}^{n}\mathfrak{M} = \frac{n \,.\, n-1 \,.\, n-2 \ldots n-m+1 \,.}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots m} \text{ iſt.}$$

Dieſes geſchieht anzuzeigen, daß ${}^{n}\mathfrak{M}$ nicht den zwölften Coefficienten, ſondern einen unbeſtimmten bezeichnet. Inzwiſchen, wenn der Coefficient durch Puncte von denen, die eine beſtimmte Stelle haben, abgeſondert iſt, mag man auch die gewöhnliche Schrift gebrauchen, welches hier geſchehen wird, ſo daß die mittlern Buchſtaben des Alphabets allemahl unbeſtimmte Coefficienten bedeuten.

3. Um die Stelle eines Coefficienten nach einem andern anzugeben, wird die Zahl der Stelle gerade über den Buchſtaben geſetzt. So iſt ${}^{n}\overset{4}{\mathfrak{M}}$ der vierte Coefficient nach dem mten oder nach ${}^{n}\mathfrak{M}$, und ${}^{n}\overset{r}{\mathfrak{M}}$ der rte nach demſelben, alſo

$${}^{n}\overset{r}{\mathfrak{M}} = \frac{n \,.\, n-1 \ldots n-m-r+1 \,.}{1 \,.\, 2 \ldots m+r}.$$

Geht der andere Coefficient vor ${}^{n}\mathfrak{M}$ vorher, ſo wird dieſes durch Beyfügung des Vorzeichens — angedeutet. So iſt ${}^{n}\overset{-4}{\mathfrak{M}}$ der vierte vorhergehende, und ${}^{n}\overset{-r}{\mathfrak{M}}$ der rte vorhergehende Coefficient. Die Zahl $\pm r$ heißt der *Diſtanz-Exponent*.

4. In der beygefügten Tafel ſind die Binomial-Coefficienten bis zu dem zwölften für ganze poſitive Exponenten verzeichnet. Die Exponenten ſind mit den römiſchen Zahlziffern bezeichnet: die Stellen der Coefficienten ſind die Zahlen in der oberſten Querreihe.

Tafel der Binomial=Coefficienten bis zur XII. Potenz.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
I.	1	1											
II.	1	2	1										
III.	1	3	3	1									
IV.	1	4	6	4	1								
V.	1	5	10	10	5	1							
VI.	1	6	15	20	15	6	1						
VII.	1	7	21	35	35	21	7	1					
VIII.	1	8	28	56	70	50	28	8	1				
IX.	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1			
X.	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1		
XI.	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	
XII.	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1

Jede Querreihe oder horizontale Reihe entſteht aus der nächſt obern, wenn zu jeder Zahl in dieſer die nächſtvorhergehende addirt wird. Dieſes rührt daher, daß jede nächſthöhere Potenz aus der vorhergehenden durch die Multiplication mit $a + b$ entſteht.

5. Dieſes folgt auch aus der Form der Coefficienten. Es iſt ${}^{n}\mathfrak{M} = \frac{n.n-1\ldots n-m+1.}{1.2\ldots m.}$, und ${}^{n}\overset{+1}{\mathfrak{M}}$ $= \frac{n.n-1\ldots n-m.}{1.2\ldots m+1.}$. Die Summe dieſer beiden nächſten Coefficienten in der nten Potenz iſt $= \frac{n+1.n.n-1\ldots n-m+1.}{1.2.3\ldots m+1.}$. Dieſes iſt der $(m+1)$te Coefficient der $(n+1)$ten Potenz, oder ${}^{n+1}\overset{+1}{\mathfrak{M}}$. Es iſt daher ${}^{n}\mathfrak{M} + {}^{n}\overset{+1}{\mathfrak{M}} = {}^{n+1}\overset{+1}{\mathfrak{M}}$, auch, wenn n irgend eine Zahl, eine ganze oder gebrochne, poſitive oder negative Zahl iſt.

6. Die Summe der Coefficienten in der mten Stelle bis zu dem aus der nten Potenz iſt der $(m+1)$te Coef=

ficient aus der $(n + 1)$ten Potenz. Z. B. wenn $m = 4$, und $n = 9$, ſo iſt $1 + 5 + 15 + 35 + 70 + 126 = 252$, dem fünften Coefficienten der 10ten Potenz.

Es iſt nämlich allgemein:

$$= {}^{n+1}\overset{+1}{\mathfrak{M}} = {}^{n}\mathfrak{M} + {}^{n}\overset{+1}{\mathfrak{M}}$$

$$= {}^{n}\mathfrak{M} + {}^{n-1}\mathfrak{M} + {}^{n-1}\overset{+1}{\mathfrak{M}}$$

$$= {}^{n}\mathfrak{M} + {}^{n-1}\mathfrak{M} + {}^{n-2}\mathfrak{M} + {}^{n-2}\overset{+1}{\mathfrak{M}}$$

$$= {}^{n}\mathfrak{M} + {}^{n-1}\mathfrak{M} + {}^{n-2}\mathfrak{M} + {}^{n-3}\mathfrak{M} + {}^{n-3}\overset{+1}{\mathfrak{M}}$$

u. ſ. f.

Iſt n eine ganze Zahl, ſo bricht die Reihe mit dem $(n - m + 1)$ten Gliede ab. Denn die Reihe der Coefficienten in der $m$ten Stelle fängt an, wenn $n = m$ iſt, und enthält alſo bis zur $n$ten Potenz $n - m + 1$ Glieder.

7. Iſt n aber eine poſitive gebrochne Zahl oder eine negative, ſo bricht die Reihe nicht ab mit einem Coefficienten aus der $m$ten Stelle, ſondern es muß eine Ergänzung, ${}^{n-p}\overset{+1}{\mathfrak{M}}$, hinzugefügt werden, wo $p + 1$ die Stellenzahl des Gliedes iſt, mit welchem die Reihe abgebrochen wird. Z. B. es ſey $n = \frac{1}{2}$, und $m = 3$, alſo $\mathfrak{M} = \mathfrak{C}$, und $\overset{+1}{\mathfrak{M}} = \mathfrak{D}$. Nun iſt

$$^{\frac{3}{2}}\mathfrak{D} = + \frac{1.1.3}{2.4.6} - \frac{1.3.5}{2.4.6} - \frac{3.5.7}{2.4.6} - \frac{5.7.9}{2.4.6} - \frac{7.9.11}{2.4.6} + \frac{7.9.11.13}{2.4.6.8}.$$

Oder

$$^{\frac{3}{2}}\mathfrak{D} = + \frac{1.1.3}{2.4.6} - \frac{1.3.5}{2.4.6} - \frac{3.5.7}{2.4.6} - \frac{5.7.9}{2.4.6} - \frac{7.9.11}{2.4.6} - \frac{9.11.13}{2.4.6} + \frac{9.11.13.15}{2.4.6.8}.$$

Auf dieſe Art kann man der Reihe ſo viele Glieder geben als man will.

Es ſey $n = \frac{1}{3}$; $m = 3$, ſo iſt

$$ {}^{\frac{1}{3}}\mathfrak{D} = \frac{1.2.5}{3.6.9} - \frac{2.5.8}{3.6.9} - \frac{5.8.11}{3.6.9} - \frac{8.11.14}{3.6.9} + \frac{8.11.14.17}{3.6.9.12}, $$

und auf ähnliche Art mit mehrern Gliedern.

8. Es iſt $m.{}^{n}\mathfrak{M} = (n-m+1).{}^{n}\overset{-1}{\mathfrak{M}}$; für jeden Werth von n.

Denn es iſt $^{n}\mathfrak{M} = \frac{n.n-1....n-m+2.n-m+1.}{1.2...m-1.m}$,

und $^{n}\overset{-1}{\mathfrak{M}} = \frac{n.n-1...n-m+2.}{1.2...m-1}$.

9. Für jeden Werth von n iſt aus (1.)

$(n+1).1 = 1.{}^{n+1}\mathfrak{A}$; $(n+1).{}^{n}\mathfrak{C} = 4.{}^{n+1}\mathfrak{D}$;

$(n+1).{}^{n}\mathfrak{A} = 2.{}^{n+1}\mathfrak{B}$; $(n+1).{}^{n}\mathfrak{D} = 5.{}^{n+1}\mathfrak{E}$;

$(n+1).{}^{n}\mathfrak{B} = 3.{}^{n+1}\mathfrak{C}$; etc.

10. Da $1 + {}^{n}\mathfrak{A} + {}^{n}\mathfrak{B} + {}^{n}\mathfrak{C} +$ etc. $= (1+1)^{n} = 2^{n}$; ſo iſt $(n+1)2^{n} = 1.{}^{n+1}\mathfrak{A} + 2.{}^{n+1}\mathfrak{B} + 3.{}^{n+1}\mathfrak{C} + 4.{}^{n+1}\mathfrak{D}$; etc.

11. Es iſt $^{n}\mathfrak{N} = 1$, und $^{n}\overset{+1}{\mathfrak{N}} = 0$, wenn n eine ganze Zahl iſt, zufolge (2.), wenn $m = n$ geſetzt wird, für die erſte Formel, und, $m = n+1$ geſetzt, für die zweyte.

Daher iſt $^{n-1}\mathfrak{N} = 0$.

Werth des mittelſten Coefficienten in $(a+b)^{2n}$.

12. Es iſt das Product $2n.2n-1\ldots n+2.n+1. = .2n-1.2n-3\ldots 3.1. \times 2^{n}$, wenn n eine ganze Zahl iſt.

Denn man nehme die Gleichung als richtig an, ſo iſt, wenn beide Theile mit $2(2n+1)$ multiplicirt werden,

$$.2n+2.2n+1.2n....n+2. =$$
$$.2n+1.2n-1.2n-3....3.1. \times 2^{n+1}.$$

Dieſes iſt eine vollkommen ähnliche Gleichung mit der angenommenen, und entſteht aus derſelben, wenn n + 1 ſtatt n geſetzt wird. Iſt nun jene Gleichung für einen Werth von n, als ganze Zahl richtig, ſo iſt ſie es auch für die nächſtfolgende ganze Zahl. Sie iſt aber richtig für n = 1, oder n = 2: oder n = 3; alſo auch für n = 4; daher für n = 5, u. ſ. f. für alle ganze Zahlen.

13. Folglich iſt der nte Coefficient in der 2nten Potenz, das iſt,

$$^{2n}\mathfrak{N} = \frac{1.3.5....2n-1.}{2.4.6....2n} \times 2^{2n}.$$

Denn es iſt $^{2n}\mathfrak{N} = \frac{2n.2n-1.....n+1.}{1.2....n}$,

woraus für ein ganzes n, vermittelſt (12.) ſogleich jener Werth erhalten wird.

Für ein ganzes n iſt dieſer Coefficient der größte in der Potenz, $(a+b)^{2n}$, und der mittelſte, wenn der Coefficient von a^{2n} mitgezählt wird.

14. Da $2^{2n} = (1+1)^{2n}$, ſo iſt 2^{2n} gleich der Summe aller Coefficienten in der Potenz $(a+b)^{2n}$, den Coefficienten von a^{2n} mitgezählt. Es verhält ſich alſo der nte Coefficient in der 2nten Potenz zu der Summe aller, wie das Product der ungeraden Zahlen, 1.3.5.. 2n − 1 zu dem Producte der geraden, 2.4.6... 2n.

15. Es ſey π der halbe Umfang eines Kreiſes, deſſen Halbmeſſer die Einheit iſt, ſo iſt $\frac{\pi}{2} =$

$$\frac{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10.\text{etc.}}{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11.\text{etc.}}.$$ (Cyklometrie, 29.).

Bricht man im Zähler mit einem ganzen Paare Factoren ab, ſo iſt $\sqrt{\frac{(2n+1)\pi}{\cdot}} > \frac{2.4.6...2n}{1.3.5...2n-1.}$.

Bricht man aber im Nenner mit einem ganzen Paar Factoren ab, ſo iſt $\sqrt{\frac{2n\pi}{2}} < \frac{2.4.6\ldots.2n}{1.3.5\ldots2n-1}$.

16. Daher iſt ${}^{2n}\mathfrak{N} > 2^{2n}.\sqrt{\frac{2}{(2n+1)\pi}}$,

und ${}^{2n}\mathfrak{N} < 2^{2n}.\sqrt{\frac{2}{2n\pi}}$.

In einer ungeraden Potenz ſind die Coefficienten der beiden mittelſten Glieder einander gleich, und jeder halb ſo groß als der Coefficient des mittelſten in der nächſtfolgenden geraden Potenz.

Dieſe Formeln dienen zur Berechnung des mittelſten Coefficienten, wenn der Exponens ſehr groß iſt, welches in der Wahrſcheinlichkeits-Rechnung vorkommt.

17. Die Formeln (16.) hat Stirling durch Interpolation gewiſſer Reihen gefunden, zugleich mit zweyerley Ergänzungsreihen, in der Schrift, Methodus differentialis, p. 119. Londini 1730. Moivre hat Stirlings Formeln vorläufig bekannt gemacht, in den Miſcellaneis analyticis, p. 170. Eine andere Annäherungsformel hat Moivre in dieſen Miſcellaneen p. 102. mitgetheilt, und in einer allgemeinern Geſtalt in der Doctrine of Chances, 2d edit. p. 236.

Summirung der Producte je zweyer Binomial-Coefficienten aus verſchiedenen Potenzen oder aus derſelben Potenz.

18. Die Reihe der Binomial-Coefficienten für die Exponenten α und β ſey, nach der eingeführten Bezeichnung,

$$1, {}^{\alpha}\mathfrak{A}, {}^{\alpha}\mathfrak{B}, {}^{\alpha}\mathfrak{C} \ldots {}^{\alpha}\overset{-1}{\mathfrak{M}}, {}^{\alpha}\mathfrak{M}, {}^{\alpha}\overset{+1}{\mathfrak{M}} \ldots$$

$$1, {}^{\beta}\mathfrak{A}, {}^{\beta}\mathfrak{B}, {}^{\beta}\mathfrak{C} \ldots {}^{\beta}\overset{-1}{\mathfrak{M}}, {}^{\beta}\mathfrak{M}, {}^{\beta}\overset{+1}{\mathfrak{M}} \ldots$$

Man multiplicire die Coefficienten der einen Reihe folgweiſe durch die der andern, entweder in der Ordnung,

wie ſie hier folgen, den erſten mit dem erſten, den zweyten mit dem zweyten, u. ſ. w. oder in entgegengeſetzter Ordnung, als 1 in der erſten Reihe mit dem mten in der zweyten, den zweyten in jener mit dem (m—1)ten in dieſer, u. ſ. f. die Aufgabe iſt, die Summe dieſer Producte zu finden.

19. Zuerſt die Producte nach der Folge der Glieder.

I. Es iſt nach (5)

$$ {}^{\alpha}\mathfrak{M} = {}^{\alpha-1}\overset{-1}{\mathfrak{M}} + {}^{\alpha-1}\mathfrak{M}, $$

$$ {}^{\beta}\mathfrak{M} = {}^{\beta-1}\overset{-1}{\mathfrak{M}} + {}^{\beta-1}\mathfrak{M}. $$

und nach (8.)

$$ m.\,{}^{\alpha}\mathfrak{M} = (\alpha - m + 1).\,{}^{\alpha}\overset{-1}{\mathfrak{M}}, $$

$$ m.\,{}^{\beta}\mathfrak{M} = (\beta - m + 1).\,{}^{\beta}\overset{-1}{\mathfrak{M}}. $$

II. Hieraus entſtehen folgende Werthe der Producte zweyer Binomial-Coefficienten in derſelben Stelle:

$$ m.\,{}^{\alpha}\mathfrak{M}.\,{}^{\beta}\mathfrak{M} = (\alpha - m + 1).\,{}^{\alpha}\overset{-1}{\mathfrak{M}}.\,{}^{\beta-1}\overset{-1}{\mathfrak{M}} + m.\,{}^{\alpha}\mathfrak{M}.\,{}^{\beta-1}\mathfrak{M}. $$

$$ m.\,{}^{\alpha}\mathfrak{M}.\,{}^{\beta}\mathfrak{M} = (\beta - m + 1).\,{}^{\alpha-1}\overset{-1}{\mathfrak{M}}.\,{}^{\beta}\overset{-1}{\mathfrak{M}} + m.\,{}^{\alpha-1}\mathfrak{M}.\,{}^{\beta}\mathfrak{M}. $$

III. Man ſetze für m folgweiſe 1, 2, 3, etc. ſo iſt, nach der erſten Formel,

$$ 1.\,{}^{\alpha}\mathfrak{A}.\,{}^{\beta}\mathfrak{A} = \alpha.1.1 + 1.\,{}^{\alpha}\mathfrak{A}.\,{}^{\beta-1}\mathfrak{A} $$

$$ 2.\,{}^{\alpha}\mathfrak{B}.\,{}^{\beta}\mathfrak{B} = (\alpha-1).\,{}^{\alpha}\mathfrak{A}.\,{}^{\beta-1}\mathfrak{A} + 2.\,{}^{\alpha}\mathfrak{B}.\,{}^{\beta-1}\mathfrak{B} $$

$$ 3.\,{}^{\alpha}\mathfrak{C}.\,{}^{\beta}\mathfrak{C} = (\alpha-2).\,{}^{\alpha}\mathfrak{B}.\,{}^{\beta-1}\mathfrak{B} + 3.\,{}^{\alpha}\mathfrak{C}.\,{}^{\beta-1}\mathfrak{C} $$

$$ 4.\,{}^{\alpha}\mathfrak{D}.\,{}^{\beta}\mathfrak{D} = (\alpha-3).\,{}^{\alpha}\mathfrak{C}.\,{}^{\beta-}\mathfrak{C} + 4.\,{}^{\alpha}\mathfrak{D}.\,{}^{\beta-1}\mathfrak{D} $$

. . .

. . .

. . .

. . .

$$(m-1).\, {}^{\alpha}\overset{-1}{\mathfrak{M}}.\, {}^{\beta}\overset{-1}{\mathfrak{M}} = (\alpha - m + 2).\, {}^{\alpha}\overset{-2}{\mathfrak{M}}.\, {}^{\beta-1}\overset{-2}{\mathfrak{M}} + (m-1).\, {}^{\alpha}\overset{-1}{\mathfrak{M}}.\, {}^{\beta-1}\overset{-1}{\mathfrak{M}}.$$

$$m.\, {}^{\alpha}\mathfrak{M}.\, {}^{\beta}\mathfrak{M} = (\alpha - m + 1).\, {}^{\alpha}\overset{-1}{\mathfrak{M}}.\, {}^{\beta-1}\overset{-1}{\mathfrak{M}} + m.\, {}^{\alpha}\mathfrak{M}.\, {}^{\beta-1}\mathfrak{M}.$$

IV. Die Summe der Theile linker Hand bezeichne man durch S, ſo iſt, wenn rechter Hand der erſte Theil jedes Gliedes mit dem zweyten des vorhergehenden zuſammen genommen wird,

$$S = \alpha(1.1 + {}^{\alpha}\mathfrak{A}.{}^{\beta-1}\mathfrak{A} + {}^{\alpha}\mathfrak{B}.\, {}^{\beta-1}\mathfrak{B} + {}^{\alpha}\mathfrak{C}.\, {}^{\beta-1}\mathfrak{C} \ldots\ldots + {}^{\alpha}\overset{-1}{\mathfrak{M}}.\, {}^{\beta-1}\overset{-1}{\mathfrak{M}}) + m.\, {}^{\alpha}\mathfrak{M}.\, {}^{\beta-1}\mathfrak{M}.$$

V. Aus der zweyten Formel in II. welche aus der erſten durch Vertauſchung von α und β entſteht, iſt auf dieſelbe Art.

$$S = \beta(1.1 + {}^{\alpha-1}\mathfrak{A}.\, {}^{\beta}\mathfrak{A} + {}^{\alpha-1}\mathfrak{B}.\, {}^{\beta}\mathfrak{B} + {}^{\alpha-1}\mathfrak{C}.\, {}^{\beta}\mathfrak{C} \ldots\ldots + {}^{\alpha-1}\overset{-1}{\mathfrak{M}}.\, {}^{\beta}\overset{-1}{\mathfrak{M}}) + m.\, {}^{\alpha-1}\mathfrak{M}.\, {}^{\beta}\mathfrak{M}.$$

VI. Man nehme α und β für ganze poſitive Zahlen, damit die Reihe der Coefficienten irgendwo abbreche, laſſe β die größere Zahl bedeuten, und ſetze $m = \alpha$. Es iſt alsdann ${}^{\alpha}\mathfrak{M} = 1$, und ${}^{\alpha-1}\mathfrak{M} = 0$ (11.). Nun geben die beiden gleichen Werthe von S die Gleichung,

$$1.1 + {}^{\alpha}\mathfrak{A}.\, {}^{\beta-1}\mathfrak{A} + {}^{\alpha}\mathfrak{B}.\, {}^{\beta-1}\mathfrak{B} + {}^{\alpha}\mathfrak{C}.\, {}^{\beta-1}\mathfrak{C} \ldots\ldots + {}^{\alpha}\overset{-1}{\mathfrak{M}}.\, {}^{\beta-1}\overset{-1}{\mathfrak{M}} + {}^{\alpha}\mathfrak{M}.\, {}^{\beta-1}\mathfrak{M}$$

$$= \frac{\beta}{\alpha}(1.1 + {}^{\alpha-1}\mathfrak{A}.\, {}^{\beta}\mathfrak{A} + {}^{\alpha-1}\mathfrak{B}.\, {}^{\beta}\mathfrak{B} + {}^{\alpha-1}\mathfrak{C}.\, {}^{\beta}\mathfrak{C} \ldots\ldots\ldots {}^{\alpha-1}\overset{-1}{\mathfrak{M}}.\, {}^{\beta}\overset{-1}{\mathfrak{M}}).$$

VII. Die Reihe in dem zweyten Theile der Gleichung enthält ein Glied weniger als die Reihe in dem erſten Theile. Nun kann man ſtatt der Reihe in dem zweyten Theile eine Reihe ſetzen, die noch einen Theil weniger enthält, und ſo fortfahren, bis daß man auf eine eintheilige

Größe kommt, und dadurch die Summe der Reihe in dem erſten Theile erhält. Es iſt nämlich, wenn $\alpha-1$ ſtatt α, und β ſtatt $\beta-1$ geſetzt wird.

$$1.1 + {}^{\alpha-1}\mathfrak{A}.\,{}^{\beta}\mathfrak{A} \ldots + {}^{\alpha-1}\overset{-1}{\mathfrak{M}}.\,{}^{\beta}\overset{-1}{\mathfrak{M}}$$

$$= \frac{\beta+1}{\alpha-1}\,(1.1 + {}^{\alpha-2}\mathfrak{A}.\,{}^{\beta+1}\mathfrak{A} \ldots$$

$$\ldots + {}^{\alpha-2}\overset{-2}{\mathfrak{M}}.\,{}^{\beta+1}\overset{-2}{\mathfrak{M}});$$

und auf ähnliche Art

$$1.1 + {}^{\alpha-2}\mathfrak{A}.\,{}^{\beta+1}\mathfrak{A} \ldots + {}^{\alpha-2}\overset{-2}{\mathfrak{M}}.\,{}^{\beta+1}\overset{-2}{\mathfrak{M}})$$

$$= \frac{\beta+2}{\alpha-2}\,(1.1 + {}^{\alpha-3}\mathfrak{A}.\,{}^{\beta+2}\mathfrak{A} \ldots$$

$$\ldots + {}^{\alpha-3}\overset{-3}{\mathfrak{M}}.\,{}^{\beta+2}\overset{-3}{\mathfrak{M}}).\ \text{u. ſ. f.}$$

wobey zu bemerken iſt, daß ${}^{\alpha-r}\overset{-r}{\mathfrak{M}} = 1$, und ${}^{\alpha-r}\overset{-r+1}{\mathfrak{M}} = 0$ iſt, weil jenes der $(m-r)$te, das iſt, nach der Annahme in VI. $(\alpha-r)$te Coefficient in der Potenz mit dem Exponenten $\alpha-r$, folglich $=1$, und der folgende, der $(m-r+1)$te $=0$ iſt.

VIII. Folglich iſt

$$1.1 + {}^{\alpha}\mathfrak{A}.\,{}^{\beta-1}\mathfrak{A} \ldots + {}^{\alpha}\mathfrak{M}.\,{}^{\beta-1}\mathfrak{M}$$

$$= \frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\beta+1}{\alpha-1}\cdot\frac{\beta+2}{\alpha-2}\cdots\frac{\beta+r-1}{\alpha-r+1}$$

$$(1.1 + {}^{\alpha-r}\mathfrak{A}.\,{}^{\beta+r-1}\mathfrak{A} \ldots + {}^{\alpha-r}\overset{-r}{\mathfrak{M}}.\,{}^{\beta+r-1}\overset{-r}{\mathfrak{M}})$$

IX. Wenn $r=\alpha$, ſo wird der vieltheilige Factor $=1.1$, da ${}^{0}\mathfrak{A}=0$ iſt, und es iſt die Summe der Reihe

$$1.1 + {}^{\alpha}\mathfrak{A}.\,{}^{\beta-1}\mathfrak{A} + {}^{\alpha}\mathfrak{B}.\,{}^{\beta-1}\mathfrak{B} + {}^{\alpha}\mathfrak{C}.\,{}^{\beta-1}\mathfrak{C} \ldots$$

$$\ldots + {}^{\alpha}\overset{-1}{\mathfrak{M}}.\,{}^{\beta-1}\overset{-1}{\mathfrak{M}} + {}^{\alpha}\mathfrak{M}.\,{}^{\beta-1}\mathfrak{M}$$

$$= \frac{\beta.\beta+1.\beta+2\ldots\beta+\alpha-1}{\alpha.\alpha-1.\alpha-2\ldots\ldots 1} = {}^{\alpha+\beta-1}\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}}.$$

Es iſt nämlich der Coefficient in der Stelle α der $(\alpha - 1)$te nach dem erſten, A.

X. Setzt man β ſtatt $\beta - 1$, ſo iſt

$$1.1 + {}^{\alpha}\mathfrak{A}.{}^{\beta}\mathfrak{A} + {}^{\alpha}\mathfrak{B}.{}^{\beta}\mathfrak{B} + {}^{\alpha}\mathfrak{C}.{}^{\beta}\mathfrak{C} \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + {}^{\alpha}\overset{-1}{\mathfrak{M}}.{}^{\beta}\overset{-1}{\mathfrak{M}} + {}^{\alpha}\mathfrak{M}.{}^{\beta}\mathfrak{M} = {}^{\alpha+\beta}\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}},$$

dem Coefficienten in der $(\alpha + \beta)$ten Potenz, deſſen Stellenzahl α iſt.

17. Es ſey $\alpha = \beta$, ſo iſt

$$1^2 + ({}^{\alpha}\mathfrak{A})^2 + ({}^{\alpha}\mathfrak{B})^2 + ({}^{\alpha}\mathfrak{C})^2 \ldots\ldots 1^2 = {}^{2\alpha}\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}},$$

das iſt dem mittelſten Coefficienten in der Potenz mit dem Exponenten 2α.

18. Aus dem Werthe des mittelſten Coefficienten in $(a+b)^{2\alpha}$, der in (13.) gefunden iſt, wird

$$1^2 + ({}^{\alpha}\mathfrak{A})^2 + ({}^{\alpha}\mathfrak{B})^2 + ({}^{\alpha}\mathfrak{C})^2 \ldots + 1^2$$

$$= \frac{1.3.5\ldots 2\alpha - 1}{2.4.6\ldots 2\alpha} \times 2^{2\alpha}.$$

20. Exempel. Es ſey $\alpha = 6$; $\beta = 10$, ſo iſt

$$1.1 + 6.10 + 15.45 + 20.120 + 15.210 + 6.252$$

$$+ 1.210 = 8008 = \frac{16.15.14.13.12.11}{1.2.3.4.5.6}.$$

Iſt $\alpha = 6$, $\beta = 6$, ſo iſt $1.1 + 6.6 + 15.15 + 20.20 + 15.15 + 6.6 + 1.1 = 924$

$$= \frac{12.11.10.9.8.7}{1.2.3.4.5.6}.$$

21. Den merkwürdigen Satz (18) von der Summe der Quadrate der Binomial-Coefficienten hat la Grange zufälliger Weiſe gefunden. Er fand nämlich für eine gewiſſe Wahrſcheinlichkeit zuerſt den einen, und für dieſelbe Wahrſcheinlichkeit auch den andern Ausdruck, woraus er ihre Gleichheit ſchloß, Mêlanges de la Soc. de Turin. T. V.

Euler hat in den Actis Petrop. a. a. 1781. de mirabilibus proprietatibus unciarum binomii einen Beweis gegeben, der von dem meinigen verſchieden iſt Doch ſagt er wiederholt, daß er keinen directen Weg ſähe, den Satz darzuthun. Mich däucht, der hier gegebene Beweis ſey ein directer, da er unmittelbar von den Eigenſchaften der Binomial-Coefficienten ausgeht. — Man vergleiche noch Buzengeiger von einigen merkwürdigen Eigenſchaften der Binomial-Coefficienten Archiv der Mathemat. 2. Bd. S. 161. Auch Arbogaſt Calcul des dérivations. nr. 434.

22. Zweytens multiplicire man je zwey Coefficienten aus den beiden Reihen (18.), in entgegengeſetzter Folge genommen, in einander. Es ſey der eine $= {}^{\alpha}\mathfrak{M}$; der andere ${}^{\beta}\mathfrak{N}$, ſo daß die Summe ihrer Stellenzahlen $= m + n =$ conſt. ſey. Die Stelle von ${}^{\alpha}\mathfrak{A}$ und von ${}^{\beta}\mathfrak{A}$ iſt die erſte, ſo daß 0 die Stellenzahl für 1 in beiden Reihen bezeichnet.

I. Da $m. {}^{\alpha}\mathfrak{M} = (\alpha - m + 1). {}^{\alpha}\overset{-1}{\mathfrak{M}}$ und $n. {}^{\beta}\mathfrak{N} = (\beta - n + 1). {}^{\beta}\overset{-1}{\mathfrak{N}}$ iſt (8.), ſo iſt $(m + n). {}^{\alpha}\mathfrak{M}. {}^{\beta}\mathfrak{N} = (\alpha - m + 1). {}^{\alpha}\overset{-1}{\mathfrak{M}}. {}^{\beta}\mathfrak{N} + (\beta - n + 1). {}^{\alpha}\mathfrak{M}. {}^{\beta}\overset{-1}{\mathfrak{N}}$.

II. Man ſetze folgweiſe für m die Werthe $0, 1, 2, 3 \ldots n - 1, n$; und für n folgweiſe $n, n - 1, n - 2, n - 3 \ldots 1, 0$, ſo iſt

$$
\begin{array}{llll}
n. \; 1. \; {}^{\beta}\mathfrak{N} & = & & + (\beta - n + 1). \; 1. \; {}^{\beta}\overset{-1}{\mathfrak{N}} \\
n. \; {}^{\alpha}\mathfrak{A}. \; {}^{\beta}\overset{-1}{\mathfrak{N}} & = & \alpha. \; 1. \; {}^{\beta}\overset{-1}{\mathfrak{N}} & + (\beta - n + 2). \; {}^{\alpha}\mathfrak{A}. \; {}^{\beta}\overset{-2}{\mathfrak{N}} \\
n. \; {}^{\alpha}\mathfrak{B}. \; {}^{\beta}\overset{-2}{\mathfrak{N}} & = & (\alpha - 1). \; {}^{\alpha}\mathfrak{A}. \; {}^{\beta}\overset{-2}{\mathfrak{N}} & + (\beta - n + 3). \; {}^{\alpha}\mathfrak{B}. \; {}^{\beta}\overset{-3}{\mathfrak{N}} \\
n. \; {}^{\alpha}\mathfrak{C}. \; {}^{\beta}\overset{-3}{\mathfrak{N}} & = & (\alpha - 2). \; {}^{\alpha}\mathfrak{B}. \; {}^{\beta}\overset{-3}{\mathfrak{N}} & + (\beta - n + 4). \; {}^{\alpha}\mathfrak{C}. \; {}^{\beta}\overset{-4}{\mathfrak{N}} \\
\vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

$$n.\ {}^{\alpha}\overset{-1}{\mathfrak{N}}.\ {}^{\beta}\overset{-n+1}{\mathfrak{N}} = (\alpha - n + 2).\ {}^{\alpha}\overset{-2}{\mathfrak{N}}.\ {}^{\beta}\overset{-n+1}{\mathfrak{N}} + \beta.\ {}^{\alpha}\overset{-1}{\mathfrak{N}}.\ {}^{\beta}\overset{-n}{\mathfrak{N}}$$

$$n.\ {}^{\alpha}\mathfrak{N}.\ {}^{\beta}\overset{-n}{\mathfrak{N}} = (\alpha - n + 1).\ {}^{\alpha}\overset{-n}{\mathfrak{N}}.\ {}^{\beta}\overset{-1}{\mathfrak{N}}$$

III. Da ${}^{\beta}\overset{-n}{\mathfrak{N}}$ das nte Glied vor dem nten iſt, ſo iſt dieſer Ausdruck $= 1$. Daher iſt ${}^{\beta}\overset{-n+1}{\mathfrak{N}} = {}^{\beta}\mathfrak{A}$. als das (n—1)te Glied vor dem nten. Ferner ${}^{\beta}\overset{-n+2}{\mathfrak{N}} = {}^{\beta}\mathfrak{B}$. u. ſ. f.

IV. Addirt man nun aus allen Gleichungen in (II.) die Theile linker Hand, und ebenfalls die Theile rechter Hand, ſo entſtehen daraus folgende beide gleichen Reihen:

$$1.\ {}^{\beta}\mathfrak{N} + {}^{\alpha}\mathfrak{A}.\ {}^{\beta}\overset{-1}{\mathfrak{N}} + {}^{\alpha}\mathfrak{B}.\ {}^{\beta}\overset{-2}{\mathfrak{N}} + {}^{\alpha}\mathfrak{C}.\ {}^{\beta}\overset{-3}{\mathfrak{N}} \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + {}^{\alpha}\overset{-1}{\mathfrak{N}}.\ {}^{\beta}\mathfrak{A} + {}^{\alpha}\mathfrak{N}.\ 1 =$$

$$\frac{\alpha + \beta - n + 1}{n} \left(1.\ {}^{\beta}\overset{-1}{\mathfrak{N}} + {}^{\alpha}\mathfrak{A}.\ {}^{\beta}\overset{-2}{\mathfrak{N}} + {}^{\alpha}\mathfrak{B}.\ {}^{\beta}\overset{-3}{\mathfrak{N}} + {}^{\alpha}\mathfrak{C}.\ {}^{\beta}\overset{-4}{\mathfrak{N}} \ldots\ldots + {}^{\alpha}\overset{-2}{\mathfrak{N}}.\ {}^{\beta}\mathfrak{A} + {}^{\alpha}\overset{-1}{\mathfrak{N}}.\ 1\right)$$

V. Die Reihe in dem zweyten Theile der Gleichung läßt ſich in eine Reihe verwandeln, die ein Glied weniger, als jene hat, ſo wie dieſelbe ein Glied weniger enthält, als die Reihe in dem erſten Theile. Es iſt nämlich, wenn n — 1 ſtatt n geſetzt wird,

$$1.\ {}^{\beta}\overset{-1}{\mathfrak{N}} + {}^{\alpha}\mathfrak{A}.\ {}^{\beta}\overset{-2}{\mathfrak{N}} \ldots + {}^{\alpha}\overset{-2}{\mathfrak{N}}.\ {}^{\beta}\mathfrak{A} + {}^{\alpha}\overset{-1}{\mathfrak{N}}.\ 1$$

$$= \frac{\alpha + \beta - n + 2}{n - 1} \left(1.\ {}^{\beta}\overset{-2}{\mathfrak{N}} + {}^{\alpha}\mathfrak{A}\ {}^{\beta}\overset{-3}{\mathfrak{N}} \ldots + {}^{\alpha}\overset{-2}{\mathfrak{N}}.\ 1\right).$$

Ferner, wenn n — 2 ſtatt n geſetzt wird,

$$1.\ {}^{\beta}\overset{-2}{\mathfrak{N}} + {}^{\alpha}\mathfrak{A}.\ {}^{\beta}\overset{-3}{\mathfrak{N}} \ldots\ldots + {}^{\alpha}\overset{-3}{\mathfrak{N}}.\ {}^{\beta}\mathfrak{A} + {}^{\alpha}\overset{-2}{\mathfrak{N}}.\ 1$$

$$= \frac{\alpha + \beta - n + 3}{n - 2} \left(1.\ {}^{\beta}\overset{-3}{\mathfrak{N}} + {}^{\alpha}\mathfrak{A}.\ {}^{\beta}\overset{-4}{\mathfrak{N}} \ldots + {}^{\alpha}\overset{-3}{\mathfrak{N}}.\ 1\right)$$

u. ſ. f.

VI. Demnach iſt

$$1.\,{}^{\beta}\mathfrak{N} + {}^{\alpha}\mathfrak{A}.\,{}^{\beta}\overset{-1}{\mathfrak{N}} \ldots + {}^{\alpha}\overset{-1}{\mathfrak{N}}.\,{}^{\beta}\mathfrak{A} + {}^{\alpha}\mathfrak{N}.\,1$$

$$= \frac{\alpha+\beta-n+1}{n} \cdot \frac{\alpha+\beta-n+2}{n-1} \cdot \frac{\alpha+\beta-n+3}{n-2} \ldots$$

$$\ldots \times \frac{\alpha+\beta-n+r}{n-r+1}\left(1.\,{}^{\beta}\overset{-r}{\mathfrak{N}} + {}^{\alpha}\mathfrak{A}.\,{}^{\beta}\overset{-r-1}{\mathfrak{N}} \ldots + {}^{\alpha}\overset{-r}{\mathfrak{N}}.\,1\right).$$

VII. Es ſey $r = n$, ſo iſt ${}^{\beta}\overset{-r}{\mathfrak{N}} = 1$, und ${}^{\beta}\overset{-r-1}{\mathfrak{N}} = 0$, alſo

$$1.\,{}^{\beta}\mathfrak{N} + {}^{\alpha}\mathfrak{A}.\,{}^{\beta}\overset{-1}{\mathfrak{N}} + {}^{\alpha}\mathfrak{B}.\,{}^{\beta}\overset{-2}{\mathfrak{N}} + {}^{\alpha}\mathfrak{C}.\,{}^{\beta}\overset{-3}{\mathfrak{N}}$$

$$\ldots + {}^{\alpha}\overset{-1}{\mathfrak{N}}.\,{}^{\beta}\mathfrak{A} + {}^{\alpha}\mathfrak{N}.\,1 =$$

$$\frac{\alpha+\beta-n+1}{n} \cdot \frac{\alpha+\beta-n+2}{n-1} \cdot \frac{\alpha+\beta-n+3}{n-2} \ldots$$

$$\ldots \times \frac{\alpha+\beta}{1}.$$

$= {}^{\alpha+\beta}\mathfrak{N}$, dem nten Coefficienten in $(a+b)^{\alpha+\beta}$.

23. Exempel. Es ſey $\alpha = 10$; $\beta = 8$; $n = 6$, ſo iſt $1.28 + 10.56 + 45.70 + 120.56 + 210.28 + 252.8 + 210.1 = 18564$

$$= \frac{18.\,17.\,16.\,15.\,14.\,13}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6}.$$

24. Der Satz iſt ſehr wichtig, weil darauf der kürzeſte und einleuchtendſte Beweis des binomiſchen Lehrſatzes in ſeiner Allgemeinheit gegründet wird. Es darf hier unter α und β jede Art von Zahl verſtanden werden, ganze oder gebrochne, poſitive oder negative, weil die Formeln, woraus der Satz hergeleitet iſt, für alle Arten von Zahlen gelten.

25. Man ſetze für n folgweiſe die Zahlen 1, 2, 3, etc ſo erhält man folgende Gleichungen:

$$1 \cdot {}^{\beta}\mathfrak{A} + {}^{\alpha}\mathfrak{A} \cdot 1 = {}^{\alpha+\beta}\mathfrak{A}$$

$$1 \cdot {}^{\beta}\mathfrak{B} + {}^{\alpha}\mathfrak{A} \cdot {}^{\beta}\mathfrak{A} + {}^{\alpha}\mathfrak{B} \cdot 1 = {}^{\alpha+\beta}\mathfrak{B}.$$

$$1 \cdot {}^{\beta}\mathfrak{C} + {}^{\alpha}\mathfrak{A} \cdot {}^{\beta}\mathfrak{B} + {}^{\alpha}\mathfrak{B} \cdot {}^{\beta}\mathfrak{A} + {}^{\alpha}\mathfrak{C} \cdot 1 = {}^{\alpha+\beta}\mathfrak{C}$$

$$1 \cdot {}^{\beta}\mathfrak{D} + {}^{\alpha}\mathfrak{A} \cdot {}^{\beta}\mathfrak{C} + {}^{\alpha}\mathfrak{B} \cdot {}^{\beta}\mathfrak{B} + {}^{\alpha}\mathfrak{C} \cdot {}^{\beta}\mathfrak{A} + {}^{\alpha}\mathfrak{D} \cdot 1 = {}^{\alpha+\beta}\mathfrak{D} \quad \text{u. ſ. f.}$$

Product zweyer Reihen, die aus den Binomialcoefficienten mit Potenzen einer unbeſtimmten Größe z verbunden, zuſammengeſetzt ſind.

26. Es werden die beiden Reihen:

$$1 + {}^{\alpha}\mathfrak{A}z + {}^{\alpha}\mathfrak{B}z^2 + {}^{\alpha}\mathfrak{C}z^3 + {}^{\alpha}\mathfrak{D}z^4 + \text{etc.} = M$$

und

$$1 + {}^{\beta}\mathfrak{A}z + {}^{\beta}\mathfrak{B}z^2 + {}^{\beta}\mathfrak{C}z^3 + {}^{\beta}\mathfrak{D}z^4 + \text{etc.} = N$$

in einander multiplicirt. Ihr Product werde durch P bezeichnet, und es ſey

$$M \times N = P = 1 + az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + ez^5 + \text{etc.}$$

Hier iſt zufolge der Formeln (25.)

$$a = {}^{\alpha+\beta}\mathfrak{A}\,;\ b = {}^{\alpha+\beta}\mathfrak{B}\,;\ c = {}^{\alpha+\beta}\mathfrak{C},$$

u. ſ. f. ſo daß

$$M \times N = 1 + {}^{\alpha+\beta}\mathfrak{A}z + {}^{\alpha+\beta}\mathfrak{B}z^2 + {}^{\alpha+\beta}\mathfrak{C}z^3 + {}^{\alpha+\beta}\mathfrak{D}z^4 + {}^{\alpha+\beta}\mathfrak{E}z^5 + \text{etc.}$$

Das Product der beiden Reihen M, N, hat dieſelbe Form, welche die Reihen haben, das iſt, die Coefficienten zu den Potenzen von z werden aus $\alpha + \beta$ auf dieſelbe Art zuſammen geſetzt, wie die Coefficienten in der Reihe M aus α, und in der Reihe N aus β, die Zahlen α und β mögen ganze oder gebrochne, poſitive oder negative ſeyn.

27. Man bezeichne die Reihen,

$$1 + {}^{\alpha}\mathfrak{A}z + {}^{\alpha}\mathfrak{B}z^2 + {}^{\alpha}\mathfrak{C}z^3 + \text{etc. durch } {}^{\alpha}S$$
$$1 + {}^{\beta}\mathfrak{A}z + {}^{\beta}\mathfrak{B}z^2 + {}^{\beta}\mathfrak{C}z^3 + \text{etc.} \ldots {}^{\beta}S$$
$$1 + {}^{\gamma}\mathfrak{A}z + {}^{\gamma}\mathfrak{B}z^2 + {}^{\gamma}\mathfrak{C}z^3 + \text{etc.} \ldots {}^{\gamma}S$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$1 + {}^{\mu}\mathfrak{A}z + {}^{\mu}\mathfrak{B}z^2 + {}^{\mu}\mathfrak{C}z^3 + \text{etc.} \ldots {}^{\mu}S.$$

ſo hat das Product aller dieſer Reihen dieſelbe Form, welche die einzelnen Reihen haben. Iſt $\alpha + \beta + \gamma \ldots + \mu = n$, ſo iſt

$${}^{\alpha}S.\ {}^{\beta}S.\ {}^{\gamma}S \ldots {}^{\mu}S = {}^{n}S.$$

28. Es ſey $\alpha = \beta = \gamma \ldots = \mu$, und $n = m\alpha$, ſo iſt $({}^{\alpha}S)^m = {}^{m\alpha}S$.

29. Daher iſt ${}^{\alpha}S = ({}^{n}S)^{\frac{1}{m}}$, wenn $\alpha = \frac{n}{m}$ iſt, es mag α eine gebrochne oder ganze Zahl ſeyn, weil der Satz (26.) auch für gebrochne gilt. Oder es iſt

$$({}^{n}S)^{\frac{1}{m}} = 1 + {}^{\frac{n}{m}}\mathfrak{A}z + {}^{\frac{n}{m}}\mathfrak{B}z^2 + {}^{\frac{n}{m}}\mathfrak{C}z^3 + \text{etc.}$$

woraus erhellt, daß ein gebrochner Exponent $\frac{n}{m}$ in den Coefficienten die Ausziehung der mten Wurzel aus der Reihe $1 + {}^{n}\mathfrak{A}z + {}^{n}\mathfrak{B}z^2 + {}^{n}\mathfrak{C}z^3 + \text{etc.}$ anzeigt.

30. Ein negativer Exponent der Reihe ${}^{-n}S$ zeigt die Diviſion von 1 durch ${}^{+n}S$ an. Denn es ſey m eine größere Zahl als n, ſo iſt ${}^{m}S = {}^{n}S.\ {}^{m-n}S$, alſo $\frac{{}^{m}S}{{}^{n}S} = {}^{m-n}S$. Die Form des Quotienten bleibt dieſelbe, wenn m kleiner als n iſt, alſo iſt ſie für einen negativen Exponenten noch diejenige, welche die Reihen ${}^{m}S$ und ${}^{n}S$ haben, wie in dem Falle da m größer als n iſt. Iſt $m = 0$, ſo iſt ${}^{0}S = 1$, und $\frac{1}{{}^{n}S} = {}^{-n}S$,

das iſt

$$\frac{1}{{}^{n}S} = 1 + {}^{-n}\mathfrak{A}z + {}^{-n}\mathfrak{B}z^2 + {}^{-n}\mathfrak{C}z^3 + \text{etc.}$$

wo die Coefficienten ihre Werthe aus (1.) erhalten, wenn n mit — n vertauſcht wird.

31. Den wichtigen Satz (26.) hat zuerſt Euler in den Comment. novis Petrop. T. XIX. a. a. 1774. (Demonſtratio Theorematis Newtoniani §. 7.) vorgetragen, aber den Beweis nur darauf gegründet, weil der Satz für ganze Zahlen α, β, gilt. Es iſt nämlich, bey dieſer Vorausſetzung,

$$(1+z)^{\alpha} = 1 + {}^{\alpha}\mathfrak{A}z + {}^{\alpha}\mathfrak{B}z^2 + {}^{\alpha}\mathfrak{C}z^3 + \text{etc.}$$
$$(1+z)^{\beta} = 1 + {}^{\beta}\mathfrak{A}z + {}^{\beta}\mathfrak{B}z^2 + {}^{\beta}\mathfrak{C}z^3 + \text{etc.}$$

und auch

$$(1+z)^{\alpha+\beta} = 1 + {}^{\alpha+\beta}\mathfrak{A}z + {}^{\alpha+\beta}\mathfrak{B}z^2 + \text{etc.}$$

Da nun $(1+z)^{\alpha} \times (1+z)^{\beta} = (1+z)^{\alpha+\beta}$ iſt, ſo hat das Product dieſelbe Form, welche die beiden Factoren haben. Da bey der Multiplication die Form des Products von der Größe unabhängig iſt, ſo ſchließt Euler, daß die Zuſammenſetzung des Products dieſelbe bleibe, von welcher Art auch die Zahlen α und β seyn mögen, und nennt dieſe Beweisart ein ratiocinium non vulgare.

Bald darauf hat Segner in den Mem. de Berlin a. 1777 den Satz durch wirkliche Multiplication dargethan, aber nur für die Coefficienten der ſechs erſten Potenzen von z.

L'Huilier in Genf hat auf demſelben Wege aber ſchärfer den Beweis geführt, die Coefficienten der fünf erſten Potenzen wirklich entwickelt, und darauf gezeigt, daß wenn das bey dieſen Coefficienten bemerkte Geſetz für den mten gilt, es auch für den (m + 1)ten gelte, daher allgemein ſey. Principiorum calculi different. et integr. expoſitio. Tubingae 1795. pag. V.

Die beſchwerliche Rechnung bey dieſem Verfahren hat Rothe durch den Gebrauch der auch hier angewandten Bezeichnungen der Binomial-Coefficienten und der Diſtanz-Exponenten vermieden. Theorema binomiale ex ſimpliciſſimis Anal. ſinit. fontibus univerſaliter demonſtratum. Lipſiae 1796. Dieſen Beweis habe ich hier mit einigen Veränderungen vorgetragen.

Früher ſchon hat Buſſe auf eine elementariſche Art mit weniger Rechnung durch eine geſchickte Schlußweiſe den Satz, daß das Product ${}^{m}S.\ {}^{n}S$ gleich und ähnlich iſt der Reihe ${}^{m+n}S$, erwieſen in ſeinen kleinen Beyträgen zur Mathematik und Phyſik, Deſſau 1785. St. 2. Die bequeme Bezeichnung, ${}^{m}S$, ſcheint von ihm zuerſt gebraucht zu ſeyn.

Einen andern Beweis des Euleriſchen Satzes von der Ähnlichkeit des Products mit den Factoren, $1 + {}^{\alpha}\mathfrak{A}z + \text{etc.}$ und $1 + {}^{\beta}\mathfrak{A}z + \text{etc.}$ hat Pfaff in einem Programm: Peculiaris differentialia inveſtigandi ratio ex theoria functionum deducta. Helmſtadii 1788. §. XII. angedeutet. Um die Kraft des Beweiſes völlig zu faſſen, muß man die Coefficienten von x^{μ} und $x^{\mu+1}$ ausführlich entwickeln.

Binomiſcher Lehrſatz (Theorema binomiale) iſt die analytiſche Formel, welche die Zuſammenſetzung einer Potenz des Binomium oder der zweytheiligen Größe, $a+b$, aus den beiden Theilen, a, b und dem Exponenten der Potenz darſtellt.

1. Es ſey der Exponens der Potenz $= n$, ſo iſt

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n.\,n-1}{1.\,2}\,a^{n-2}b^2$$

$$+ \frac{n.\,n-1\;n-2.}{1.\,2.\,3}\,a^{n-3}b^3 + \frac{n.\,n-1.\,n-2.\,n-3.}{1.\,2.\,3.\,4}\,a^{n-4}b^4$$

$$\ldots\ldots + \frac{n.\,n-1\ldots\ldots n-r+1.}{1.\,2.\,\ldots\ldots r}\,a^{n-r}b^r + \text{etc.}$$

Das rte unbeſtimmte Glied zeigt die allgemeine Form der Glieder an. Wenn b ſubtractiv iſt, ſo ändern die ungeraden Potenzen von b ihr Vorzeichen.

2. Die Formel iſt allgemein, es mag der Exponens n eine ganze oder gebrochne, eine poſitive oder negative Zahl ſeyn. Sie iſt eine der wichtigſten und ſchönſten in der Analyſis, und muß gleich in ihrem ganzen Umfange, für alle Arten von Exponenten, erwieſen werden, da ſie in der Allgemeinheit erſt ihre wichtigſte Anwendung hat. Doch iſt es nützlich, den Satz zuerſt für ganze Exponenten zu erweiſen, da der Beweis aus der Lehre von der Multiplication und von den Combinationen leicht geführt werden kann, und die deutliche Einſicht dieſes Falles die Formel in ihrer Allgemeinheit begreiflicher macht.

3. Das Product aus den zweytheiligen verſchiedenen Factoren $a + b$; $c + d$; $e + f$; $g + h$; etc. beſteht aus den Partialproducten je eines Theils aus jedem Factor. Iſt die Anzahl der Factoren $= n$, ſo beſteht jedes Partialproduct aus n eintheiligen verſchiedenen Factoren, und iſt nur ein einziges mahl vorhanden. Sind aber die Factoren einander gleich, ſo daß $a = c = e = g =$ etc., und $b = d = f = h =$ etc., ſo beſtehen die Partialproducte entweder aus n gleichen eintheiligen Factoren, a oder b; oder aus einer Anzahl gleicher, a, und einer Anzahl gleicher, b, zuſammen aus n Factoren. Die Partialproducte in dem letztern Falle kommen mehrmahls vor, weil ſie in die Stelle mehrerer Partialproducte für ungleiche Factoren treten; die beiden Partialproducte a^n, b^n kommen aber jedes nur einmahl vor, da ſie aus den einzigen Producten der erſten oder der zweyten Theile, $aceg\ldots$ oder $bdfh\ldots$ entſtehen.

4. Die verſchiedenen Arten der Partialproducte ſind demnach a^n; $a^{n-1}b$; $a^{n-2}b^2$; $a^{n-3}b^3$ ... ; $a^{n-r}b^r$, etc. wo auch b mit a vertauſcht werden kann.

5. Man unterſcheide die a der verſchiedenen Factoren durch beygeſetzte Ziffern, wie $a1$; $a2$, $a3$, etc. eben ſo die b durch $b1$, $b2$, $b3$, etc. Die Producte a^n und

b^n kommen jedes nur einmahl vor, wie ſchon bemerkt iſt, und wie es auch die Multiplication unmittelbar zeigt.

6. Das Product $a^{n-1}b$ kommt ſo oft vor, als oft es möglich iſt, $n-1$ Factoren aus den n Factoren $a1$, $a2$, $a3$, ... an, und einen Factor aus $b1$, $b2$, $b3$, ... bn zu nehmen. Zufolge der Lehre von den Combinationen (ſ. Combination, I.) iſt jene Anzahl $=$

$$\frac{n.n-1\ldots 2}{1.2\ldots n-1} = n. \text{ und dieſe } = \frac{n}{1}.$$

Beide ſind gleich, weil aus n Dingen $n-1$ ſo oft genommen werden können als eines.

Das Product $a^{n-2}b^2$ kommt ſo oft vor, als es möglich iſt, $n-2$ Factoren aus der Reihe $a1$, $a2$ .. an. und 2 Factoren aus der Reihe $b1$, $b2$ .. bn zu nehmen,

das iſt $\frac{n.\,n-1.}{1.\,2}$ mahl.

Das Product $a^{n-3}b^3$ kommt ſo oft vor, als ſich $n-3$ Factoren aus der Reihe $a1$, $a2$ ... an, und 3 Factoren aus $b1$, $b2$ ... bn nehmen laſſen, alſo

$\frac{n.\,n-1.\,n-2.}{1\;\;2.\;\;3}$ mahl.

7. Allgemein: das Product $a^{n-r}b^r$ kommt ſo oft vor, als ſich $n-r$ Faktoren aus der Reihe $a1$, $a2$ .. an, und r Factoren aus der Reihe $b1$, $b2$. bn nehmen laſſen, das iſt $\frac{n.n-1\ldots n-r+1.}{1.\,2\ldots r}$ mahl.

Folglich iſt, wenn n eine ganze Zahl bedeutet, die Formel für $(a+b)^n$ erwieſen. Die Reihe bricht ab, wenn $r=n$ iſt, oder mit dem $(r+1)$ten Gliede, welches

iſt $= \frac{n.n-1\ldots n-n+1}{1.\,2\ldots n}\, a^{n-n}\, b^n = b^n$;

Eine Tafel der Werthe dieſer Coefficienten für $n = 1$ bis 12 iſt in dem Artikel: Binomial-Coefficienten (4.) anzutreffen.

8. Daß die für ganze Exponenten der Potenz, $(a + b)^n$, gefundene entwickelte Form auch für gebrochne poſitive, und für negative, ſeyn ſie ganze oder gebrochne, gelte, mag man ohne Rechnung folgendergeſtalt erweiſen.

I. Der Ausdruck, $(a + b)^{\frac{n}{m}}$, mit einem poſitiven Exponenten, bedeutet ein in der geometriſchen Reihe, $1 : (a + b)^1 ; (a + b)^2 : (a + b)^3 :$ etc. irgendwo eingeſchaltetes Glied. Es ſey $n = mp + q$, wo p eine ganze Zahl oder Null, und q eine ganze Zahl, kleiner als m bedeutet, ſo daß $\frac{n}{m} = p + \frac{q}{m}$ iſt. Alsdann iſt $(a + b)^{\frac{n}{m}}$ ein zwiſchen $(a + b)^p$ und $(a + b)^{p+1}$ eingeſchaltetes Glied, und von $m - 1$ Gliedern, die unter ſich und mit jenen beiden in geometriſcher Fortſchreitung ſtehen, dasjenige, deſſen Stelle nach $(a + b)^p$ durch q angegeben wird. Die interpolirte Reihe iſt

$$1 : (a + b)^{\frac{1}{m}} : (a + b)^{\frac{2}{m}} : (a + b)^{\frac{3}{m}} : \text{etc.}$$

deren Glieder nach demſelben Geſetze, wie die Glieder der urſprünglichen Reihe gebildet werden. In den entwickelten Werthen der ganzen Potenzen ſchalte man nun ebenfalls zwiſchen je zweyen ſolchen Werthen $m - 1$ Glieder ein. Dieſes heißt, die eingeſchalteten Glieder nach demſelben Geſetze wie jene bilden. Das Geſetz betrifft theils die Producte aus den Factoren a und b, theils die Coefficienten derſelben. Da $(a + b)^n = a^n \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n$, ſo iſt auch $(a + b)^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{n}{m}} \left(1 + \frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{m}}$, und die Entwickelung der gebrochenen Potenz enthält eben

ſo den Factor $a^{\frac{n}{m}}$, wie der von $(a+b)^n$ den Factor a^n. Folglich hat man für den Factor $a^{n-r}b^r$, das iſt, $a^n.\frac{b^r}{a^r}$, nur zu ſetzen $a^{\frac{n}{m}}.\frac{b^r}{a^r}$, oder $a^{\frac{n}{m}-r}b^r$, weil der zweyte Factor dieſes Products von der Stelle des eingeſchalteten Gliedes nicht abhängt. Die Coefficienten werden theils durch ihre Stelle r in der entwickelten Reihe, theils durch die Stelle n des Gliedes $(a+b)^n$ in der geometriſchen Reihe beſtimmt. Setzt man auch hier für n die Stelle des eingeſchalteten Gliedes, ſo wird die entwikkelte Reihe für das eingeſchaltete Glied nach demſelben Geſetze wie für ein Glied der urſprünglichen Reihe gebildet, und jene Reihe gilt für jenes Glied, das iſt, für $(a+b)^{\frac{n}{m}}$, eben ſo wie dieſe Reihe für ein Glied mit einem ganzen Exponenten.

II. Die Potenzen von $(a+b)$ mit negativen ganzen Exponenten, $(a+b)^{-n}\left(=\frac{1}{(a+b)^n}\right)$, werden in der rückwärts fortgeſetzten geometriſchen Reihe, nach demſelben Geſetze, wie die Potenzen $(a+b)^n$ mit bejahten Exponenten gebildet. Da $(a+b)^{-n}$ $=a^{-n}\left(1+\frac{b}{a}\right)^{-n}$, ſo hat man in der entwikkelten Reihe erſtlich für $a^{n-r}b^r$ oder $a^n.\frac{b^r}{a^r}$ zu ſetzen $a^{-n}.\frac{b^r}{a^r}$ oder $a^{-n-r}.b^r$. Setzt man in dem Coefficienten $-n$ ſtatt n, ſo entſtehen dadurch Größen, die ſich auf die durch $-n$ bezeichneten Stellen eben ſo beziehen, wie jene auf die poſitiven Stellen. Die Vertauſchung von $+n$ mit $-n$ in dem Werthe von $(a+b)^n$ giebt daher eben das Glied, welches durch $(a+b)^{-n}$ bedeutet wird.

III. Der Ausdruck, $(a+b)^{-\frac{n}{m}}$ bedeutet ein in der Reihe $1:(a+b)^{-1}:(a+b)^{-2}$: etc. eingeſchaltetes Glied, deſſen Stelle durch $-\frac{n}{m}$ bezeichnet wird, wie die Stelle von $(a+b)^{\frac{n}{m}}$ durch $+\frac{n}{m}$. So wie nun der Werth des letztern erhalten wird dadurch, daß in dem Werthe von $(a+b)^n$ für n geſetzt wird $\frac{n}{m}$, ſo wird auch der Werth von $(a+b)^{-\frac{n}{m}}$ aus dem von $(a+b)^{-n}$ erhalten, wenn $-n$ mit $-\frac{n}{m}$ vertauſcht wird, alſo aus dem von $(a+b)^n$ durch Vertauſchung von n mit $-\frac{n}{m}$.

9. Es iſt aber auch der Mühe werth, die Allgemeinheit des binomiſchen Lehrſatzes durch eine analytiſche Rechnung darzuthun, um einzuſehen, wie er aus der Natur der Binomial-Coefficienten folget. Hiebey wollen wir die Form $(a+b)^n$ mit der $(1+z)^n$ der Bequemlichkeit wegen vertauſchen. Es iſt

$(a+b)^n = a^n \left(1+\frac{b}{a}\right)^n$. Setzt man $\frac{b}{a}=z$, ſo iſt $(a+b)^n = a^n(1+z)^n$, und es iſt nur nöthig in der Entwickelung von $(1+z)$ für z zu ſetzen $\frac{b}{a}$, und die Reihe mit a^n zu multipliciren, um die Entwickelung von $(a+b)^n$ zu erhalten.

10. Satz. Es iſt, wenn n, m ganze poſitive Zahlen bedeuten, $(1+z)^{\frac{n}{m}} =$

$$1 + \frac{n}{m} z + \frac{n.n - m.}{m.\ 2m} z^2 + \frac{n.n-m.n-2m.}{m.\ 2m.\ 3m} z^2$$

$$+ \frac{n \ldots n - 3m}{m \ldots 4m} z^4 \ldots\ldots + \frac{n(n-m)\ldots\ldots(n-(r-1)m)}{m.\ 2m\ \ldots\ldots\ rm} z^r$$

$$+ \text{ etc.}$$

Bew. Es ſeyn ${}^{\frac{n}{m}}\mathfrak{A}$, ${}^{\frac{n}{m}}\mathfrak{B}$, ${}^{\frac{n}{m}}\mathfrak{C}$, etc. Größen von der Form, wie die in dem Artikel: Binomial-Coefficienten, (1.) auf dieſe Weiſe bezeichneten, indem anſtatt des einfachen Symbols n hier ein zuſammengeſetztes $\frac{n}{m}$ genommen wird. Auch ſey ${}^{n}S = 1 + {}^{n}\mathfrak{A}z^2 + {}^{n}\mathfrak{B}z^2 + {}^{n}\mathfrak{C}z^3 +$ etc. Es iſt a. a. O. (29.) erwieſen, daß $({}^{n}S)^{\frac{1}{m}} = 1 + {}^{\frac{n}{m}}\mathfrak{A}z + {}^{\frac{n}{m}}\mathfrak{B}z^2 + {}^{\frac{n}{m}}\mathfrak{C}z^3 +$ etc. Nun iſt ${}^{n}S = (1+z)^n$. Folglich iſt

$$(1+z)^{\frac{n}{m}} = 1 + {}^{\frac{n}{m}}\mathfrak{A}z + {}^{\frac{n}{m}}\mathfrak{B}z^2 + {}^{\frac{n}{m}}\mathfrak{C}z^3 + \text{ etc.}$$

Multiplicirt man nun in den Werthen der Coefficienten von z jeden Factor des Zählers und Nenners durch m, ſo wird die in dem Satze aufgeſtellte Formel erhalten.

11. Satz. Es iſt $(1+z)^{-n}$ oder $\frac{1}{(1+z)^n} =$

$$1 - nz + \frac{n.n+1.}{1.\ z} z^2 - \frac{n.n+1.n+2.}{1.\ 2.\ 3} z^3$$

$$+ \frac{n \ldots n+3.}{1 \ldots 4} z^4 \ldots \pm \frac{n.n+1 \ldots n+r-1.}{1.\ 2\ \ldots\ r} z^r \mp \text{ etc.}$$

Bew. Es ſey ${}^{n}S = 1 + {}^{n}\mathfrak{A}z + {}^{n}\mathfrak{B}z^2 + {}^{n}\mathfrak{C}z^3$ + etc und ${}^{-n}S = 1 + {}^{-n}\mathfrak{A}z + {}^{-n}\mathfrak{B}z^2 + {}^{-n}\mathfrak{C}z^3$ + etc. ſo iſt $\frac{1}{{}^{n}S} = {}^{-n}S$, wie in dem Artickel, Binomial-Coefficienten, 30. erwieſen iſt. Es iſt aber ${}^{n}S = (1+z)^n$, und daher $\frac{1}{(1+z)^n}$ oder $(1+z)^{-n} = {}^{-n}S$. Setzt man nun für die Coefficienten in der

durch $-{}^{n}S$ bezeichneten Reihe ihre Werthe, ſo entſteht daraus die Formel des Satzes.

12. Satz. Es iſt $(1+z)^{-\frac{n}{m}} =$

$$1 - \frac{n}{m}z + \frac{n.\,n+m.}{m.\,2m}z^2 - \frac{n.\,n+m.\,n+2m.}{m.\,2m.\,3.m}.z^3$$

$$+ \frac{n\ldots n+3m.}{m\ldots 4m}z^4 \ldots \pm \frac{n.n+m\ldots(n+(r-1)m)}{m,\,2m\ldots rm}z^r$$

$\mp$ etc.

Der Beweis iſt dem in (11.) geführten ganz ähnlich. Denn für die Reihen $+{}^{n}S$ und $-{}^{n}S$ darf n auch eine gebrochne Zahl ſeyn, und es bleibt $\frac{1}{{}^{n}S} = {}^{-n}S$. Es iſt aber auch ${}^{n}S = (1+z)^n$, wenn n eine gebrochne Zahl iſt. Setzt man $\frac{n}{m}$ für n, ſo iſt $(1+z)^{-\frac{n}{m}}$ $= {}^{-\frac{n}{m}}S = 1 + {}^{-\frac{n}{m}}\mathfrak{A}z + {}^{-\frac{n}{m}}\mathfrak{B}z^2 + {}^{-\frac{n}{m}}\mathfrak{C}z^3$ + etc. woraus der Satz folgt.

13. Exempel I. $(1+z)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}z - \frac{1.1}{2.4}z^2$ $+ \frac{1.1.3}{2.4.6}z^3 - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}z^4 + \frac{1.1.3.5.7}{2.4.6.8.10}z^5 -$ etc.

II. $(1+2)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}z - \frac{1.2}{3.6}z^2 + \frac{1.2.5}{3.6.9}z^3$ $- \frac{1.2.5.8}{3.6.9.12}z^4 + \frac{1.2.5.8.11}{3.6.9.12.15}z^5 -$ etc.

III. $(1+z)^{\frac{2}{3}} = 1 + \frac{2}{3}z - \frac{2.1}{3.6}z^2 + \frac{2.1.4}{3.6.9}z^3$ $- \frac{2.1.4.7}{3.6.9.12}z^4 + \frac{2.1.4.7.10}{3.6.9.12.15}z^5 -$ etc.

$$\text{IV.}\ (1+z)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \tfrac{1}{2}z + \frac{1.3}{2.4}z^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}z^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}z^4 - \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}z^5 + \text{etc.}$$

$$\text{V.}\ (1+z)^{-\frac{1}{3}} = 1 - \tfrac{1}{3}z + \frac{1.4}{3.6}z^2 - \frac{1.4.7}{3.6.9}z^3 + \frac{1.4.7.10}{3.6.9.12}z^4 - \frac{1.4.7.10.13}{3.6.9.12.15}z^5 + \text{etc.}$$

14. Die Logarithmen der zehn erſten Coefficienten für die Exponenten, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3}$ ſind folgende.

	$\frac{n}{m} = \frac{1}{2}$	$n = -\frac{1}{2}$
log A	9, 6989700	9, 6989700
l. B	9, 0969100	9, 5740313
l. C	8, 7958800	9, 4948500
l. D	8, 5917601	9, 4368581
l. E	8, 4368581	9, 3911005
l. F	8, 3119193	9, 3533120
l. G	8, 2071840	9, 3211272
l. H	8, 1170073	9, 2930986
l. I	8, 0378261	9, 2682751
l. K	7, 9672450	9, 2459985

	$\frac{n}{m} = \frac{1}{3}$	$\frac{n}{m} = -\frac{1}{3}$
log 𝔄	9, 5228787	9, 5228787
l. 𝔅	9, 0457575	9, 3467875
l. ℭ	8, 7904849	9, 2376431
l. 𝔇	8, 6143936	9, 1584617
l. 𝔈	8, 4796952	9, 0963138
l. 𝔉	8, 3705506	9, 0451616
l. 𝔊	8, 2787804	9, 0016957
l. ℌ	8, 1995990	8, 9639071
l. ℑ	8, 1299632	8, 9304834
l. 𝔎	8, 0678152	8, 9005202

Dieſe Logarithmen ſind nicht aus den Logarithmen der Factoren in den Coefficienten zuſammengeſetzt, ſondern aus ihren numeriſchen hinlänglich genau berechneten Werthen gefunden.

15. Um aus einer ganzen Zahl N die mte Wurzel zu ziehen, zerlege man ſie in zwey ganze Theile, deren erſterer ſey $= a^m$, der zweyte $= b$, ſo daß a^m der Zahl N möglichſt nahe komme, und $N = a^m + b$, oder auch $N = a^m - b$ ſey. Man ſetze $\frac{b}{a^m} = z$, ſo iſt $N = a^m(1+z)$, wenn b additiv iſt, und $N^{\frac{1}{m}} = a\,(1+z)^{\frac{1}{m}}$

$$= a\left(1 + \frac{1}{m}z - \frac{1.m-1.}{m.\ 2m}z^2 + \frac{1.m-1.2m-1.}{m.\ 2m.\ 3m}z^3 - \frac{1.m-1.\ 2m-1.\ 3m-1.}{m.\ 2m.\ 3m.\ 4m}z^4 + \text{etc.}\right),$$

wenn in (10.) der Zähler $n = 1$ geſetzt wird. Um z kleiner zu machen, ſuche man zu der Zahl N einen Factor f^m, ſo

daß das Product $f^m . N = A^m + B$ einen kleinern Werth für $\frac{B}{A^m}$ gebe, als $\frac{b}{a^m}$ hat. Die aus dieſem Producte gezogene Wurzel $f . N^{\frac{1}{m}}$ mit f dividirt, giebt die geſuchte mte Wurzel aus N.

16. Exempel I. Die Quadratwurzel aus 2 bis auf die zehnte Decimalſtelle zu finden.

Weil die Reihe ſich dem völligen Werthe ſehr langſam nähern würde, wenn man 2 in die Theile 1 + 1 zerlegte, ſo multiplicire man 2 mit einem ſchicklichen Factor, der ein Quadrat iſt. Dieſer ſey 25, ſo iſt $2 \times 25 = 50 = 49 + 1$, und $\sqrt{50} = \sqrt{(49 + 1)} = 7\sqrt{(1 + \frac{1}{49})} = 7 (1 + \frac{1}{49})^{\frac{1}{2}}$. Man multiplicire nun die Potenzen von $\frac{1}{49}$ nach ihrer Folge in die zugehörigen Binomialcoefficienten (13. I.), ſo wird erhalten

$$\begin{array}{rrrr}
\sqrt{(1 + \frac{1}{49})} = & 1{,}00000 & 00000 & 0 \\
+ & 0{,}01020 & 40816 & 3 \\
- & 5 & 20616 & 4 \\
+ & & 5312 & 4 \\
- & & 67 & 8 \\
+ & & & 9 \\
\hline
= & 1{,}01015 & 25445 & 4 \\
\sqrt{50} = & 7{,}07106 & 78118 & \\
\sqrt{2} = & 1{,}41421 & 35623 &
\end{array}$$

Exempel II. Die Quadratwurzel aus 12 zu finden. Sie wird in einer der Formeln zur Rectification des Kreiſes gebraucht. (Cyklotechnie.). Es iſt $4 \times 12 = 48 = 49 - 1$, alſo $\sqrt{48} = 7\sqrt{(1 - \frac{1}{49})}$. Die Glieder ſind eben dieſelben wie vorher, aber alle nach dem erſten folgenden ſubtractiv.

Alſo iſt $\sqrt{(1 - \frac{1}{49})} = 0,98974331862..$

und $\sqrt{48} = 6,92820323034..$

$\sqrt{12} = 3,4641016151...$

Exempel III. Die Cubikwurzel aus 2 zu finden. Dieſe wird zu der arithmetiſchen Verdoppelung eines Würfels gebraucht. Zur mehrern Convergenz der Reihe für die Wurzel multiplicire man 2 mit 16 als dem Cubus von 4, ſo iſt $2 \times 64 = 125 + 3$. Es iſt $\sqrt[3]{128}$ $= 5\sqrt[3]{\left(1 + \frac{3}{125}\right)}$, wo $\frac{3}{125} = 0,024$ iſt.

Die Potenzen dieſes Bruchs werden folgweiſe in die Binomialcoefficienten für den Exponenten $\frac{1}{3}$ (13. II.) multiplicirt. Es iſt

$\sqrt[3]{(1 + 0,024)}$	$=$	1,00000	00000	00
		+ 0,008		
		−	6 4	
		+	8533	33
		−	136	53
		+	2	40
		−		5
	$=$	1,00793	68399	15
$\sqrt[3]{128}$	$=$	5,03968	41995	75
$\sqrt[3]{2}$	$=$	1,25992	10498	9

17. Satz. Es iſt $(a+b)^n = a^n \Big[1 + n. \frac{b}{a+b}$

$$+ \frac{n.n+1.}{1.2.} \cdot \frac{b^2}{(a+b^2} + \frac{n.n+1.n+2.}{1.2.3} \cdot \frac{b^3}{(a+b)^3}$$

$$+ \frac{n.n+1.n+2.n+3.}{1.2.3.4} \cdot \frac{b^4}{(a+b)^4} + \text{etc.} \Big].$$

Denn es ſey: $\frac{b}{a+b} = u$, ſo iſt $b = \frac{au}{1-u}$,
und $a+b = \frac{a}{1-u}$, alſo $(a+b)^n = a^n(1-u)^{-n}$.
Nun iſt $(1-u)^{-n} = 1 + nu + \frac{n.n+1.}{1.2} u^2 + \text{etc.}$
aus (11.), wenn daſelbſt z mit $-u$ vertauſcht wird.
Für u der Werth $\frac{b}{a+b}$ geſetzt, wird die Formel erhalten.

In dieſer Reihe nehmen die Potenzen von $\frac{b}{a+b}$ ſtärker ab als die von $\frac{b}{a}$, welche in der Reihe (1.) in die Potenz a^n multiplicirt ſind. Dagegen ſind für ein poſitives n die Coefficienten größer.

18. Satz. Es iſt $(a+b)^{-n} = \frac{1}{a^n}\Big[1 - n.\frac{b}{a+b}$
$+ \frac{n.n-1.}{1.2}.\frac{b^2}{(a+b)^2} - \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3}.\frac{b}{(a+b)^3}$
$+ \frac{n\ldots n-3}{1\ldots 4}.\frac{b^4}{(a+b)^4} - \text{etc.}\Big]$.

Die Reihe bricht ab, wenn n eine ganze Zahl iſt. Die ins Unendliche fortlaufende Reihe für $(a+b)^{-n}$ oder $a^{-n}\left(1+\frac{b}{a}\right)^{-n}$, wenn ſie nach den Potenzen von $\frac{b}{a}$ geordnet wird, iſt hier in einige ſummatoriſche Theile zuſammen gezogen. Die Reihe folgt aus der in (17.), wenn n mit $-n$ vertauſcht wird.

19. Exempel I. Die Quadratwurzel aus 2 zu finden. Man ſetze in (17.) den Exponenten $n = \frac{1}{2}$, und ſuche, wie in (16. I.) die Quadratwurzel aus 50, das iſt, aus

$49 + 1$. Hier iſt $a = 49$; $b = 1$, alſo $\frac{b}{a+b} = \frac{1}{50}$
$= \frac{2}{100}$, wovon die Potenzen ſehr leicht berechnet ſind.
Es iſt nämlich

$$
\begin{array}{rcl}
\frac{1}{7}\sqrt{50} & = & 1,000000\ 000000 \\
 & + & 0,010000\ 000000 \\
 & + & 150\ 000000 \\
 & + & 2\ 500000 \\
 & + & 43750 \\
 & + & 787 \\
 & + & 14 \\
\hline
 & = & 1,010152\ 544551 \\
\sqrt{50} & = & 7,071067\ 811857 \\
\sqrt{2} & = & 1,414213\ 56237
\end{array}
$$

Exempel II. Die Quadratwurzel aus 12 findet man mittelſt eben dieſer Zahlen, nur daß ſie abwechſelnd additiv und ſubtractiv ſind. Es iſt $\sqrt{12} = \frac{1}{2}\sqrt{48}$ $= \frac{1}{2}\sqrt{(49-1)}$.

Geſchichte des binomiſchen Lehrſatzes.

20. Die Binomial-Coefficienten kommen zuerſt in Stifels Arithmetica integra L. I. c. 5. vor, welche 1544 gedruckt iſt. Früher als bey Stifel hat Käſtner die Binomial-Coefficienten und ihr Geſetz nicht gefunden. (Geſch. d. Mathem. 1. Bd. 49. S.). Stifel nennt ſie numeros, qui peculiariter pertinent ad ſuas species extractionum, und liefert ſie bis zur 17ten Potenz nur mit Weglaſſung der zweyten Hälfte in jeder Potenz, weil dieſe der erſtern rückwärts genommen gleich iſt. Er zeigt auch, wie ſie nach einander durch Addition je zweyer gefunden werden, erklärt aber nicht den Grund, woher dieſe Addition in einer Potenz die Coefficienten in der nächſtfolgenden giebt. Er weiß auch nicht, wie die Coefficienten in jeder Potenz unabhängig von denen in den niedrigern Potenzen gefunden werden.

21. Briggs war der erſte, welcher zeigte, wie die Coefficienten in jeder Potenz eines Binomium unabhängig von einander gefunden werden, nur daß er die Regel noch in Worten ausdruckt, ohne eine analytiſche Formel für ſie zu geben. Er blieb noch bey Potenzen mit ganzen Exponenten ſtehen. Dieſes nach Huttons Anzeige. Joh. Bernoulli ſchreibt die Erfindung des binomiſchen Lehrſatzes dem Paſcal zu. Von deſſen arithmetiſchen Dreyeck ſ. dieſen Artikel.

22. Newton war es, der entdeckte, daß die Form des binomiſchen Lehrſatzes, welche man für ganze Exponenten gefunden hatte, für alle Arten von Exponenten gültig iſt. Dieſe Entdeckung iſt, als eine der ſchönſten von dieſem großen Manne, auf ſeinem Grabmahle in der Weſtmünſter Abtey eingegraben. Wie er darauf gekommen iſt, erzählt er in einem Schreiben an Oldenburg, welches dieſer Leibnitzen mittheilen ſollte, vom 24. Oct. 1676. Es ſteht in dem Commercio epiſtolico Joh. Collins et aliorum de Analyſi promota, Lond. 1712, und daraus in Newtoni Opuſc. T. I. p. 328 ſeqq. Es war auf einem Umwege, daß er die Allgemeinheit des Satzes wahrnahm. Wallis hatte gefunden, daß alle krumme Linien, deren Gleichung iſt $y = (1 - xx)^n$, wenn n eine ganze Zahl bedeutet, ſich mittelſt eines endlichen Ausdrucks quadriren laſſen. Hieraus machte er den Schluß, daß, ſo wie der Exponent von $(1 - xx)^{\frac{1}{2}}$ das arithmetiſche Mittel zwiſchen 0 und 1 iſt, auch der Werth der Fläche für die krumme Linie mit der Gleichung $y = (1 - xx)^{\frac{1}{2}}$, das iſt, den Kreis, zwiſchen die Flächenräume an den Linien mit der Gleichung $y = (1 - xx)^0$ (das iſt $y = 1$), und mit der Gleichung $y = (1 - xx)^1$ fallen müſſe, er konnte aber dieſen mittlern Werth nicht finden. Newton entdeckte die Form aller interpolirten Flächenräume, und bemerkte dabey, daß die Potenzen $(1 - xx)^0$; $(1 - xx)^1$; $(1 - xx)^2$; $(1 - xx)^3$, etc. auf dieſelbe Art müßten interpolirt werden können. Zur Beſtätigung der gefundenen Formen

multiplicirte er den daraus hergeleiteten Werth von $(1-xx)^{\frac{1}{2}}$ mit eben demſelben, und fand das Product gleich $1-xx$, wie es ſeyn muß. Er verſuchte nun auch die Ausziehung der Quadratwurzel mit Literalgrößen nach der Art, wie ſie bey Zahlen bewerkſtelligt wird, und fand den Ausdruck der Wurzel dem auf gebrochne Exponenten erweiterten Lehrſatze gemäß. Nun ſetzte er die Interpolation der Reihen ganz bey Seite, und wandte die arithmetiſchen Operationen, als das zuverläſſigere Verfahren, allein an. Wie er höhere Wurzeln durch Ausziehung gefunden hat, zeigt er nicht an. Für negative ganze Exponenten war die Rechnung leichter. Newton ſagt auch: nec latuit reductio per diviſionem, res utique facilior.

Newtons Beweis der erweiterten Binomial-Potenz war in der That nur Induction. Er hat die ſehr brauchbare Vorſtellung von Interpolation bey dieſer Unterſuchung zu bald aufgegeben.

23. Colſon trägt in einem Commentar über Newtons Fluxionenrechnung im J. 1736 einen Beweis des binomiſchen Lehrſatzes für alle Arten von Exponenten durch die Differentialrechnung vor. Denſelben Beweis giebt Horsley in ſeiner Ausgabe von Newtons Werken, T. I. p. 286, und führt dabey an, daß Raphſon in ſeiner Hiſtory of Fluxions dieſen Beweis einem Heynes zuſchreibt. Schärfer hat Käſtner den Beweis in einem Programm 1758 abgefaßt, und hernach in der Analyſis unendlicher Größen.

Gegen dieſe Beweisart iſt in Rückſicht der Methode zu erinnern, daß das Binomial-Theorem der Analyſis endlicher Größen angehört, und der Lehre von den letzten Verhältniſſen der Veränderungen von Größen nicht bedürfen müſſe. Übrigens iſt das Verfahren ſehr kurz und einleuchtend.

24. Äpinus gab einen allgemeinen Beweis des Newtoniſchen Lehrſatzes von der Potenz eines Binomium

in den Novis Comment. Petrop. T. VIII. a. a. 1760, 1761, woran nur das auszuſetzen ſeyn möchte, daß dabey zu viel auf Induction ankommt.

25. Der Beweis, den Euler in den Novis Comm. Petrop. T. XIX. a. a. 1774. p. 103 geführt hat, iſt im Weſentlichen derſelbe mit dem in dieſem Artikel (10 — 13) vorgetragenen, nur daß die dabey nöthige Rechnung nicht ausgeführt, ſondern ihr Reſultat aus einer allgemeinen Beſchaffenheit des Products zweyer oder mehrerer Factoren geführt wird, ſ. Binomial-Coefficienten, 37.

26. Die Beweiſe, welche von Segner, Buſſe, l'Huilier und Rothe gegeben haben, ſind der Euleriſche mit der noch nöthigen Ergänzung. Die Schriften, worin ſie vorkommen, ſind an dem a. O. angezeigt.

27. Euler hat noch im J. 1787 einen neuen Beweis des Lehrſatzes aufgeſtellt: Nova demonſtratio, quod evolutio poteſtatum binomii Newtoniana etiam pro exponentibus fractis valeat. Nova Acta Petrop. T. V. Die Grundlage dazu iſt folgende. Erſtlich muß ſeyn $(1+x)^n = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 \ldots + Mx^m + Nx^{m+1} +$ etc. und ſo auch $(1+x)^{n+1} = 1 + A'x + B'x^2 + C'x^3 \ldots + M'x^m + N'x^{m+1} +$ etc. Die Coefficienten ſind ſo beſchaffen, daß $A' = A + 1$; $B' = B + A$, $C' = C + B$, und $M + N = N'$. Es kommt alſo darauf an, wie, nachdem der Werth von M gefunden iſt, der Werth des folgenden Buchſtabens N zu beſtimmen ſey, ſo daß, wenn darin $n+1$ für n geſetzt wird, und der dadurch hervorgehende Werth N' heißt, $N - N' = M$ werde.

28. La Grange trägt in ſeiner Théorie des fonctions analytiques, nr. 18. einen ſehr kurzen Beweis unſers Lehrſatzes vor, der aber weſentlich mit dem aus der Differentialrechnung genommenen übereinſtimmt.

29. In den engliſchen Tranſectionen ſind mehrere Aufſätze über Newtons Theorem enthalten: in dem 42ſten

Bande von Caſtillion; in dem 47ſten für 1751. 52. von Th. Simpſon; in dem Jahrgange für 1795 von Robertſon; in dem für 1796 von Sewell. Der von dem letztern gegebene Beweis iſt eine künſtliche Verpflanzung der auf die Differentialrechnung gegründeten Methode in die Analyſis des Endlichen.

30. In der Überſetzung der Zuſätze, die la Grange zu der franzöſiſchen Ausgabe von Eulers Algebra gemacht hat, iſt von dem Überſetzer, Hofrath Kaußler, ein guter aber etwas umſtändlicher Beweis des binomiſchen Lehrſatzes für ganze, poſitive und negative, Exponenten gegeben. Er beruht auf der Summirung der gleichſtelligen Coefficienten in der Folge der Potenzen.

Binomium iſt eine zweytheilige Größe, wie $a+b$ oder $a+\sqrt{b}$, oder $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, u. d. gl.

Euklides verſteht unter Binomium eine zweytheilige Größe von der Form $a+\sqrt{b}$ oder $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, wo a und b rationale Zahlen ſind. (Elemente X. 37.). Es unterſcheidet ſich von einer Apotome nur dadurch, daß der eine Theil zu dem andern addirt wird. Euklides macht ſechs Binomien oder Binomialen, ſo wie er ſechs Apotomen unterſcheidet. Das erſte Binomium iſt $a+\sqrt{b}$, wenn $\sqrt{(aa-b)} : a = m : n$, dem Verhältniſſe zweyer rationalen Zahlen. Das zweyte iſt $a+\sqrt{b}$, wenn $\sqrt{(b-aa)} : \sqrt{b} = m : n$ iſt. Das dritte iſt $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, wenn $\sqrt{(a-b)} : \sqrt{a} = m : n$ iſt. Das vierte iſt $a+\sqrt{b}$, wenn $\sqrt{(aa-b)} : a$ ein irrationales Verhältniß iſt. Das fünfte iſt $a+\sqrt{b}$, wenn $\sqrt{(b-aa)} : \sqrt{b}$ ein irrationales Verhältniß iſt. Das ſechste Binomium iſt $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, wenn $\sqrt{(a-b)} : \sqrt{a}$ ein ſolches Verhältniß iſt.

Biquadrat, die vierte Potenz einer Größe, wie 81 von 3. Es wird allgemein bezeichnet durch $aaaa$ oder a^4.

Biquadratiſch, was mit einem Biquadrat in Verbindung ſteht.

Biquadratiſche Gleichung, worin die höchſte Potenz der unbekannten Größe oder der Wurzel die vierte iſt. S. Gleichung IV.

Biquadratiſche Parabel, diejenige, deren Gleichung iſt $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. S. Parabel.

Biquadratiſche Wurzel, einer von den vier gleichen Factoren einer Zahl. S. Wurzel.

Blindrechnung. S. Regula coeci.

Bogen, iſt ein Theil einer krummen Linie.

Ein Bogen iſt immer größer als ſeine Chorde oder die gerade Linie zwiſchen ſeinen Endpuncten. Dieſes pflegt als ein Grundſatz angenommen zu werden. Man ſetze ſtatt deſſelben folgenden. Zwey Linien, es ſeyn beide krumme oder eine derſelben aus geraden Linien zuſammengeſetzt, die zwiſchen denſelben Endpuncten liegen, ſind deſto weniger an Länge verſchieden, je mehr Puncte ſie mit einander gemein haben. Es ſey nun ADB (Fig. 47. Tab. III.) ein Bogen einer krummen Linie und die gerade AB die Chorde. Man nehme auf dem Bogen irgend eine Anzahl Puncte, wie C, D, E, und ziehe die Chorden zwiſchen je zwey nächſten, ſo iſt die Summe aller Chorden nothwendig größer als AB, da die Chorde AD größer als AC + CD; AE größer als AD + DE, u. ſ. f. iſt. Je größer die Anzahl der Theile auf dem Bogen iſt, deſto weniger iſt derſelbe von der Summe der Chorden ſeiner Theile verſchieden, alſo iſt der Bogen größer als ſeine Chorde.

Da das Gränzverhältniß zwiſchen einem Bogen und der Summe der Chorden ſeiner Theile das Verhältniß der Gleichheit iſt, ſo iſt auch das Gränzverhältniß zwiſchen der Zunahme eines Bogens und der Chorde dieſer Zunahme das Verhältniß der Gleichheit.

Bogen ſind gleich oder um eine gegebene Größe verſchieden, wenn jenes Gränzverhältniß für ſie bey jeder Größe derſelben daſſelbe iſt.

Zwey Bogen AB, ab (Fig. 48. a. b.) ſind ähnlich, wenn die Winkel C, c der an den Endpuncten A, B; a, b, gezogenen Berührungslinien ſich gleich, und eben ſo an den Puncten D, d, für welche das Verhältniß der Bogen AD : ad = AB : ab iſt, die Winkel E, e der berührenden DE, de mit AE, ae ſich gleich ſind. Ihre Ablenkung bey gleichmäßiger Länge iſt alsdann dieſelbe. Darum nennt man zwey Kreisbogen AB, ab ähnlich, wenn die zugehörigen Winkel am Mittelpuncte F, f ſich gleich ſind. Das zur Ähnlichkeit erforderte trifft bey dieſen ein.

Die Formen des Differentials eines Bogens ſ. in dem Artikel, Rectification.

Bomiſcus, in der Geometrie der Alten eine vierſeitige geradlinichte Figur, welche folgendergeſtalt beſtimmt wird. Es ſey ABC (Fig. 49. Tab. III.) ein Dreyeck, in welchem DE parallel mit BC iſt. Auf der verlängerten CA nehme man einen Punct F, ziehe BF, und mit dieſer die parallele EG bis an die verlängerte BA; verbinde die Puncte F, G und G, C, ſo iſt das Viereck CBFG ein Bomiſcus. Die Seite CG iſt parallel der Linie DF.

Der Satz ſteht in den mathematiſchen Sammlungen des Pappus, B. VII. Satz 134. Der Beweis iſt leicht, und beruht auf den Sätzen I. 37. 39. Elem. Eukl.

Das griechiſche Wort bedeutet einen kleinen Altar.

Brennlinie (Cauſtica) iſt eine Linie, auf welcher die Durchſchnittspuncte je zweyer nächſten, nach Art der Lichtſtrahlen, von einer gegebenen Linie zurückgeworfenen, oder durch ſie gebrochenen Linien liegen, wenn dieſe, wie die zugehörigen auffallenden Linien in ſtetiger Folge genommen werden. Oder auch, ſie iſt die Linie, welche von allen auf die gedachte Art zurückgeworfenen oder gebrochenen Linien berührt wird. Die Veranlaſſung zu der Unterſuchung dieſer Linien hat zwar die Optik gegeben; ſie gehören aber ganz der Geometrie zu, wenn die Lichtſtrahlen

als gerade Linien, und ihre Zurückwerfung oder Brechung als geometriſche Conſtructionen nach einem angenommenen Geſetze, ohne Rückſicht auf ſinnliche Erſcheinungen, betrachtet werden.

1. Die Brennlinien durch zurückgeworfene Strahlen heißen Catacauſticae; die Brennlinien durch gebrochene Strahlen heißen Diacauſticae. Die allgemeinen Formeln für die Länge des zurückgeworfenen und gebrochenen Strahls bis zu dem Berührungspuncte an der Brennlinie ſind in den Artikeln, Catacauſtica und Diacauſtica, mit den Beweiſen und einigen Beyſpielen, zu finden. Hier ſoll das leicht verſtändliche mit Hülfe der Elementar-Geometrie vorgetragen, und dadurch die analytiſche Behandlung in jenen Artikeln vorbereitet werden.

Zuerſt von den Brennlinien durch Zurückwerfung.

2. Es ſey ACB (Fig. 50. Tab. III.) der Quadrant eines Kreiſes. Mit AC ſeyn die Linien PM, in endlichen Abſtänden von einander, parallel. Die zurückgeworfenen Linien machen mit dem Halbmeſſer durch den Einfallspunct M denſelben Winkel auf der Seite nach A hin, wie PM auf der Seite nach B. Die Durchſchnitte je zweyer auf einander folgenden, von AC angefangen, ſind a, b, c, d, e. Dieſe ſind nicht Puncte der Brennlinie, weil die zurückgeworfenen Strahlen hier nicht eine ſtetige Folge ausmachen. Wird die Menge der auffallenden Strahlen vergrößert, ſo rücken die Durchſchnittspuncte einer zurückgeworfenen (wie Med) mit der auf jeder Seite zunächſt liegenden (wie Me, Md) immer näher zuſammen. Bey einer ſtetigen Folge von zurückgeworfenen Linien kommen d und e ſich näher als um jeden endlichen Zwiſchenraum, und werden Puncte der Brennlinie. Da ſie auch auf der geraden Med liegen, ſo iſt dieſe die berührende in d oder e. Eine berührende nämlich hat einerley Richtung mit einer krummen Linie in dem Berührungspuncte, und hat daher zwey unendlich nahe liegende Puncte mit der Curve gemein.

3. Die Brennlinie für den Halbkreis BAD bey Parallelſtrahlen hat die in Fig. 51. gezeichnete Geſtalt BEFeD. Man kann ſie als eine glänzende Linie darſtellen, wenn man in eine zinnerne polirte Schale mit einer cylindriſchen Rand-Einfaſſung, oder in ein Glas Milch gießt, und dieſe den Strahlen der Sonne, oder auch einer Kerze ausſetzt, nur daß bey dem Lichte der letztern die Geſtalt etwas verändert wird, weil die auffallenden Strahlen nicht parallel ſind. Man erblickt ſie auch in dem Rauche, den man vor einem der Sonne entgegen gehaltenen Brennſpiegel aufſteigen läßt. Sie wird folgendergeſtalt gezeichnet. Mit dem Halbmeſſer AC ziehe man irgend eine parallele PM, nehme den Bogen MAN = 2 Bog. BM, ziehe MN, und nehme darauf ME = $\frac{1}{4}$MN = $\frac{1}{2}$MP, ſo iſt E der Punct der Brennlinie, wo die zurückgeworfene ME ſie berührt.

4. Dieſe Conſtruction gründet ſich auf einige Eigenſchaften des Kreiſes.

I. Es ſey (Fig. 52.) AMBmA ein Kreis, deſſen Mittelpunct C iſt; PM, QN ſeyn mit ACB parallel. Man nehme den Bogen Mm = MP (nach entgegengeſetzten Seiten von M aus), ſo iſt die gerade Mm der zu MP gehörige zurückgeworfene Strahl. Denn CM, welche auf den Kreis in M ſenkrecht iſt, halbirt den Winkel PMm. Ferner ſey der Bogen Nn = NQ, ſo iſt die gerade Nn der zurückgeworfene Strahl zu NQ. Nun iſt Bog. Mm — Nn (= MP — NQ) = 2MN, daher Bog. Nm — Nn = 3MN, das iſt, Bog. nm = 3MN.

II. Man ziehe die Chorden MN, mn, ſo iſt, (wegen der ähnlichen Dreyecke MNR, nmR) ch. MN : ch. mn = MR : Rn. Weil die Chorden der Kreisbogen weniger zunehmen als nach dem Verhältniſſe ihrer Bogen, ſo iſt ch. mn < 3 ch. MN. Folglich iſt auch Rn < 3MR, oder MR > $\frac{1}{3}$Rn. Je näher die Puncte M, N einander genommen werden, deſto näher kommt das Verhältniß der Chorden MN, mn dem 1 : 3, da-

her auch MR : Rn eben demſelben, und zugleich das Verhältniß Rn : Rm dem der Gleichheit. Nun wird das Verhältniß MR : Rm zuſammengeſetzt aus den Verhältniſſen MR : Rn und Rn : Rm. Da die Gränzen dieſer Verhältniſſe ſind 1 : 3 und 1 : 1, ſo iſt die Gränze des daraus zuſammengeſetzten, oder des MR : Rm = 1 : 3, ſo daß in einer ſtetigen Folge von auffallenden und zurückgeworfenen Strahlen MR = $\frac{1}{3}$Rm, alſo MR = $\frac{1}{4}$ Mm wird. Es ſey MD = $\frac{1}{4}$ Mm, ſo iſt D ein Punct der Brennlinie, und MDm die berührende an dieſem Puncte.

V. Darum iſt in der Conſtruction (3. Fig. 51.) die berührende an der Brennlinie von dem Kreiſe bis an den Berührungspunct, ME = $\frac{1}{4}$ MN genommen. Der Bogen, deſſen Chorde der auffallende Strahl iſt, iſt = 2BM, der Bogen MN über dem zurückgeworfenen iſt = 2MB, und die Chorde MN = 2MP.

5. Da die Unterſchiede des Durchmeſſers AB, und der mit denſelben parallelen Chorden (Fig. 52.) in Vergleichung mit dem Bogen AM wenig zunehmen, und da zugleich die Winkel der zurückgeworfenen Strahlen mit den auffallenden für kleine Bogen AM klein ſind, ſo liegen die Durchſchnitte der in der Nähe von A zurückgeworfenen, auf einander folgenden, Strahlen nahe bey dem Puncte F, wenn AF = $\frac{1}{4}$ AB iſt, ſelbſt noch, wenn AM ein nicht mehr kleiner Theil des Umfanges iſt. Daher haben die ſphäriſchen Brennſpiegel ihren Brennpunct in F, und können daſelbſt eine große Hitze hervorbringen. Dieſes zeigen auch die für die Durchſchnitte zurückgeworfenen, von einander abſtehenden Strahlen (Fig. 50.). Je weiter aber die einfallenden Strahlen von AB liegen, deſto mehr liegen die Durchſchnitte der zurückgeworfenen aus einander.

6. Die Brennlinie des Kreiſes für parallele Strahlen (Fig. 51.), welche zuerſt unterſucht iſt, hat einige merkwürdige Eigenſchaften.

1). Sie iſt eine Epicykloide, die durch die Wälzung eines Kreiſes, deſſen Durchmeſſer BH = ½ (B iſt, über dem Halbkreiſe HFG mit dem Durchmeſſer GH = CB von dem Puncte B beſchrieben wird.

2). Der Bogen der Brennlinie BE iſt gleich der Summe PM + ME, des auffallenden Strahls von P an, und des zurückgeworfenen bis an den Berührungspunct, oder der Bogen BE = $\frac{3}{2}$ PM. Alſo der Bogen BEF = $\frac{3}{4}$ AC.

3). Man nehme in dem Kreiſe über dem Durchmeſſer BH die Chorde BK = ME, dem zurückgeworfenen Strahle bis an die Brennlinie, ſo iſt der Raum zwiſchen dem Bogen BE der Brennlinie, dem Kreisbogen BM, und dem Strahle ME gleich dem doppelten des Kreisabſchnittes BkK, und daher der Raum BFAB ſo groß als der ganze Kreis über BH.

7. Die Strahlen fallen (Fig. 53.) von einem Puncte E auf die concave Seite eines Kreiſes AMBA. Zwey derſelben ſeyn EM, EN, deren jene den Kreis in M, P, dieſe in N, Q ſchneidet. Man nehme den Bogen Mm = MP, und Nn = NQ, ſo ſind die Chorden Mm, Nn die zurückgeworfenen Strahlen. Es iſt Bog. nm = Nm — Nn = MN + MP — NQ = 2MN + PQ.

Die zurückgeworfenen Strahlen ſchneiden ſich in R, ſo iſt MR : Rn = ch. MN : ch. mn. Man ziehe noch die Chorde PQ, ſo iſt (wegen der ähnlichen Dreyecke NME, PQE, da in dem Vierecke MNQP die gegen über ſtehenden Winkel zwey Rechte ausmachen, ſ. Kreis) EM : EQ = ch. MN : ch. PQ. Das Gränzverhältniß der Chorden iſt das Verhältniß ihrer Bogen. Das Gränzverhältniß von EM : EQ iſt EM : EP; das von MR : Rn oder ch. MN : ch. mn ſey MD : Dm, ſo iſt

EM : EP = MN : PQ,

MD : Dm = MN : mn.

Aus der erſtern Proportion iſt

$$EM : 2EM + EP = MN : 2MN + PQ.$$

Da $mn = 2MN + PQ$ iſt, ſo iſt

$$EM : 2EM + EP = MD : Dm,$$

und daraus

$$EM : 3EM + EP = MD : Mm.$$

Es werde PM in G halbirt, ſo iſt $EM + EP = 2EG$, alſo $3EM + EP = 2EM + 2EG$. Wird auch Mm in H halbirt ſo iſt

$$EM : EM + EG = MD : MH$$

oder $EM + EG : EM = MH : MD$,

und D iſt der Punct der Brennlinie, wo Mm ſie berührt.

8. Wenn der auffallende Strahl EA durch den Mittelpunct des Kreiſes C geht, ſo ſey der Punct F auf AB die Gränze, welcher ſich die Durchſchnitte des nach AC ſelbſt zurückgehenden Strahls und eines benachbarten zurückgeworfenen deſto mehr nähern, je näher beide Strahlen einander liegen. Für F iſt

$$EA + EC : EA = AC : AF.$$

9. Die Strahlen EM, EN (Fig. 54.) fallen von E auf die convexe Seite eines Kreiſes, und werden nach Mp, Mq zurückgeworfen. Die Verlängerungen der einfallenden treffen den Kreis in P, Q, der zurückgeworfenen ... m, n. Die letzteren ſchneiden ſich in R. Die Gränze von MR ſey MD, und, wie vorher, $MG = GP$; $MH = Hm$. Es iſt auch für dieſen Fall

$$EM + EG : EM = MH : MD.$$

Auf dem durch den Mittelpunct gehenden Strahl ſey F die Gränze der Durchſchnittspuncte mit den zurückgeworfenen, ſo iſt

$$EA + EC : EA = AC : AF.$$

10. Von der Brennlinie durch Brechung iſt es hier völlig genügend, nur einen Fall zu unterſuchen.

Die brechende Linie ſey ein Kreis (Fig 55. Tab. IV.) über dem Halbmeſſer AB aus dem Mittelpuncte C beſchrieben. Der leuchtende Punct ſey E. Zwey auffallende Strahlen ſind EM, EN, ihre gebrochenen MD, ND, die ſich in D ſchneiden. Jene verlängert treffen den Kreis in P, Q, dieſe in m, n. Die Einfallslothe ſind MCp, NCq. Die ſenkrechten auf MP, Mm ſind CG; CH. Das Verhältniß derſelben iſt ein unveränderliches.

Man ſetze $CMP = \varphi$; $CMm = \omega$; $CNQ = \varphi + \Delta\varphi$; $CNn = \omega + \Delta\omega$. Bezeichnet man die Bogen des Kreiſes eben ſo wie die zugehörigen Winkel am Mittelpuncte, ſo iſt $Pp = 2\varphi$, weil der zu Pp gehörige Winkel am Mittelpuncte doppelt ſo groß iſt als der am Umfange PMp. Eben ſo $Qq = 2(\varphi + \Delta\varphi)$, daher $Qq - Pp$ oder $QP + qp = 2\Delta\varphi$, das iſt, $PQ + MN = 2\Delta\varphi$. Gleichergeſtalt iſt $mp = 2\omega$; $qn = 2(\omega + \Delta\omega)$, alſo $pq + mn$ oder $MN + mn = 2\Delta\omega$.

Für verſchwindende MN und PQ iſt, wie in (7.) $MN : PQ = EM : EP$, und daraus $MN + PQ : MN = EM + EP : EM$. Bey eben dieſer Annahme iſt $MN : mn = DM : Dm$, alſo $MN : MN + mn = DM : DM + Dm$. Aus beiden Proportionen ergiebt ſich folgende:

$$MN + PQ : MN + mn = (EM + EP)\, DM : EM\, (DM + Dm),$$

oder, weil G und H die Chorden MP, Mm halbiren,

$$MN + PQ : MN + mn = EG \times DM : EM \times DH,$$

und die Gränze von $\Delta\varphi : \Delta\omega$ iſt $EG \times DM : EM \times DH$,

Da nach dem Geſetze der Brechung das Verhältniß $\sin\varphi : \sin\omega$ unveränderlich iſt, ſo iſt $\sin(\varphi + \Delta\varphi) : \sin(\omega + \Delta\omega) = \sin\varphi : \sin\omega$, und daher $\sin(\varphi + \Delta\varphi) - \sin\varphi : \sin(\omega + \Delta\omega) - \sin\omega = \sin\varphi : \sin\omega$. Es iſt $\sin(\varphi + \Delta\varphi) - \sin\varphi = 2 \sin\tfrac{1}{2}\Delta\varphi . \cos\tfrac{1}{2}(2\varphi + \Delta\varphi)$, und $\sin(\omega + \Delta\omega) - \sin\omega = 2 \sin\tfrac{1}{2}\Delta\omega . \cos\tfrac{1}{2}(2\omega + \Delta\omega)$, nach Goniometrie, 28, wie es ſich auch leicht durch eine

geometriſche Conſtruction erweiſen läßt. Die Gränze des Verhältniſſes $2\sin\frac{1}{2}\Delta\varphi.\cos\frac{1}{2}(2\varphi+\Delta\varphi):2\sin\frac{1}{2}\Delta\omega.\cos\frac{1}{2}(2\omega+\Delta\omega)$ iſt $\Delta\varphi.\cos\varphi:\Delta\omega.\cos\omega$. Jenes Verhältniß iſt auch das unveränderliche $\sin\varphi:\sin\omega$, und daher iſt die Gränze von $\Delta\varphi:\Delta\omega = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}:\frac{\sin\omega}{\cos\omega}$. Dieſes Verhältniß tritt für verſchwindende Veränderungen $\Delta\varphi$, $\Delta\omega$ ein; für endliche $\Delta\varphi$ und $\Delta\omega$ gilt ein anderes, das zugleich von den Veränderungen ſelbſt abhängig iſt. Da vorher auch eine Gränze, für $\Delta\varphi:\Delta\omega$ gefunden iſt, ſo ſind die Werthe beider gleich, und es iſt

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}:\frac{\sin\omega}{\cos\omega} = EG\times DM:EM\times DH.$$

Es iſt $\sin\varphi:\cos\varphi = CG:MG$, und $\sin\omega:\cos\omega = CH:MH$ alſo

$$\frac{CG}{MG}:\frac{CH}{MH} = EG\times DM:EM\times DH,$$

und daraus

$$\frac{CG\times EM}{MG}:\frac{CH\times EG}{MH} = DM:DH.$$

Aus dem Verhältniſſe $DM:DH$ wird auch das $DM-DH:DM$ oder $MH:MD$ gefunden, wodurch der Punct D beſtimmt wird. Dieſer iſt ein Punct der Brennlinie, den ſie mit der berührenden gemein hat.

11. Wenn der auffallende Strahl durch den Mittelpunct C geht, ſo verwandelt ſich das Verhältniß $EM:EG$ in $EA:EC$; das $MG:MH$ in $AC:AC$; das $CG:CH$ bleibt das beſtändige Brechungsverhältniß, welches durch $I:R$ bezeichnet werde. Beide, CG und CH, ſind zwar für dieſe Lage des Strahls Null, aber ihr Verhältniß bleibt auch im Verſchwinden das unveränderliche. Ferner verwandelt ſich das Verhältniß $DM:DH$ in $FA:FC$, wenn F die Gränze der Durchſchnittspuncte der ge-

brochenen Strahlen mit dem einfallenden ungebrochen fortgehenden iſt. Demnach iſt

$$I \times EA : R \times EC = FA : FC$$

daher

$$I \times EA - R \times EC : I \times EA = AC : AF.$$

12. Wenn die auffallenden Strahlen parallel mit AB ſind, ſo ſind EA, EM, EN unendlich groß, und das Verhältniß EM:EG wird 1:1. In dieſem Falle iſt

$$\frac{CG}{MG} : \frac{CH}{MH} = DM : DH,$$

und $I - R : I = AC : AF$.

13. Die Anwendung der gegebenen Auflöſung auf andere Fälle iſt leicht. Nur iſt noch zu zeigen, wie die Lage des gebrochenen Strahls durch eine Conſtruction gefunden wird,

Es ſey BAD (Fig. 56.) der Einfallswinkel, AB das Einfallsloth, AD der einfallende Strahl. Ueber der willkührlichen AB beſchreibe man einen Halbkreis, welcher AD in D ſchneidet, und ziehe BD. Auf der verlängerten AB nehme man AE:AB gleich dem Brechungsverhältniſſe, beſchreibe über AE einen Kreis, lege in denſelben die Chorde EF=BD, und ziehe AF, ſo iſt AF der gebrochne Strahl. Denn der Sinus des Einfallswinkels iſt $\frac{BD}{AB}$, des Brechungswinkels $\frac{EF}{AE}$. Beide verhalten ſich wie AE : AB, dem Brechungsverhältniſſe gemäß.

14. Die Unterſuchung über den Durchſchnittspunct zweyer unmittelbar nächſten, zurück geworfenen oder gebrochenen Strahlen hat zuerſt Barrow angeſtellt. (Lectiones opticae, VI–XIII.) Sein Zweck war, die Stelle zu ſuchen, wo das Bild eines Punctes liegt, welchen ein Auge in einer gegebenen Lage durch zurückgeworfene oder gebrochene Strahlen erblickt. Das Bild ſetzt er

um den Durchſchnittspunct zweyer nächſten Strahlen, den Gränzpunct der Durchſchnitte ſich naher Strahlen, und zwar um den Punct herum, weil die Augenöfnung einen gewiſſen Durchmeſſer hat. Seine Beweiſe ſind hier zuſammen gezogen. Barrow fiel aber noch nicht darauf, die Linie zu betrachten, welche die Reihe aller Bilder oder Gränzpuncte der Durchſchnitte enthält.

15. Huygens iſt der erſte, der die Entſtehung der Brennlinien angegeben hat, doch nur für den Halbkreis, und für auffallende Parallelſtrahlen. Er trägt ſie in ſeinem Traité de la Lumiere, Ch. 6. vor. (Opera reliqua. Vol. I.). Dieſe Schrift iſt 1690 herausgekommen, aber ſchon 1678 verfaßt worden, und in dieſer Materie nicht verändert. Von der Brennlinie durch Brechung begnügt ſich H. zu bemerken, daß man jeden Punct derſelben mittelſt eines von Barrow vorgetragenen Lehrſatzes finden könne, und daß ſie rectificabel iſt. Denn er wendet ſie eigentlich zur Erläuterung ſeiner Theorie vom Lichte, und der Bewegung der Lichtwellen an. Eben ſo behandelt er die Brennlinie durch Zurückwerfung. Er zeigt nur an, wie jeder ihrer Puncte gefunden wird, bemerkt, daß ſie eine Art Cykloide iſt, giebt ihre Länge, und den zwiſchen ihr und dem Halbkreiſe enthaltenen Flächenraum an, ſo wie es in (5.) vorgetragen iſt.

Ehe dieſe Lehrſätze bekannt gemacht wurden, verſuchte Tſchirnhauſen die Brennlinie durch Zurückwerfung paralleler Strahlen von einem Halbkreiſe zu beſtimmen. Er legte ſeine Entdeckung der Pariſer Akademie der Wiſſenſchaften vor, ohne die Beweiſe zu geben. Auch in den Actis Erud. a. 1682 machte er ſeine Conſtruction bekannt, aber auch ohne Beweis. Sie iſt folgende. Der zurückwerfende Halbkreis ſey ADB (Fig. 57. Tab. IV.) der Mittelpunct C, ein mit CD parallel auffallender Strahl PN. Ueber CB werde ein Halbkreis COB beſchrieben; welcher von PN in O geſchnitten wird. Es werde ON in M halbirt, ſo ſoll M ein Punct der Brennlinie ſeyn. Daß dieſe Conſtruction unrichtig iſt, erwies

de la Hire in einem der Pariſer Akademie 1686 vorgelegten Aufſatze. (Mémoires de Mathem. et de Phyſique par de la Hire, p. 79.) Tſchirnhauſen wollte ſeinen Irrthum nicht eingeſtehen, bis daß Joh. Bernoulli den Unterſchied der wahren Brennlinie von der vorgegebenen zeigte, (Acta Erud. 1692, p, 30; auch Lection. Hoſpitalianae XXVII.). Man möchte auf den Argwohn kommen, daß Tſchirnhauſen die Beſchaffenheit der Brennlinie habe errathen wollen, da er den Unterſchied ON der Ordinaten an den beiden Kreiſen eben ſo halbirt, wie der Halbmeſſer CD, der auch ein ſolcher Unterſchied iſt, von dem Brennpuncte F halbirt wird, und daß Zeichnungen ihn in der Vermuthung beſtärkt haben. Er weigerte ſich, den Pariſer Akademiſten ſeinen Beweis mitzutheilen. Doch ſagte er endlich in den Act. Erud. 1690. p. 71. daß er ſich in den weitläuftigen Rechnungen, wozu er die nöthigen Vortheile noch nicht gewußt habe, geirrt hätte. Er fand, daß die Länge der Brennlinie des Quadranten ſich zu dem Halbmeſſer wie 3 : 2 verhalte, welches in der That richtig iſt. Er muß dieſes durch Schlüſſe gefunden haben, welche die beſtimmte Beſchaffenheit der Brennlinie nicht erforderten.

16. Die Analyſten verfolgten die von Tſchirnhauſen und Huygens angefangene Unterſuchung eifrig, und waren bald damit zu Stande. Jakob Bernoulli gab in den Act. Erud. 1692 eine allgemeine Formel, die Länge des zurückgeworfenen Strahls bis an die Brennlinie mittelſt des Halbmeſſers der Krümmung zu beſtimmen. Er gab eine Conſtruction, den Punct der Diacauſtica auf dem gegebenen Strahle zu finden, a. a. O. 1693 (Opp. T. I. Nr. 49. 56. womit noch T. II. nr. 103. art. 17. zu verbinden iſt). Die Benennungen Catacauſtica und Diacauſtica rühren von ihm her. Sein Bruder, Joh. Bernoulli, gab eine algebraiſche Gleichung für die Brennlinie durch Zurückwerfung am Kreiſe (Act. Erud. 1692. Opp. T. I. nr. 6.), und handelte die ganze Materie von beiden Arten Brennlinien ausführlich ab in den

Lect. Hoſpit. XXVI – XXXII; und LVI – LVIII. In der Analyſe des infinemens petits von dem Marquis de l'Hopital iſt ſie mit vieler Deutlichkeit vorgetragen.

Brennpunct, focus, im geometriſchen Verſtande, iſt derjenige Punct innerhalb einer krummen Linie, in welchem alle an dieſelbe von einem beſtimmten Puncte aus, oder auch ſich parallel gezogene, und nach Art phyſiſcher Strahlen zurückgeworfene Linien vereinigt werden, indem die Winkel, welche jedes Paar Linien, eine auffallende und die zurückgeworfene, mit der berührenden machen, gleich groß ſind. Der Brennpunct liegt entweder auf derjenigen Seite der die Curve berührenden Linie, nach welcher die zurückgebogenen Linien gerichtet ſind, oder auf der entgegengeſetzten, ſo daß ihre Verlängerungen ſich in einem Puncte auf dieſer Seite treffen. In dem erſtern Falle iſt es ein Brennpunct im engern Verſtande, von der Art wie der phyſiſche Brennpunct einer gehörig gekrümmten materiellen Fläche; in dem andern iſt es ein bloßer geometriſcher Vereinigungs - oder vielmehr ein Zerſtreuungs = Punct. Brennpuncte der erſtern Art ſind in der Ellipſe und Parabel. Die Ellipſe hat zwey Brennpuncte auf ihrer großen Axe. Die Linien, welche von beiden an einen Punct des Umfanges gezogen werden, machen daſelbſt mit der berührenden gleich große Winkel auf derſelben Seite. In dem Kreiſe iſt der Mittelpunct zugleich Vereinigungspunct für die aus demſelben an den Umfang gezogenen, und in ſich zurückgehenden Linien. Die Parabel hat nur einen Brennpunct auf ihrer Axe. Die mit der Axe parallelen, gleichſam von einem unendlich entfernten Puncte her auffallenden Linien, und die von dem Brennpuncte an die Parabel gezogenen Linien, machen mit der berührenden gleich große Winkel an derſelben Seite. Die Hyperbel hat zwey Brennpuncte von der andern Gattung, Zerſtreuungspuncte. Die Linien, welche von dieſen beiden, auf der Axe belegenen, Puncten an die Hyperbel gezogen werden, machen mit der berührenden zwar gleich große Winkel, aber auf verſchiedenen Seiten

derſelben. Die zurückgeworfenen Strahlen ſind divergent, aus einander fahrend, und zielen rückwärts nach dem andern Brennpuncte.

G. W. Krafft zeigt in einer Abhandlung, Indagatio focorum in omnibus curvis poſſibilibus, Comm. novi Petrop. T. II. daß bloß die gewöhnliche Ellipſe und Parabel, jene zwey wirkliche Vereinigungs- oder Brennpuncte, dieſe einen einzigen, haben.

Briggiſche Logarithmen ſind die gewöhnlichen, zur Abkürzung der Rechnung bequemſten, Logarithmen, welche Heinrich Briggs (Profeſſor der Mathematik am Gresham-Collegium in London, und hernach zu Oxford, geſt. 1630) zum Theil berechnet, und an die Stelle der von Neper zuerſt berechneten natürlichen Logarithmen geſetzt hat.

Brounckerſche Reihen ſind unendliche Reihen, welche Lord Brouncker für die Quadratur der Hyperbel angegeben hat. Es ſind die erſten, durch welche der Inhalt eines hyperboliſchen Raumes gefunden iſt. Er machte ſie in den Philoſoph. Tranſactions T. III. für das J. 1668. nr. 34. bekannt, hatte ſie aber ſchon vor mehrern Jahren entdeckt. Der Aufſatz ſteht auch in dem erſten Theile der Sammlung von logarithmiſchen Schriften, die Maſeres in drey ſtarken Quartbänden veranſtaltet hat. Die Methode iſt zwar bloß auf die Hyperbel anwendbar, allein ſie iſt doch ein ſehr gutes Beyſpiel zu zeigen, wie man die beſondern Eigenſchaften einer Curve oder einer Relation von Größen benutzen mag, um Aufgaben dieſelbe betreffend aufzulöſen.

Es ſey AEZ (Fig. 58. Tab. IV.) ein Bogen einer gleichſeitigen Hyperbel von dem Scheitel A an genommen; C ihr Mittelpunct; CA die halbe Axe; CX eine der Aſymptoten; auf dieſe ſeyn die ſenkrechten AB, ED von den Puncten A, E der Hyperbel gezogen. Da dieſe parallel mit der andern Aſymptote ſind, ſo iſt $CD : CB = AB : ED$. Weil AC den Winkel der Aſymptoten

halbirt, und dieſer ein Rechter iſt, ſo iſt AB = CB. Es ſoll nun der hyperboliſche Raum ABDEHA durch das Quadrat von AB oder CB mittelſt einer Reihe ausgedruckt werden.

Man ziehe zu dem Ende die parallele EF mit BD, ſo iſt das Parallelogramm BDEF das erſte Glied dieſer Reihe. Nun halbire man BD in G, und ziehe die Ordinate GH, ſo iſt GH durch die Proportion CG : CB = AB : GH gegeben. Durch H ziehe man HK parallel mit BG, ſo iſt das Pgrm HKFL das zweyte Glied der Reihe. In den beiden hyperboliſchen Dreyecken AKH, HLE ſchneide man auf dieſelbe Art wie in dem AFE ein Parallelogramm ab, indem man durch die Mitte von BG und GD Ordinaten zieht, ſo ſind dieſe beiden Vierecke das dritte und vierte Glied der Reihe. Nun bleiben in dem hyperboliſchen Raume ABDEA vier Dreyecke übrig, in deren jedem wieder ein Parallelogramm abzuſchneiden iſt, wodurch das fünfte bis achte Glied erhalten wird. Auf dieſe Art wird die Reihe unbeſtimmt weit fortgeſetzt. Man ziehe AM parallel mit BD bis an die verlängerte DE, ſo kann man auf dieſelbe Art für den hyperboliſchen Raum AMEHA eine Reihe finden. Auch läßt ſich auf eine ähnliche Art das Segment AHEA berechnen. Denn man ziehe die Chorden der Bogen AH, HE, ſo läßt ſich das geradlinichte Dreyeck AHE durch die gegebenen Größen ausdrucken. Von den beiden Segmenten über AH und EH kann man wiederum auf gleiche Art in jedem ein geradlinichtes Dreyeck abſchneiden. Fährt man ſolchergeſtalt fort, ſo erhält man eine Reihe, deren Glieder immer kleiner werden.

Brouncker hat ſeine Methode nur an einem Beyſpiele gewieſen. Er nimmt AB : ED = 1 : $\frac{1}{2}$ oder CB : CD = 1 : 2, und findet, wenn AB oder CB = 1 geſetzt wird,

$$ABDEHA = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{7.8} + \frac{1}{9.10} + \text{etc.}$$

$$AMEHA = \frac{1}{2.3} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{8.9} + \frac{1}{10.11} + \text{etc.}$$

$$AEHA = \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{6.7.8} + \frac{1}{8.9.10} + \text{etc.}$$

Montucla hat in ſeiner Geſchichte der Mathem. 2. Th. 355. S. irriger Weiſe die zweyte Reihe für den hyperboliſchen Raum AHEF angeſetzt. Seine Nachricht von Brounckers Methode iſt zu unvollſtändig. Man könnte nach derſelben glauben, daß ſie auf das Verhältniß $1 : \frac{1}{2}$ für AB : ED eingeſchränkt ſey, wenn er nicht noch hinzufügte, daß Br. nach ſeiner Methode auch den Logarithmen von 10 berechnet habe.

Zum beſſern Verſtändniſſe der Methode füge ich die allgemeinen Formeln für die Rechtecke und Dreyecke bey, welche, jene in den hyperboliſchen Trapezien, dieſe in den Segmenten, nach der Reihe abzuſchneiden ſind. Brouncker hat dergleichen nicht gegeben.

Es iſt CF (Fig. 59.) ein Stück der einen Aſymptote einer gleichſeitigen Hyperbel, C der Mittelpunct, MNP ein Bogen derſelben, CD und DM; CF und FP zwey Paare rechtwinklichter Coordinaten. Man halbire DF in E, und ziehe die Ordinate EN. Durch P und N ſeyn PHG und NK parallel mit DF. Man ſetze CD = m,

$$DF = n, \text{ ſo iſt } MD = \frac{1}{m}, \; PF = \frac{1}{m+n},$$

$$NE = \frac{2}{2m+n}, \; NH = \frac{2}{2m+n} - \frac{1}{m+n}$$

$$= \frac{n}{(m+n)(2m+n)}, \text{ alſo das Pgrm. NHGK}$$

$$= \frac{nn}{2(m+n)(2m+n)}.$$

Man ziehe die Chorde MP, welche von EN in L geſchnitten werde. Es iſt $HL = \frac{1}{2} MG = \frac{1}{2}(MD - PF)$

$= \frac{n}{2m(m+n)}$. Vorher iſt gefunden NH

$= \frac{n}{(m+n)(2m+n)}$, alſo iſt NL

$= \frac{nn}{2m(m+n)(2m+n)}$. Das Δ NLP iſt

$= \frac{1}{2}$ NL $\times$ PH, alſo iſt

$$\Delta NLP = \frac{n^3}{8m(m+n)(2m+n)}.$$

Das Dreyeck NLM iſt dem NLP gleich, weil die Grundlinien ML, PL gleich ſind. Folglich iſt

$$\Delta MNP = \frac{n^3}{4m(m+n)(2m+n)}.$$

Man ſetze $n = \frac{1}{p}$, und $m = \frac{q}{p}$, ſo iſt das Pgrm.

$$NHGK = \frac{1}{(2q+1)(2q+2)},$$ und das Dreyeck

$$MNP = \frac{1}{2q(2q+1)(2q+2)}.$$

Es ſey zuerſt CD $= 1$, alſo MD $= 1$, ſo iſt bey der erſten Zweytheilung $q = p$; bey der zweyten kommt $2p$ ſtatt p, und q erhält die Werthe $2p$; $2p+1$. Bey der dritten Zweytheilung kommt $4p$ für $2p$, und q erhält die Werthe $4p$; $4p+1$; $4p+2$; $4p+3$. u. ſ. f.

Z. B. Es ſey DF $= 1$, ſo iſt $p = 1$, und für das erſte Pgrm. NHGK, iſt $q = 1$; für die zwey folgenden hat q die Werthe 2; 3; für die vier nächſten die Werthe 4; 5; 6; 7, u. ſ. f. Setzt man dieſe Werthe in unſere beiden Formeln, ſo erhält man die Glieder der erſten und dritten Brounckerſchen Reihe.

In dem zweyten Exempel, welches Brouncker berechnet, iſt MD : PF $= 5 : 4$, und CD $= 1$, alſo DF $= \frac{1}{4}$, und $p = 4$. Daher iſt $\Delta MNP = \frac{1}{8.9.10}$.

Für die zwey folgenden Dreyecke in dem Segmente hat q die Werthe, 8; 9; und die beiden Dreyecke ſind $\frac{1}{16.17.18}$; $\frac{1}{18.19.20}$. Für die folgenden vier Dreyecke hat q die Werthe 16, 17, 18, 19, und die vier Dreyecke ſind $\frac{1}{32.33.34}$; $\frac{1}{34.35.36}$; $\frac{1}{36.37.38}$; $\frac{1}{38.39.40}$; u. ſ. f.

Brouncker hat noch aus den berechneten Gliedern der Reihe, welche das hyperboliſche Segment ausdruckt, für die übrigen zwey nahe kommende Werthe gefunden, deren einer größer, der andere kleiner als dieſe noch übrigen iſt. Er berechnet daraus den natürlichen Logarithmen von 2 und 10 bis auf die ſechste Decimalſtelle. Es iſt nämlich die hyperboliſche Area ABDEHA (Fig. 58.) der natürliche Logarithme von CD, wenn CB zur Einheit der Längen, und das Quadrat von CB zur Einheit der Flächenräume genommen wird. Allein dieſe Methode Logarithmen zu berechnen iſt noch zu mühſam. Mercator gab zu derſelben Zeit, als Brouncker ſeine Quadratur der Hyperbel bekannt machte, ſeine Logarithmotechnie heraus, worin er eine leichtere Art die Logarithmen und hyperboliſchen Flächenräume, wie ABDEHA, zu berechnen, zeigte. Sie erfordert eine Infiniteſimalrechnung, die mit der Integration der Formel $x^n dx$ übereinkommt. Brounckers Quadratur iſt eigentlich dadurch merkwürdig, daß ſie keiner Infiniteſimalrechnung bedarf.

Bruch, gebrochne Zahl (Fractio), iſt diejenige, deren Einheit ein Theil der Einheit für die ganzen Zahlen (der Grund-Einheit) iſt. Ein Bruch enthält demnach zwey Begriffe, erſtlich die Bruchseinheit (unité fractionnaire), welche durch die Eintheilung der Einheit für die ganzen Zahlen, ſie mögen benannte oder unbenannte ſeyn, entſteht, und zweytens die Anzahl dieſer Bruchsein-

heiten. Z. B. $\frac{3}{4}$ und $\frac{7}{4}$, enthalten beide den 4ten Theil der Grund-Einheit einige mahl, jener Bruch 3 mahl, dieſer 7 mahl.

Die Zahl, welche die Menge der in der Grund-Einheit angenommenen Theile anzeigt, heißt der Nenner (denominator); die Zahl, welche die Menge der Bruchs-Einheiten angiebt, heißt der Zähler (numerator). Man ſchreibt ſie über einander, den Zähler über dem abſondernden Querſtriche, den Nenner darunter, wie $\frac{5}{8}$: $\frac{13}{8}$. Jenes bedeutet 5mal $\frac{1}{8}$, dieſes 13mal $\frac{1}{8}$.

Ein Bruch iſt ein Quotient, der aus der Diviſion des Zählers durch den Nenner entſteht. Denn es iſt einerley, ob man von dem ganzen Dividendus einen gewiſſen Theil, oder ob man von jeder Einheit deſſelben den eben ſo vielten Theil nimmt. Iſt der Dividendus kleiner als der Diviſor, z. B. wenn 7 durch 12 zu dividiren ſind, ſo kann man den Quotienten nicht anders als durch den Bruch $\frac{7}{12}$ (das iſt 7 mahl $\frac{1}{12}$) ausdrucken. Iſt der Dividendus größer als der Diviſor, ſo kann man dem Quotienten eine doppelte Form geben. Z. B. der Quotient von 19 durch 5 iſt $\frac{19}{5}$ oder $3\frac{4}{5}$. Es iſt nämlich $19 = 3 \times 5 + 4$. Soll der Quotient angeben, wie oft man den Diviſor von dem Dividendus wegnehmen könne, ſo iſt in dem Beyſpiele die Antwort: 3mahl und noch den 5ten Theil des Diviſors 4 mahl.

Ein wahrer oder eigentlicher Bruch (fractio vera) iſt kleiner als die Einheit, oder der Zähler deſſelben iſt kleiner als der Nenner, oder als die Menge der in der Einheit enthaltenen Bruchs-Einheiten, z. B. $\frac{3}{4}$.

Ein uneigentlicher Bruch (fractio ſpuria) iſt ſo groß oder größer als die Einheit, oder der Zähler deſſelben iſt ſo groß oder größer als der Nenner, z. B. $\frac{5}{5}$ oder $\frac{19}{5}$. Durch die wirkliche Diviſion wird ein ſolcher Bruch in eine ganze Zahl mit dem anhangenden Bruche verwandelt.

Ein **Bruchs-Bruch** iſt, wenn anſtatt von der Grund-Einheit einen gewiſſen Theil ein oder mehrmahl zu nehmen, von einem Bruche dieſes geſchieht. Z. B. $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{4}$ Thlr. Dies bedeutet den 3ten Theil von $\frac{3}{4}$ Thlr. 2 mahl, oder $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ Thlr. Ein Bruchs-Bruch wird leicht auf einen gewöhnlichen oder einfachen Bruch gebracht. Das Product der Zähler wird der Zähler, das Product der Nenner wird der Nenner des einfachen Bruches.

Bey benannten Zahlen ſind die der Haupt-Einheit nächſt kleinern Einheiten Brüche jener, die darauf folgenden kleinern Einheiten ſind Bruchs-Brüche, die auf dieſe folgende ſind Bruchs-Bruchs-Brüche. Z. B. 12 Pf. 9 Lth. 3 Qtchn. ſind $(12 + \frac{9}{32} + \frac{3}{4} . \frac{1}{32})$ Pfunde. Oder 8 Cent. 23 Pf. 5 Lth. 3 Quent. ſind $(8 + \frac{23}{110} + \frac{5}{32} . \frac{1}{110} + \frac{3}{4} . \frac{1}{32} . \frac{1}{110})$ Centner.

Ein **unreiner Bruch** oder **Doppelbruch** iſt ein ſolcher, deſſen Zähler und Nenner beide oder einer von ihnen Brüche ſind. Z. B. $\frac{7\frac{2}{5}}{18}$; $\frac{8}{4\frac{2}{3}}$; $\frac{4\frac{2}{7}}{9\frac{1}{5}}$. Nach dem erſten dieſer Brüche iſt die Grund-Einheit in 18 gleiche Theile getheilt; die Anzahl, die davon genommen wird, enthält einen Bruchtheil jenes Theils — Nach dem zweyten Bruche iſt die Grund-Einheit in zweyerley Theile getheilt, in 4 gleiche und 2 kleinere, deren jeder $\frac{1}{3}$ eines der 4 gleichen iſt. Von den 4 gleichen Theilen ſollen zufolge des Zählers 8 genommen werden. — Nach dem dritten zum Beyſpiele geſetzten Bruche iſt die Grund-Einheit in 9 gleiche Theile nebſt $\frac{1}{5}$ eines ſolchen Theils getheilt.

Der Zähler enthält einen der 9 Theile $4\frac{2}{7}$ mahl. — Die Doppelbrüche werden auf einfache gebracht, wenn man mit dem Produkte der Nenner in den Brüchen des Zählers und Nenners dieſe multiplicirt. So iſt der erſte Bruch $= \frac{37}{90}$; der zweyte $= \frac{24}{14} = \frac{12}{7}$; der dritte $= \frac{150}{322} = \frac{75}{161}$. Der Bruch $\frac{7}{\frac{2}{3}}$ iſt $= \frac{21}{2}$. Hier iſt die Bruchs-Einheit $\frac{2}{3}$ der Grund-Einheit, da $\frac{3}{2}$ derſelben die Grund-Einheit ausmachen. — Bey der Anwendung allgemeiner Formeln, die Brüche enthalten, kommt man oft auf Doppelbrüche. Auch bey gemeinen Rechnungen. Z. B. Wenn ein Friedrichsdo'r $4\frac{2}{3}$ Rthlr. hannöveriſch Geld iſt, und der Ducat $2\frac{3}{4}$ Rthlr., ſo iſt ein Friedrichsdo'r $= \frac{4\frac{2}{3}}{2\frac{3}{4}}$ Ducat. Rechnet man das Jahr zu $365\frac{1}{4}$ Tage, den Monath zu $29\frac{1}{2}$ Tage, ſo iſt ein Monath $= \frac{29\frac{1}{2}}{365\frac{1}{4}}$ Jahr.

Decimal-Brüche; Sexageſimal-Brüche; Kettenbrüche (continuirliche Brüche) ſ. an ihren Stellen.

Bruch-Rechnung iſt das Verfahren mit Brüchen zu rechnen.

Wenn man den Zähler eines Bruches durch eine Zahl multiplicirt oder dividirt, ſo wird der Bruch ſelbſt durch dieſe Zahl multiplicirt oder dividirt z. B. $\frac{3 \cdot 2}{11} = \frac{6}{11} = \frac{3}{11} \cdot 2$

Wird der Nenner eines Bruches durch eine Zahl multiplicirt oder dividirt, ſo wird der Bruch durch dieſe Zahl dividirt oder multiplicirt. Z. B. $\frac{7}{4 \cdot 3} = \frac{7}{12} = \frac{7}{4} : 3$.

Werden Zähler und Nenner eines Bruches durch dieſelbe Zahl multiplicirt oder dividirt, ſo bleibt der Werth des Bruches unverändert, und die Brüche ſind gleichgültige. Z. B. $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{24}{32}$.

Hierauf beruht die Reduction der Brüche mit ungleichen Nennern auf Brüche von einerley Nennern oder gleicher Benennung, oder das Einrichten der Brüche, welches bey der Addition und Subtraction ſolcher Brüche nothwendig iſt.

Die allgemeine Regel für das Einrichten der Brüche iſt: Man multiplicire Zähler und Nenner jedes Bruchs mit dem Producte der Nenner aller übrigen Brüche. Z. B. $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{3}{4}$ ſind $\frac{280}{420}$; $\frac{240}{420}$; $\frac{84}{420}$; $\frac{315}{420}$.

Oft kann man zu dem gemeinſchaftlichen Nenner mit einer kleinern Zahl ausreichen, als die nach dieſer Regel herauskommende iſt. Wenn nämlich zwey oder mehrere Nenner einen gemeinſchaftlichen Fa tor haben, ſo behält man dieſen nur bey einem Nenner bey, und läßt ihn bey den übrigen weg. Die Nenner ſeyn 6, 10, 14, ſo wird der kleinſte gemeinſchaftliche Nenner $= 2 . 3 . 5 . 7$. Denn es kommt hier nur darauf an, eine Zahl zu finden, worin alle Nenner aufgehen. Mit dem Quotienten dieſer Zahl, durch jeden Nenner wird der dazu gehörige Zähler multiplicirt.

Vorausgeſetzt, daß man jede Zahl in ihre einfachen Factoren zu zerlegen wiſſe, zerfälle man jeden Nenner in ſeine einfachen Factoren, und ſtreiche diejenigen aus, die ſchon aus andern Nennern vorkommen. Das Product der übrigen iſt der kleinſte gemeinſchaftliche Nenner. Z. B. die Brüche, welche auf einerley Benennung zu bringen ſind,

ſeyn $\frac{5}{12}, \frac{3}{10}, \frac{7}{8}, \frac{11}{15}, \frac{4}{21}, \frac{1}{14}$. Zerfällt man die Nenner, nach der Ordnung der Brüche, in ihre einfachen Factoren, und ſtreicht die überflüſſigen aus, ſo erhält man das Product

$$2.2.3 \times \not{2}.5 \times \not{2}.\not{2}.2 \times \not{3}.\not{5} \times \not{3}.\not{7} \times \not{2}.\not{7}$$

oder $2.2.3.5.2.7 = 840$ als den kleinſten gemeinſchaftlichen Nenner, und die Zähler der eingerichteten Brüche ſind 350, 252, 735, 616, 160, 60.

Die Reduction eines Bruches auf die kleinſten Zahlen im Zähler und Nenner, oder das Aufheben eines Bruchs, geſchieht mittelſt der Diviſion des Zählers und Nenners durch den größten gemeinſchaftlichen Factor, wofern ein ſolcher vorhanden iſt. Wie man dieſen findet, zeigt der Artikel: Theiler, gemeinſchaftlicher. Z. B. der Bruch $\frac{805}{2829}$ wird durch die Diviſion beider Zahlen durch 23 in den $\frac{35}{123}$ verwandelt. — Wie ein unverkleinerlicher Bruch mit dem möglich kleinſten Fehler in kleinen Zahlen ausgedruckt wird, zeigt der Artikel: Aufheben der Brüche.

Addition der Brüche. Man bringe ſie auf einerley Nenner, wenn ſie nicht ſchon ſie haben, und addire die Zähler. Die Summe wird als Zähler mit jenem Nenner verbunden. Z. B. $\frac{5}{6} + \frac{7}{10} + \frac{11}{14} = \frac{175}{210} + \frac{147}{210} + \frac{165}{210} = \frac{487}{210} = 2\frac{67}{210}$. Weil die Zähler nunmehr einerley Theile des Ganzen bedeuten, ſo kann man ſie als Größen einer Art zuſammen nehmen.

Subtraction der Brüche. Man bringe ſie, wenn es nöthig iſt, auf einerley Benennung, und ſubtrahire den kleinern Zähler von dem größern. Der Unterſchied

wird als Zähler über den gemeinſchaftlichen Nenner geſetzt. Z. B. $\frac{5}{6} - \frac{7}{10} = \frac{25}{30} - \frac{21}{30} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$.

Multiplication der Brüche. Wenn ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt werden ſoll, ſo multiplicire man den Zähler mit dieſer Zahl, oder dividire den Nenner durch dieſelbe. Z. B. $\frac{5}{8}$ durch 7 multiplicirt iſt $\frac{35}{8}$, und $\frac{5}{8}$ durch 4 multiplicirt iſt $\frac{20}{8}$ oder kürzer $\frac{5}{2}$ (ſ. Bruch).

Soll eine ganze Zahl durch einen Bruch multiplicirt werden, ſo multiplicirt man ſie durch den Zähler, und dividirt ſie durch den Nenner, z. B. $7 \times \frac{3}{4} = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$.

Soll ein Bruch durch einen Bruch multiplicirt werden, ſo multiplicirt man den Zähler jenes durch den Zähler des andern; eben ſo die Nenner; das erſtere Product iſt der Zähler, das andere iſt der Nenner des Bruchs, welcher dem Produkte der beiden Brüche gleich iſt. Z. B. $\frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$; und $\frac{5}{8} \times \frac{9}{4} = \frac{45}{32} = 1\frac{13}{32}$.

Sind mehrere Brüche in einander zu multipliciren, ſo giebt das Product aller Zähler den Zähler des Products, das Product aller Nenner den Nenner deſſelben. Z. B. $\frac{3}{4} \times \frac{5}{8} \times \frac{9}{7} \times \frac{11}{2} = \frac{1485}{448} = 3\frac{141}{448}$.

Da ein Product den Multiplicandus auf dieſelbe Art enthält, als der Multiplicator die Einheit, und ein Bruch $\frac{3}{7}$, oder allgemein, $\frac{m}{n}$, den nten Theil der Grund-Ein-

heit m mahl enthält, ſo muß man, bey der Multiplication durch $\frac{m}{n}$, den nten Theil des Multiplicandus m mahl nehmen, d. i. mit dem Nenner n dividiren, und mit dem Zähler m multipliciren. Die Multiplication mit einem Bruche iſt demnach eine gedoppelte Operation, ſowohl ein Vervielfältigen als Theilen, ſo wie ein Bruch zwey Begriffe enthält, den einer Bruchseinheit und den einer gewiſſen Menge derſelben. Man nennt es aber ein Multipliciren wegen der Übereinſtimmung mit der Multiplication durch eine ganze Zahl.

Diviſion der Brüche. Einen Bruch durch eine ganze Zahl zu dividiren, wird entweder der Nenner durch dieſelbe multiplicirt oder der Zähler dadurch dividirt. Z. B. $\frac{5}{8}$ durch 7 dividirt, iſt $=\frac{5}{56}$; und $\frac{8}{9}$ durch 4 dividirt iſt $=\frac{2}{9}$, (ſ. Bruch).

Soll eine ganze Zahl durch einen Bruch dividirt werden, ſo wird ſie durch den Nenner multiplicirt und durch den Zähler dividirt. Z. B. $9 : \frac{2}{5} = \frac{45}{2} = 22\frac{1}{2}$.

Soll ein Bruch durch einen Bruch dividirt werden, ſo multiplicirt man den Zähler des Dividendus durch den Nenner des Diviſors, und den Nenner jenes durch den Zähler dieſes; das erſtere Product giebt den Zähler, das andere den Nenner des Quotienten. Z. B. $\frac{4}{7} : \frac{3}{5} = \frac{20}{21}$ und $\frac{4}{7} : \frac{9}{5} = \frac{20}{63}$.

Der Quotient giebt denjenigen Theil des Dividendus an, welcher darin eben ſo enthalten iſt, als die Einheit in dem Diviſor. Nun entſteht die Grund-Einheit aus einem Bruche, $\frac{m}{n}$, mittelſt der Multiplication durch n und

Diviſion durch m, oder iſt $\frac{n}{m}$ dieſes Bruches. Alſo entſteht der Quotient aus dem Dividendus, bey der Diviſion durch den Bruch, $\frac{m}{n}$, auf dieſelbe Art, nämlich durch die Multiplication mit den Nenner n, und Diviſion mit dem Zähler m.

Der Quotient iſt ein Bruchtheil des Dividendus, nämlich $\frac{n}{m}$, daher mit dem Bruche $\frac{m}{n}$ dividiren ſo viel iſt als mit dem umgekehrten Bruche $\frac{n}{m}$ multipliciren.

Die Diviſion durch einen Bruch iſt eine gedoppelte Operation, ein Theilen und Vervielfältigen, die man wegen der Übereinſtimmung mit der Diviſion durch eine ganze Zahl Diviſion nennt.

Beym Dividiren und Multipliciren läßt ſich die Rechnung abkürzen, wenn man, wo es thunlich iſt, anſtatt der Multiplication des Zählers oder Nenners eine Diviſion des Nenners und Zählers vornimmt. So iſt

$$\frac{9}{8} \times \frac{4}{3} = \frac{3}{2}\text{; und } \frac{15}{8} : \frac{3}{2} = \frac{5}{4}.$$

Die Multiplication durch einen eigentlichen Bruch verkleinert; die Diviſion durch einen ſolchen Bruch vergrößert. In dieſer Abſicht iſt die Operation mit einem eigentlichen Bruche der mit ganzen Zahlen entgegengeſetzt. Aber in dem Weſentlichen ſtimmen ſie doch überein.

Die Regeln für die Multiplication und Diviſion der Brüche mögen am kürzeſten folgendergeſtalt erwieſen werden.

1. Es iſt $\frac{m}{n} \times n = m$, und $\frac{p}{q} \times q = p$, alſo $\frac{m}{n} \times n \times \frac{p}{q} \times q = mp$, und mittelſt der Diviſion durch $n \times q$ iſt $\frac{m}{n} \times \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}$.

2. Es iſt $\frac{m}{n} \times n : \frac{p}{q} \times q = \frac{m}{p}$, und mittelſt der Diviſion durch n und Multiplication durch q iſt $\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{mq}{np}$.

So wie mehrere Brüche unter einen gemeinſchaftlichen Nenner gebracht werden können, ſo kann man auch einen Bruch wieder in mehrere Brüche zerlegen, und zwar in ſo viele, als der Nenner einfache Factoren hat. Z. B. den Bruch $\frac{31}{35}$ zu zerlegen, ſetze man $\frac{31}{35} = \frac{a}{5} + \frac{b}{7}$, weil der Nenner die einfachen Factoren 5 und 7 hat. Die Summe der beiden Brüche iſt $\frac{7a + 5b}{35}$; folglich iſt $7a + 5b = 31$, wo a und b ganze Zahlen ſeyn ſollen. Die unbeſtimmte Analytik lehrt, wie man in dieſem Falle und in allen ähnlichen die Werthe von a und b, auch mit Einſchluß der negativen, findet, die der Forderung Genüge thun. Hier muß $31 - 7a$ ein Vielfaches von 5, oder $31 - 5b$ ein Vielfaches von 7 ſeyn. Die kleinſten Werthe von a und b, die dieſes leiſten, ſind 3 und 2, ſo daß $\frac{31}{35} = \frac{3}{5} + \frac{2}{7}$. Addirt man zu dem einem Bruche eine ganze Zahl und ſubtrahirt dieſelbe von dem andern, ſo erhält man zwey Brüche, deren Unterſchied der gegebene Bruch iſt. Z. B. $\frac{8}{5} - \frac{5}{7}$; $\frac{13}{5} - \frac{12}{7}$.

Zweites Beyſpiel. Der Bruch $\frac{79}{60}$ ſoll in drey Brüche mit den Nennern 3, 4, 5 zerlegt werden. Die Brüche ſeyn $\frac{a}{3} + \frac{b}{4} + \frac{c}{5}$, ſo iſt $20a + 15b + 12c = 79$.

Da $15b + 12c = 79 - 20a$ iſt, ſo iſt der kleinſte ganze poſitive Werth von $a = 2$, damit $79 - 20a$ ſich, ſo wie der Theil linker Hand, durch 3 dividiren laſſe, und man erhält $5b + 4c = 13$, woraus $b = +1$ und $c = +2$ folgt, ſo daß $\frac{79}{60} = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{2}{5}$ iſt. — Man kann einen oder den andern Zähler auch negativ nehmen, und dadurch den zugehörigen Bruch ſubtractiv machen.

Wenn in dem Nenner die Potenz eines einfachen Factors enthalten iſt, ſo kann man entweder dieſe Potenz als Nenner eines partiellen Bruchs behalten, oder dieſen Bruch in Brüche zerfällen, deren Nenner eine geometriſche Progreſſion ſind, von dem einfachen Factor an bis zu der Potenz deſſelben in dem gegebenen Bruche. Z. B. $\frac{31}{40} = \frac{2}{5} + \frac{3}{8} = \frac{2}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$. Der Bruch $\frac{1}{4}$ iſt ſubtractiv, weil $\frac{1}{2}$ größer als $\frac{3}{8}$ iſt.

Zu den Nennern der partiellen Brüche darf man keine nehmen, die gemeinſchaftliche Factore haben, wenn die Zähler ganze Zahlen ſeyn ſollen. Denn man nehme im Allgemeinen zwey Brüche $\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta}$, deren Summe $= \frac{a\beta + b\alpha}{\alpha\beta} = \frac{A}{\alpha\beta}$. Iſt nun der unverkleinerliche Bruch $\frac{A}{\alpha\beta}$ gegeben ſo iſt $A = a\beta + b\alpha$. Haben α und β einen gemeinſchaftlichen Factor, ſo läßt ſich auch A dadurch dividiren, wider die Vorausſetzung, daß der gegebene Bruch nicht verkleinerlich ſey. Eben ſo erhellt der Satz für mehrere Brüche.

Bruchzeichen ſind in der praktiſchen Geometrie die Zeichen, wodurch die Ruthen, Fuße, Zolle, Linien (Grane) angedeutet werden, nämlich °) ′) ″) ‴), z. B. 5° 8′ 8″ 3‴. Die kleine Null iſt das Zeichen der Einheit (wie $a^0 = 1$ iſt); die Striche zeigen die Potenzen

des Bruches $\frac{1}{10}$ oder $\frac{1}{12}$, oder eines andern an, womit die dadurch bezeichneten Zahlen zu multipliciren ſind. Es muß noch bemerkt werden, ob zehntheiliges oder zwölftheiliges Maaß bey den Längen gebraucht wird. Bey Flächenmaaß muß ein Q, oder Qu, oder □ angehängt werden; bey Körpermaaß ein C oderCb oder das Zeichen ⊖.

Buchſtabenrechnung iſt der erſte Theil der Analyſis, welcher die allgemeine Bezeichnungsart der Größen und ihrer Zuſammenſetzungen (Formen) lehrt, zugleich auch die gemeinſten und leichteſten Rechnungsarten oder Umwandlungen ihrer Formen enthält. Um allgemeine Sätze und Auflöſungen der Aufgaben zu erhalten, iſt eine allgemeine Charackteriſtik nothwendig. Man wird dadurch in Stand geſetzt, ſehr verwickelte Verbindungen von Größen auf das deutlichſte darzuſtellen und zu faſſen, welches in Worten nicht anders als ſehr weitläuftig oder gar nicht geſchehen könnte. Die Buchſtabenrechnung iſt eine Zeichenſchrift, welche allen Mathematikern in jedem Volke verſtändlich iſt. Es iſt gar nicht ſchwer ſie zu leſen und zu verſtehen.

1. Die Größen werden durch Buchſtaben, als Symbole, dargeſtellt, die bekannten durch die erſten Buchſtaben des Alphabets, die unbekannten durch die letzten, oder die unveränderlichen (als beſtimmt gedachte) durch die erſtern, die veränderlichen durch die letztern. Die mittlern Buchſtaben, m, n, p, werden ſchicklich angewandt, ein Vielfaches anderer Größen zu bezeichnen; auch zur Bezeichnung der Exponenten von Potenzen. Man nimmt zu der Bezeichnung benannter Größen oft die Anfangsbuchſtaben der Worte, welche die Sprache für ſie hat, dieſes aber wird nicht ſelten unbequem, und wird unthunlich, wenn zwey Wörter einerley Anfangsbuchſtaben haben. — So wie man bey unbenannten Zahlen die Art der Einheit unbeſtimmt läßt, ſo bleibt bey den Bezeichnungen, a, b; m, n; y, z; die Menge der Einheiten und ihrer Theile unbeſtimmt. Es wird nur ein Grad der Abſtraction mehr erfordert, um ſich darunter Größen vorzuſtellen,

als bey unbenannten Zahlen. — Die Buchſtaben können jede Art von Größe bedeuten, bloße Zahlengrößen, geometriſche Größen, Kräfte, Zeiten, Geſchwindigkeiten. Die Analyſis gebraucht eigentlich nur die unbenannten Größen, in Beziehung auf eine unbeſtimmte Einheit; die Anwendung hat es mit benannten Größen zu thun, wobey aber immer eine gewiſſe Einheit angegeben werden muß, wenn die Unterſuchung ſich der Rechnung bedient.

2. Die Zeichen, wodurch die Zuſammenſetzungsart der Größen dargeſtellt wird, ſind erſtlich die Zeichen der vier gemeinſten Rechnungsarten, der Addition (+), der Subtraction (—); der Multiplication (. oder ×, oder unmittelbare Zuſammenſtellung), der Diviſion ein Strich zwiſchen Dividendus und Diviſor, oder (:); der Vereinigung zu einem Ganzen, durch zwey Klammern ( ); der Potenzierung (durch den Exponenten oben an der Wurzelgröße); der Wurzelausziehung (√); die Zeichen der Gleichheit, (=) und der Ungleichheit (> oder <). Dieſe ſind die, welche am häufigſten gebraucht werden. S. Zeichen.

3. Ein einfaches Symbol, wie a, vertritt oft die Stelle einer aus mehreren Größen zuſammengeſetzten Größe, der Abkürzung im Rechnen wegen, Für ſich allein zeigt es eine formloſe Größe an, die mit andern verbunden werden ſoll.

I. Addition.

4. Wenn die Theile, woraus ein Ganzes zuſammengeſetzt wird, keine Form haben, oder eintheilig ſind, ſo werden ſie bloß durch das Zeichen + verbunden.

$$a + b + c + d = S$$

bedeutet ein Ganzes S, welches aus den verſchiedenen unbeſtimmten, formloſen Theilen oder eintheiligen Größen, a, b, c, d, zuſammengeſetzt wird.

5. Wenn die Theile des ganzen S wieder aus Theilen zuſammengeſetzt ſind, ſo werden die gleichnamigen Theile

zuſammengenommen, und die Anzahl derſelben wird durch eine vorgeſetzte Zahl, beſtimmte oder unbeſtimmte, bemerkt. Z. E.

$$\begin{array}{l}
3a + 5b + 2c = A \\
7a + 3b + 8c + 6d = B \\
2a + 4b + 3c + 2d + e = C \\
\hline
12a + 12b + 13c + 8d + e = A + B + C = S.
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
ma + nb + pc = A \\
2na + 3nb + qc = B \\
\hline
(m + 2n)a + 4nb + (p + q)c = A + B = S.
\end{array}$$

II. Subtraction.

6. Die Subtraction ſtellt einen Theil des Ganzen durch das Ganze und den andern Theil dar, alſo bey formloſen und eintheiligen Größen folgendergeſtalt:

$$a - b = U,$$

wo a das Ganze, b der eine Theil, (Subtrahendus) und der andere Theil (der Unterſchied) U iſt.

7. Wenn die abzuziehende Größe aus einigen Theilen beſteht, ſo wird jeder Theil abgezogen.

$$a - (b + c) = a - b - c = U.$$

Denn es iſt das Ganze, $a = U + (b + c) = U + b + c$, alſo $a - b - c = U$.

8. Iſt die abzuziehende Größe ein Unterſchied zweyer, nämlich $b - c$, ſo iſt

$$a - (b - c) = a - b + c = U.$$

Denn es iſt das Ganze, $a = U + (b - c) = U + b - c$, alſo $a - b + c = U$.

9. Wenn ſowohl das Ganze (Minuendus) als der Subtrahendus aus mehreren Theilen beſtehen, ſo werden

die Theile des Subtrahendus mit entgegengeſetzten Vorzeichen zu den ihnen gleichartigen des Minuendus geſetzt: und bey verſchiedenen Vorzeichen derſelben in dem Aggregate wird dem Unterſchiede das Vorzeichen des größern gegeben. Z. B.

$$\begin{array}{r} 3a+2b-7c-3d+4e-f=A \\ a+5b-2c-4d-3e+3f=B \\ \hline 2a-3b-5c+d+7e-4f=A-B. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ma+nb+pc=A \\ 2na-3nb-qc=B \\ \hline (m-2n)a+4nb+(p+q)c=A-B. \end{array}$$

In dem Falle daß hier $2n > m$ iſt, wird $-(2n-m)a$ ſtatt $+(m-2n)a$ geſetzt. Der erſte Terminus bekommt das Zeichen + nicht vorgeſetzt; und iſt alsdann additiv; ſoll er aber ſubtractiv ſeyn, ſo muß dieſes durch das Vorzeichen — angezeigt werden.

Aggregation.

10. Wenn Größen, die aus additiven und ſubtractiven Theilen zuſammengeſetzt ſind, addirt werden, ſo nenne man dieſes Zuſammennehmen, Aggregation. Z. B.

$$\begin{array}{r} 3a+2b+7c-4d=A \\ 5a-8b-4c-3d=B \\ \hline 8a-6b+3c-7d=A+B. \end{array}$$

11. Ein Aggregat iſt nämlich eine Zuſammenſetzung von mehreren Theilen, ſie mögen einerley oder verſchiedene Vorzeichen haben, und begreift alſo ſowohl Summe als Unterſchied. In der allgemeinen Rechnung werden die Zuſammenſetzungen von Größen, welche ſich nur durch die Vorzeichen einer oder mehrerer dieſer Größen unterſcheiden, bloß für Abänderungen einer und derſelben Form gehalten, ſo daß der Beweis oder die Aufſöſung für einen

Fall, mutatis mutandis, auch für jeden der andern gilt. Da alſo eine Zuſammenſetzung einer Größe aus mehreren Theilen alle durch die Vorzeichen verſchiedene Fälle begreift, ſo kann man ſie weder eine Summe (im eigentlichen Verſtande) noch einen Unterſchied nennen, ſondern muß ihr einen allgemeinern Namen, Aggregat, geben.

III. Multiplication.

12. Die Multiplication zweyer eintheiligen Größen, a, b, wird durch ihre bloße Zuſammenſtellung angezeigt, als $ab = P$. So vielmahl die Einheit in einer der beiden, a, enthalten iſt, ſo vielmahl iſt die andere, b, in dem Producte, P, enthalten.

13. Es iſt $(a + b)c = ac + bc$, und

$$(a - b)c = ac - bc.$$

wo die Klammern die Vereinigung zu einem Factor anzeigen. Der Beweis iſt leicht.

14. Ferner iſt

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d)$$
$$= ac + ad + bc + bd.$$
$$(a - b)(c + d) = a(c + d) - b(c + d)$$
$$= ac + ad - bc - bd.$$
$$(a - b)(c - d) = a(c - d) - b(c - d)$$
$$= ac - ad - bc + bd.$$

Hier ſieht man deutlich den Grund, warum verſchiedene Vorzeichen der Factoren in dem Producte das Vorzeichen —; gleiche Zeichen aber + geben.

15. Wenn die Factoren aus mehr als zwey Theilen beſtehen, ſo bezeichne man alle mit + begleiteten in dem einem Factor durch A, in dem andern durch C; alle mit — verbundenen in jenem durch —B, die in dieſem durch

— D. Nun iſt (A — B) (C — D) = AC — AD — BC + BD. So erhellt, daß das Totalproduct aus den Partialproducten jedes Theils des einen Factors in jeden Theil des andern zuſammengeſetzt wird, und daß die Vorzeichen die gleich vorher gegebene Regel befolgen.

16. Wenn drey oder mehr Factoren vorhanden ſind, ſo enthält das Product derſelben alle Partialproducte aus jedem Theile jedes Factors in einen Theil jedes der andern Factoren. Es ſeyn drey Factoren, A — B; C — D; E — F, wo A, C, E, die mit + begleiteten Theile, B, E, F die mit — begleiteten bedeuten. Es iſt (A — B) (C — D) (E — F) = (AC — AD — BC + BD) (E — F) = (ACE — ACF — ADE + ADF — BCE + BCF + BDE — BDF. Wo hier einer oder drey mit dem Vorzeichen — behaftete Factoren in einem Partialproducte vorkommen, erhält dieſes das Vorzeichen (—); wo zwey ſolche Factoren zuſammen kommen, erhält das Product das Vorzeichen (+). Überhaupt giebt eine ungerade Anzahl Partial-Factoren, die mit dem Vorzeichen (—) begleitet ſind, dem Partialproducte das Vorzeichen (—), eine gerade Anzahl das Vorzeichen (+).

17. Mehrtheilige Größen pflegt man nach den Potenzen einer gewiſſen Größe, die man alsdann durch einen der letzten Buchſtaben des Alphabets zur Unterſcheidung bezeichnen mag, zu ordnen; ihr Product gleichfalls. Dieſe Größe wird hier ſo gebraucht, wie die Zehn in unſerm Zahlenſyſtem.

Multiplic.	$5xx$	$+ 4ax$	$- 7bb$			
Multiplic.	$3xx$	$- 9ax$	$+ 2bb$			
1. P. P.	$15x^4$	$+ 2ax^3$	$- 21b^2x^2$			
2. - -		$- 45ax^3$	$- 36a^2x^2$	$+ 63ab^2x$		
3. - -			$+ 10b^2x^2$	$+ 8ab^2x$	$- 14b^4$	
Totalpr.	$15x^4$	$- 33ax^3$	$- 36a^2x^2$	$+ 71ab^2x$	$- 14b^4$	
			$- 11b^2x^2$			

Von der allgemeinen Multiplication zweyer und mehrerer ſolcher Reihen ſ. die Artikel Multiplication der Reihen, und combinatoriſche Analyſis.

18. Einige merkwürdige Producte:

I. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

II. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

III. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

IV. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

V. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

VI. $(a+b)^2(a-b) = a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$

VII. $(a-b)^2(a+b) = a^3 - a^2b - ab^2 + b^3$

VIII. $(a^2 + ab + b^2)(a-b) = a^3 + b^3$

IX. $(a^2 - ab + b^2)(a+b) = a^3 + b^3$

X. $(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$
$(a-b) = a^n - b^n$

XI. $(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 \ldots \pm ab^{n-} \mp b^{n-1})$
$(a+b) = a^n \mp b^n$, das obere Vorzeichen für ein gerades n; das untere für ein ungerades n.

Die Formeln I. und II; IV. und V.; VI. und VII.; VIII. und IX.; X. und XI. zeigen, daß wenn in den Factoren ein Theil ſein Vorzeichen durchgängig ändert, dieſes auch in dem Producte geſchieht, wo der Theil vorkommt. Es behält aber das Quadrat ſein Vorzeichen, weil darin zwey Factoren ihr Vorzeichen ändern. Die Formel III. unterſcheidet ſich von I. und II. dadurch, daß b nur in dem einen Factor das Vorzeichen ändert; daher hat auch das Product eine ganz andere Form. Eben ſo verhält es ſich mit VI. und VII. in Abſicht auf V. und VI.

Product binomiſcher Factoren in unbeſtimmter Anzahl.

19. Das Product aus einer unbeſtimmten Anzahl binomiſcher Factoren,

$(1 + ax)(1 + bx)(1 + cx)(1 + dx)(1 + ex)$. etc. ſey =

$1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 +$ etc. ſo iſt A die Summe aller Factoren a, b, c, d, e, etc.; B die Summe der Producte je zweyer wie ab, ac, bc, etc.; C die Summe der Producte je dreyer, wie abc, abd, acd, etc.; D die Summe der Producte je vierer, wie abcd: E die Summe der Producte je fünfer, wie abcde; u. ſ. f. Jedes Partialproduct enthält nämlich aus jedem binomiſchen Factor einen Theil als Factor. Nimmt man aus jedem den Theil 1, ſo entſteht daraus der erſte Theil, 1, des Totalproducts. Die Anzahl der binomiſchen Factoren ſey = m. Man nehme aus je m — 1 derſelben den Theil 1, ſo kommt dazu aus dem rückſtändigen mten ein Theil, wie ax oder bx, u. dgl. Die Summe aller ſolcher einzelnen Partialproducte iſt das collective Partialproduct Ax. Nun nehme man aus je m — 2 binomiſchen Factoren den Theil 1, ſo kommt dazu aus den zwey übrigen ein Factor, wie ax; bx oder abx^2, Daraus entſteht das collective Partialproduct Bx^2. Darauf nehme man aus je m — 3 binomiſchen Factoren den Theil 1, ſo kommt dazu aus den drey übrigen ein Factor wie ax. bx. cx oder $abcx^3$. Die Summe dieſer Partialproducte iſt Cx^3. So geht es fort für jede folgende Gattung von Partialproducten. Zuletzt kommt das einzelne Partialproduct aus dem zweyten Theile jedes binomiſchen Factors. Dieſes iſt das Product aus allen Factoren a, b, c, etc. in x^m.

Anwendungen dieſes Satzes in der combinatoriſchen Analyſis (47), und in der Lehre von den Gleichungen. (ſ. Gleichung VI. 1.).

Unterſchiede der Quadrate und Cuborum, deren Wurzeln in arithmetiſcher Progreſſion ſind.

20. Es ſeyn die Wurzeln a; $a + d$; $a + 2d$, ſo ſind die Quadrate I. a^2. II. $a^2 + 2ad + d^2$. III. $a^2 + 4ad + 4d^2$. Die Unterſchiede der Quadrate ſind I. $2ad + d^2$. II. $2ad + 3d^2$. De zweyte Unterſchied iſt $= 2d^2$, unveränderlich, was auch a für einen Werth hat.

21. Die Wurzeln ſeyn a; $a + d$; $a + 2d$; $a + 3d$, ſo ſind die Cubi I. a^3. II. $a^3 + 3a^2d + 3ad^2 + d^3$. III. $a^3 + 6a^2d + 12ad^2 + 8d^3$. IV. $a^3 + 9a^2d + 27ad^2 + 27d^3$. Die erſten Unterſchiede ſind I. $3a^2d + 3ad^2 + d^3$. II. $3a^2d + 9ad^2 + 7d^3$. III. $3a^2d + 15ad^2 + 19d^3$. Die zweyten Unterſchiede ſind I, $6ad^2 + 6d^3$. II. $6ad^2 + 12d^3$. Der dritte Unterſchied iſt $6d^3$, unveränderlich, was auch a für einen Werth hat.

IV. Diviſion.

22. Die Diviſion eintheiliger Größen kann nur angedeutet werden, als $\frac{a}{b} = Q$, wo a der Dividendus, b der Diviſor, Q der Quotient iſt. Wenn beide einen gemeinſchaftlichen Factor haben, ſo läßt man dieſen weg, als $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} = Q$. Auch den Quotienten mehrtheiliger Gröſſen kann man vollſtändig nicht anders als auf die erſte Art ausdrucken, wenn ſie keinen gemeinſchaftlichen Factor haben, oder der Diviſor nicht ſelbſt ein Factor des Dividendus iſt. Alſo iſt $\frac{a + b}{c - d}$ der einzige vollſtändige Ausdruck des Quotienten von $a + b$ durch $c - d$ dividirt.

23. Um zu erfahren, ob der Diviſor ein Factor des Dividendus ſey, oder auch, um den Quotienten als ein Aggregat behandeln, und mit andern Größen verbinden zu

können, ſtellt man die Diviſion auf dieſelbe Art, wie für Zahlen, an. Man ordne Dividendus und Diviſor nach den Potenzen einer Größe, und dividire den erſten Theil des Dividendus D durch den erſten Theil des Diviſors d, ſo erhält man den erſten Theil q des Quotienten Q. Das Product q in den ganzen Diviſor d wird von D abgezogen. Finden ſich in jenem Theile, die nicht in dieſem vorhanden ſind, ſo ſetze man ſie zu D mit beiden entgegengeſetzten Vorzeichen, als wodurch D nicht geändert wird. Nun kommt der abzuziehende Theil mit entgegengeſetzten Vorzeichen in den Reſt. Der erſte Theil des Reſtes durch den erſten Theil des Diviſors dividirt, giebt den zweyten Theil q' des Quotienten Q. So fährt man fort, bis entweder o zum Reſte kommt, oder bis man es ſchicklich findet abzubrechen, und den Reſt mit dem Diviſor dividirt, zuzufügen, vielleicht auch unter gewiſſen Bedingungen wegzulaſſen. Es iſt zu merken, daß der Quotient auch ſubtrahirte Theile enthalten kann. Hat der erſte Theil eines Reſtes das Vorzeichen —, ſo bekommt es der zugehörige Theil von Q auch. Es zeigt an, daß der Quotient, ſo weit er gefunden worden, zu groß iſt. Das Product aus dem Diviſor in jeden Theil des Quotienten muß ſich in dem Dividendus finden, es ſey nun, daß es urſprünglich da war, oder auf die vorher gewieſene Art hineingebracht iſt. In dem letztern Falle heben ſich bey der Multiplication des Diviſors in den Quotienten, einige Theile, die daher in dem Dividendus nicht erſcheinen, bey der Diviſion aber hineingebracht werden. Als Beyſpiel nehme man ſelbſt das obige Product in (17.), und dividire es durch einen der Factoren, ſo wird der Quotient der andere Factor.

24. Es wird durch die Diviſion gefunden:

$$\text{I. } \frac{a+x}{b+x} = \frac{a}{b} - \frac{a-b}{b}\cdot\frac{x}{b} + \frac{a-b}{b}\cdot\frac{x^2}{b^2} - \frac{a-b}{b}\cdot\frac{x^3}{b^3}$$

$$+ \frac{a-b}{b}\cdot\frac{x^4}{b^4} - \text{etc.}$$

Die erſte Reihe dient, wenn $\frac{x}{b}$ ein ächter Bruch iſt, die andere, wenn $-\frac{b}{x}$ ein ſolcher Bruch iſt. Denn in dem erſten Falle würde die zweite Reihe nicht convergiren, in dem zweiten nicht die erſte.

25. Wenn in dem Dividendus und Diviſor eine oder mehrere der Theile negativ werden (ihr Vorzeichen ändern), ſo geſchieht dies auch in dem Quotienten. So iſt

$$\frac{a-x}{b-x}=\frac{a}{b}+\frac{a-b}{b}\cdot\frac{x}{b}+\frac{a-b}{b}\cdot\frac{x^2}{b^2}+\text{ etc.}$$

$$\frac{x+a}{x-b}=1+\frac{a+b}{x}+\frac{b(a+b)}{x^2}+\text{ etc.}$$

26. Es iſt

I. $$\frac{a}{1+x}=a-ax+ax^2-ax^3+ax^4-\text{ etc.}$$

II. $$\frac{a}{1-x}=a+ax+ax^2+ax^3+ax^4+\text{ etc.}$$

III. $$\frac{a}{x-1}=a\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}+\text{ etc.}\right)$$

IV. $$\frac{a^n-b^n}{a-b}=a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2\ldots\ldots+b^{n-1}$$

V. $$\frac{a^n\pm b^n}{a+b}=a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2\ldots\pm b^{n-1}$$

Die vierte dieſer Formeln kann zur Erläuterung der Differentialrechnung gebraucht werden. Je näher a und b ſich kommen, deſto näher kommt $\frac{a^n-b^n}{a-b}$ dem Werthe na^{n-1}. Die Glieder aller dieſer Reihen, abſolut genommen, machen eine geometriſche Reihe aus.

$$\text{II. } \frac{x+a}{x+b} = 1 + \frac{a-b}{x} - \frac{b(a-b)}{x^2} + \frac{b^2(a-b)}{x^3}$$
$$- \frac{b^3(a-b)}{x^4} + \text{etc.}$$

V. Leichtere und allgemeinere Art der Diviſion.

27. Da der Quotient nach den Potenzen derſelben Größen fortſchreitet, nach welchen Dividendus und Diviſor geordnet ſind, ſo nehme man für den Quotienten die Form $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ etc. an, wenn jene dieſe Form haben, und beſtimme die Coefficienten A, B, C, D, etc. mittelſt der Gleichheit des Dividendus und des Products aus Diviſor und Quotienten. Es ſey allgemein

Dividendus $= a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 +$ etc.
Diviſor $= \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 +$ etc.
Quotient $= A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 +$ etc.

Nun iſt $(\alpha + \beta x +$ etc.$)(A + Bx +$ etc.$) = a + bx +$ etc. Entwickelt man jenes Product, ſo entſteht eine nach den Potenzen von x fortſchreitende Reihe, die mit der Reihe $a + bx + cx^2 +$ etc. identiſch ſeyn muß, damit die Gleichheit nicht von x abhangen, als welches jeden Werth muß erhalten können, (ſ. auch Methode der unbeſtimmten Coefficienten). Die Coefficienten derſelben Potenzen ſind daher in beiden Reihen gleich. Dies giebt nun die Gleichungen:

$$a = \alpha A$$
$$b = \alpha B + \beta A$$
$$c = \alpha C + \beta B + \gamma A$$
$$d = \alpha D + \beta C + \gamma B + \delta A$$
$$e = \alpha E + \beta D + \gamma C + \delta B + \varepsilon A$$
etc. etc.

Setzt man nun aus der erſten Gleichung den Werth von A, aus der zweyten den Werth von B, u. ſ. f. in die folgenden Gleichungen, ſo wird

$\alpha A = a$

$\alpha^2 B = \alpha b - \beta a$

$\alpha^3 C = \alpha^2 c - \alpha(\beta b + \gamma a) + \beta^2 a$

$\alpha^4 D = \alpha^3 d - \alpha^2(\beta c + \gamma b + \delta a)$
$\quad + \alpha(\beta^2 b + 2\beta\gamma a) - \beta^3 a.$

$\alpha^5 E = \alpha^4 e - \alpha^3(\beta d + \gamma c + \delta b + \varepsilon a)$
$\quad + \alpha^2(\beta^2 c + 2\beta\gamma b + (2\beta\delta + \gamma^2) a)$
$\quad - \alpha(\beta^3 b + 3\beta^2\gamma a) + \beta^4 a.$

etc.

Das Geſetz der Formation iſt faßlich und ſehr harmoniſch. Wenn die Coefficienten durch ihre Stellen bezeichnet werden,

	1,	2,	3,	4,	5,	etc.
I.	a,	b,	c,	d,	e,	etc.
II.	α,	β,	γ,	δ,	ε,	etc.
III.	A,	B,	C,	D	E,	etc.

ſo enthält das Product das mten Coefficienten aus der Reihe III. im α^m alle diejenigen Combinationen von je einem Coefficienten aus I. in m — 1 Coefficienten aus II. verſchiedene oder nicht verſchiedene, in welchen die Summe der Stellenzahlen dieſelbe, und = 2m —, iſt. Die gleichen Combinationen ſind ſo oft vorhanden, als ſich die Coefficienten aus II. mit Ausſchließung des erſten α darin verſetzen laſſen. Die Glieder, wenn ſie nach den mit ihnen verbundenen Potenzen von α geordnet werden, haben abwechſelnde Vorzeichen. So enthält z. B. $\alpha^5 E$ die Combinationen von 5 Größen, deren eine aus I. die andern 4 aus II. genommen ſind. Die Summe der Stellenzahlen iſt = 9. Da $\beta\gamma$ ſich zweymahl verſetzen läßt ſo hat die Combination $\alpha^2\beta\gamma b$ den numeriſchen Factor 2. Die Combination, $3\alpha\beta^2\gamma a$ hat den Factor 3, weil $\beta^2\gamma$ ſich dreymahl verſetzen läßt.

28. Zum Beyſpiele dient der Quotient eines Sinus dividirt durch den Coſinus, wenn beide durch den zugehöri-

gen Winkel ausgedruckt werden, der Quotient iſt die Tangente deſſelben Winkels durch dieſen ausgedruckt; ſ. Cyklometrie, und Bernoulliſche Zahlen.

Die hier gewieſene Methode gehört zu der Anwendung der Lehre von den Combinationen. S. combinatoriſche Analyſis.

VI. Bruchrechnung.

29. Es iſt I. $a + \frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c}$

II. $a - \frac{b}{c} = \frac{ac-b}{c}$

III. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

IV. $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$

V. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

VI. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$

Die Beweiſe ſind in dem Artikel: Bruchrechnung, anzutreffen.

Aus dem Satze von der Zuſammenſetzung zweyer Verhältniſſe werden die Formeln V. VI. ſehr gut hergeleitet. Es iſt $1 : \frac{a}{b} = b:a$, weil $1 = \frac{b}{b}$ iſt. Gleichfalls iſt $1 : \frac{c}{d} = d:c$. Folglich iſt $1 : \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = bd:ac$ oder $1 : \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = 1 : \frac{ac}{db}$. Da die vorhergehenden Glieder der beiden Verhältniſſe gleich ſind, ſo ſind es die nachfolgenden auch.

Ferner iſt zuerſt $\frac{a}{b} : = a : b$, und $1 : \frac{c}{d} = d : c$;

alſo $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = ad : bc$; oder $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} : 1$

das iſt, der Quotient von $\frac{a}{b}$ durch $\frac{c}{d}$ iſt $= \frac{ad}{bc}$.

C.

Canon iſt erſtlich eine allgemeine Regel zur Auflöſung einer geometriſchen oder algebraiſchen Aufgabe in allen ähnlichen und verwandten Fällen. In dieſer Bedeutung kommt das Wort meiſtens nur bey ältern Schriftſtellern vor. Die Neuern gebrauchen die Ausdrücke: Regel, Vorſchrift, Formel, Methode.

Zweytens iſt Canon eine Tafel berechneter Größen in einer beſtimmten Fortſchreitung, als eine Sammlung von einzelnen Vorſchriften. Z. B. Canon naturalis triangulorum, d. i. die Tafel der trigonometriſchen Linien; Canon artificialis triangulorum, die Tafel ihrer Logarithmen; Canon ſexagenarius ſ. hexacontadon, eine zur Multiplication ſechszigtheiliger Brüche eingerichtete Tafel; Canon Logarithmorum. Auch von aſtronomiſchen Tafeln wird in ältern Zeiten die Benennung Canon gebraucht, als in den Prutenicis tabulis coeleſtium motuum auct. Er. Reinholdo, Vitemb. 1585, worin die Tafeln die Überſchrift Canon haben, als Canon aſcenſionum rectarum; canones aequalium motuum et proſtaphaereſeon, etc.

Was Canon in der theoretiſchen Muſik, und Canon paſchalis in der Chronologie bedeuten, wird in der zweyten Abtheilung dieſes Werks vorkommen.

Canonion, einerley mit Canon, nur etwa von geringerm Umfange. In den gleich vorher angeführten Pruteniſchen Tafeln kommen ein paar Täfelchen vor, die

die Ueberſchrift, Canonion führen. In einem ſeltenen trigonometriſchen Werke von Vieta (varia opera mathematica, Pariſ. 1579 u. 1609. Fol.) kommt eine ausführliche Tafel für rechtwinklichte Dreyecke mit rationalen Seiten vor, welche mit Canonion überſchrieben iſt, da die Tafel der Sinus, Tangenten und Secanten in demſelben Werke die Benennung, Canon, hat.

Canoniſch iſt, was zur Regel gebraucht wird. Harriot nennt aequatio canonica diejenige, worin die Formation der Coefficienten aus den Wurzeln der Gleichung ſichtbar iſt, weil ſie zur Vergleichung mit einer gegebenen Gleichung dient. Die Analogien zur Berechnung eines rechtwinklichten Dreyecks, geradlinichten oder ſphäriſchen, nennt Vieta in dem gleich vorher angeführten Werke analogias canonicas.

Capacität iſt der Inhalt eines Körpers, insbeſondere eines Gefäßes, verglichen mit einem gewiſſen Maaße, als der Einheit für die Räume.

Capax (faſſend, franz. capable) wird von einem Kreisabſchnitte geſagt, ſo fern dieſer einen gewiſſen Winkel faßt, deſſen Scheitel nämlich in den Bogen fällt, und deſſen Schenkel durch die Endpuncte des Kreisbogens gehen. Alle ſolche Winkel in demſelben Abſchnitte ſind ſich gleich. Abſchnitte verſchiedener Kreiſe, die einerley Winkel faſſen, ſind ähnlich.

Capitulum iſt in der alten Algebra eine algebraiſche Gleichung mit gewiſſen Beſtimmungen der Form und Zeichen. Z. B. Capitulum cubi aequalis rebus et numero iſt, was wir jetzt durch die Gleichung, $x^3 = ax + b$, ausdrucken. Jeder beſondere Fall gab ein Capitulum.

Cardans Regel iſt eine algebraiſche Formel für die Wurzel einer cubiſchen Gleichung, wenn dieſe nur eine einzige mögliche Wurzel hat. Sie iſt in dem Artikel Gleichung, III. 14, 15. vorgetragen. Sie ſollte eigent-

lich die Regel des Tartalea heißen, ſ. Geſchichte der Algebra in dem Artikel, Algebra.

Hier iſt zu zeigen, wie dieſe Formel auch zur Auflöſung der Gleichungen mit drey möglichen Wurzeln angewandt werden kann, ungeachtet ſie für dieſen Fall unmögliche Größen enthält.

1. Die cubiſche Gleichung ſey, nach weggeſchafftem zweiten Gliede, wenn es vorhanden war, $x^3 - bx - c = 0$, ſo iſt, wenn $\frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{27}b^3 = A^2$ geſetzt wird.

$$x = \sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}c + A)} + \sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}c - A)}$$

$$= \sqrt[3]{(A + \tfrac{1}{2}c)} - \sqrt[3]{(A - \tfrac{1}{2}c)}.$$

In dem Falle, da $\frac{1}{27}b^3 > \frac{1}{4}c^2$ iſt, iſt A eine unmögliche Größe; die Gleichung aber hat alsdann drey mögliche Wurzeln.

2. Um das Unmögliche in beyden Cubikwurzeln ſich heben zu laſſen, muß jede derſelben, nach dem binomiſchen Lehrſatze, in eine Reihe verwandelt werden. Dieſem zufolge iſt (binom. Lehrſ. 13.)

$$\sqrt[3]{(1 \pm z)} = 1 \pm \tfrac{1}{3}z - \frac{1.2}{3.6}z^2 \pm \frac{1.2.5}{3.6.9}z^3$$

$$- \frac{1.2.5.8}{3.6.9.12}z^4 \pm \frac{1.2.5.8.11}{3.6.9.12.15}z^5 - \text{etc.}$$

3. Man bezeichne die numeriſchen Werthe der Coefficienten, ohne Rückſicht auf die Vorzeichen, durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc., ſo daß $\sqrt[3]{(1 \pm z)} = 1 \pm \mathfrak{A}z^1 - \mathfrak{B}z^2 \pm \mathfrak{C}z^3 - \mathfrak{D}z^4 \pm \mathfrak{E}z^5 - \text{etc.}$

Die Coefficienten mit ihren Logarithmen ſind, jene bis auf die zehnte Decimalſtelle.

Coefficienten		Logarithmen
$\mathfrak{A} = 0,333333$	3333	9,5208787
$\mathfrak{B} = 0,111111$	1111	9,0457575
$\mathfrak{C} = 0,061728$	3951	8,7904850
$\mathfrak{D} = 0,041152$	2634	8,6143937
$\mathfrak{E} = 0,030178$	3265	8,4796952
$\mathfrak{F} = 0,023472$	0317	8,3705507
$\mathfrak{G} = 0,019001$	1685	8,2787804
$\mathfrak{H} = 0,015834$	3071	8,1995990
$\mathfrak{I} = 0,013488$	4838	8,1299632
$\mathfrak{K} = 0,011690$	0193	8,0678152

4. Es ſey A^2 negativ, weswegen man ſetze $A = Q\sqrt{-1}$. Um convergirende Reihen zu erhalten, hat man die beiden Fälle, da $\frac{1}{2}c$ größer, und da es kleiner als Q iſt, zu unterſcheiden. Es ſey zuerſt $\frac{1}{2}c$ größer als Q.

Man ſetze $\frac{2Q}{c} = B$, ſo wird aus der Formel,

$$x = \sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}c + Q\sqrt{-1})} + \sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}c - Q\sqrt{-1})}, \text{ dieſe,}$$

$$= \left(\sqrt[3]{(1 + B\sqrt{-1})} + \sqrt[3]{(1 - B\sqrt{-1})}\right)\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}c}.$$

Bey der Entwickelung der Wurzelgrößen heben ſich die unmöglichen Theile; die einfach geraden Potenzen von $B\sqrt{-1}$, welche für ſich das Vorzeichen — haben, erhalten in der Reihe das Vorzeichen +; dagegen die doppelt geraden in derſelben das Vorzeichen — bekommen, demnach iſt

$$x = 2(1 + \mathfrak{B}B - \mathfrak{D}B^4 + \mathfrak{F}B^6 - \mathfrak{H}B^8 + \text{etc.})\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}c}.$$

5. Zweytens ſey $\frac{1}{2}c$ kleiner als Q. Nun ſetze man $\frac{c}{2Q} = C$, ſo wird aus der Formel

$$x = \sqrt[3]{(Q\sqrt{-1} + \tfrac{1}{2}c)} - \sqrt[3]{(Q\sqrt{-1} - \tfrac{1}{2}c)}$$ dieſe,

$$x = \left(\sqrt[3]{(1 + \frac{C}{\sqrt{-1}})} - \sqrt[3]{(1 - \frac{C}{\sqrt{-1}})}\right)\sqrt[3]{Q\sqrt{-1}}.$$

Es iſt $\sqrt[3]{Q\sqrt{-1}} = -\sqrt[3]{Q}.\sqrt{-1}$, da der zweyte Theil dieſer Gleichung cubirt $= Q\sqrt{-1}$ iſt. Bey der Entwickelung der Wurzelgrößen bleiben bloß die Glieder, welche durch $\sqrt{-1}$ dividirt ſind. Hier hebt ſich die Diviſion durch $\sqrt{-1}$ gegen die Multiplication mit $\sqrt{-1}$ in dem gemeinſchaftlichen Factor auf. Demnach iſt

$$x = -2(\mathfrak{A}C - \mathfrak{C}C^3 + \mathfrak{E}C^5 - \mathfrak{G}C^7 + \mathfrak{I}C^9 - \text{etc.})\sqrt[3]{Q}.$$

6. Die gefundene Wurzel heiße p. Die beyden übrigen ſeyn q, r. Da das zweyte Glied der Gleichung fehlt, ſo iſt $p + q + r = 0$, oder $q + r = -p$; auch iſt $pq + pr + qr = -b$ (Gleichung III. 5.). Hieraus iſt $qr = p^2 - b$. Demnach ſind q und r die Wurzeln der quadratiſchen Gleichung,

$$u^2 + pu + p^2 - b = 0,$$

und $u = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(b - \frac{3}{4}p^2)}$.

7. Man ſetze abgekürzt $\sqrt[3]{(\frac{1}{2}c + A)} = m$; und $\sqrt[3]{(\frac{1}{2}c - A)} = n$, ſo iſt $\sqrt[3]{(\frac{1}{4}c^2 - A^2)} = mn$, das iſt $\frac{1}{3}b = mn$ (aus 1.). Auch iſt $p = m + n$; folglich $b - \frac{3}{4}p^2 = 3mn - \frac{3}{4}(m + n)^2 = + \frac{3}{4}(m - n)^2$. Daher iſt

$$u = -\tfrac{1}{2}(m + n) \pm \tfrac{1}{2}(m - n\sqrt{-3}.$$

Hier hebt ſich in dem erſten Gliede das unmögliche durch gegenſeitige Subtraction auf; in dem zweyten Gliede durch die Multiplication mit dem Factor $\sqrt{-3}$ oder $\sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}$.

8. Es ſey zuerſt $\frac{1}{2}$ c größer als Q, und $\frac{2Q}{c} = B$, ſo iſt

$$u = -(1 + \mathfrak{B}B^2 - \mathfrak{D}B^4 + \mathfrak{F}B^6 - \mathfrak{H}B^8 + \text{etc.}) \sqrt[3]{\tfrac{1}{2} c}$$
$$\mp (\mathfrak{A}B - \mathfrak{C}B^3 + \mathfrak{E}B^5 - \mathfrak{G}B^7 + \mathfrak{I}B^9 - \text{etc.}) \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{\tfrac{1}{2} c}$$

9. Iſt $\frac{1}{2}$ c kleiner als Q, und $\frac{c}{2Q} = C$, ſo iſt

$$u = +(\mathfrak{A}C - \mathfrak{C}C^3 + \mathfrak{E}C^5 - \mathfrak{G}C^7 + \mathfrak{I}C^9 - \text{etc.}) \sqrt{Q}$$
$$\pm (1 + \mathfrak{B}C^2 - \mathfrak{D}C^4 + \mathfrak{F}C^6 - \mathfrak{H}C^8 + \text{etc.}) \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{Q}$$

10. Exempel. Es ſey $x^3 - 2100x + 24000 = 0$. Hier iſt $b = 2100$, und $c = -24000$; alſo $A^2 = -199000\,000$; $Q^2 = +199000\,000$. Da $\frac{1}{2}$ c kleiner als Q iſt, ſo werden für x die Formeln genommen, welche den Quotienten C enthalten. Es iſt $C = -\frac{24000}{2Q}$. Die Rechnung mit Hülfe der Logarithmen iſt folgende.

$lQ^2 = 8{,}2988531$
$lQ = 4{,}1494265$
$l\tfrac{1}{2}c = 4{,}0791812$
$lC = 9{,}9297547 - 10$

$lA = 9{,}52288$
$lC = \underline{9{,}92975}$
$\quad = \underline{9{,}45263}$
$l\mathfrak{B} = 9{,}04576$
$lC^2 = \underline{9{,}85951}$
$\quad = \underline{8{,}90527}$
$l\mathfrak{C} = 8{,}79048$
$lC^3 = \underline{9{,}78926}$
$\quad \underline{8{,}57974}$
$l\mathfrak{D} = 8{,}61439$
$lC^4 = \underline{9{,}71902}$
$\quad \underline{8{,}33341}$

$l\mathfrak{E} = 8{,}47969$
$lC^5 = \underline{9{,}64877}$
$\quad \underline{8{,}12846}$
$l\mathfrak{F} = 8{,}37055$
$lC^6 = \underline{9{,}57853}$
$\quad \underline{7{,}94908}$
$l\mathfrak{G} = 8{,}27878$
$lC^7 = \underline{9{,}50828}$
$\quad \underline{7{,}78706}$
$l\mathfrak{H} = 8{,}19960$
$lC^8 = \underline{9{,}43804}$
$\quad \underline{7{,}63764}$
$l\mathfrak{J} = 8{,}12996$
$lC^9 = \underline{9{,}36779}$
$\quad \underline{7{,}49775}$

$AC = -\ 0{,}28355$
$-\mathfrak{C}C^3 = +\ 0{,}03799$
$+\mathfrak{E}C^5 = -\ 0{,}01344$
$-\mathfrak{G}C^7 = +\ 0{,}00612$
$+\mathfrak{J}C^9 = -\ \underline{0{,}00314}$
Aggregat $= -\ 0{,}25602 = F$

$lF = 9{,}40827$
$\tfrac{1}{3}lQ = 1{,}38314$
$l2 = \underline{0{,}30103}$
$lp = 1{,}09244$
$p = +\ 12{,}372$

$+\ 1 = +\ 1{,}000000$
$+\mathfrak{B}C^2 = +\ 0{,}080403$
$-\mathfrak{D}C^4 = -\ 0{,}021548$
$+\mathfrak{F}C^6 = +\ 0{,}008893$
$-\mathfrak{H}C^8 = -\ \underline{0{,}004341}$
Aggregat $+\ 1{,}08829 = G$

$lG = 0{,}02670$
$l\sqrt{3} = 0{,}23856$
$\tfrac{1}{3}lQ = \underline{1{,}38314}$
$lH = 1{,}64840$
$H = 44{,}504$

Die eine Wurzel der Gleichung iſt $p = + 12,372$; die beiden andern ſind $- 6,186 \pm 44,504$, oder $q = + 38,318$, und $r = - 50,690$. Die Summe der drey Wurzeln iſt $= 0$, wie es ſeyn muß, aber ihr Product iſt $= 24030,6$ ſtatt 24000. Denn der gefundene Werth von p iſt etwas zu groß, weil in dem Factor F das nächſtfolgende ſubtractive Glied weggelaſſen iſt. Dieſer nähert ſich in dem Exempel dem völligen Werthe nur langſam.

Die Rechnung iſt in dem vorgelegten Falle mühſam, und liefert die Wurzeln nur zwiſchen den Zehn- und Hundertheilen. Die Methode ſie aus einer Reihe von Werthen der Gleichung zu finden, würde noch mühſamer ſeyn. Bey Gleichungen mit großen Coefficienten iſt die Cardaniſche Regel brauchbarer. Inzwiſchen iſt die Berechnung durch die trigonometriſche Dreytheilung eines Winkels am leichteſten, ſ. die Aufſöſung dieſer Gleichung in dem Artikel: Anwendung der Geometrie auf die Algebra. S. 154.

11. Die Cubikwurzel aus einer möglichen Größe, a^3, hat einen möglichen und zwey unmögliche Werthe, welche zuſammen die Wurzeln der cubiſchen Gleichung $x^3 - a^3 = 0$ ſind. Sie ſind I. a; II. $- \frac{1}{2} a (1 + \sqrt{-3})$; III. $- \frac{1}{2} a (1 - \sqrt{-3})$, ſ. Cubikwurzel. Iſt a^3 ſelbſt eine unmögliche Größe, ſo ſind alle drey Cubikwurzeln aus derſelben unmöglich, und eine ſo gut wie die andere als Cubikwurzel der unmöglichen Größe anzuſehen. Die unmögliche Größe ſey $A + B \sqrt{-1}$, ſo haben ihre Cubikwurzeln ebenfalls die Form $P + Q \sqrt{-1}$, damit bey der Cubirung ein möglicher und ein unmöglicher Theil entſtehe. Man bezeichne eine der Wurzeln durch $P + Q \sqrt{-1}$, ſo ſind die andern $= - \frac{1}{2} (P + Q \sqrt{-1}) (1 \pm \sqrt{-3})$. Der Cubus jeder der drey Wurzeln iſt $P^3 + 3 P^2 Q \sqrt{-1} - 3 P Q^2 - Q^3 \sqrt{-1}$, ſo daß $P^3 - 3 P Q^2 = A$, und $3 P^2 Q - Q^3 = B$ iſt. Daher ſind die Cubikwurzeln aus $A - B \sqrt{-1}$ die drey: $P - Q \sqrt{-1}$, und $- \frac{1}{2} (P - Q \sqrt{-1}) (1 \pm \sqrt{-3})$.

Folglich hat die Summe der beiden Cubikwurzeln, $\sqrt[3]{(A+B\sqrt{-1})}+\sqrt[3]{(A-B\sqrt{-1})}$ neuen Werthe, weil je eine der drey Wurzeln des erſten Theils mit je einer der drey Wurzeln des zweyten verbunden werden kann. Von dieſen neun Combinationen ſind drey mögliche Größen, nämlich

$$P+Q\sqrt{-1} \text{ mit } P-Q\sqrt{-1}$$

$$-\tfrac{1}{2}(P+Q\sqrt{-1})(1+\sqrt{-3}) \text{ mit } -\tfrac{1}{2}(P-Q\sqrt{-1})(1-\sqrt{-3})$$

$$-\tfrac{1}{2}(P+Q\sqrt{-1})(1-\sqrt{-3}) \text{ mit } -\tfrac{1}{2}(P-Q\sqrt{-1})(1+\sqrt{-3}),$$

welche zur Summe geben: I. $2P$; II. $-P+Q\sqrt{3}$; III. $-P-Q\sqrt{3}$.

Hier iſt $2P$ die vorher gefundene durch p bezeichnete Wurzel, und Q der zweyte Theil von u durch $\sqrt{3}$ dividirt.

12. Leibnitz hat zwar ſchon bemerkt, daß bey der Ausziehung der Cubikwurzel aus den beiden Theilen der Cardaniſchen Formel, vermittelſt einer unendlichen Reihe, das Unmögliche ſich aufheben müſſe, (in einem Briefe an Wallis, 1698, Opp. III, p. 126.); aber Nicole wird der erſte ſeyn, der die Rechnung ausgeführt hat, in den Mem. de l' Acad. des Sc. 1738, 1741 und 1743. Sein Vortrag iſt nicht faßlich. Er bemerkt nicht, daß die Wurzelreihen auf zweyerley Art dargeſtellt werden müſſen, um in dem einen oder dem andern Falle eine annähernde Reihe zu erhalten. Die praktiſchen Hülfsmittel, welche in dieſem Artikel gegeben ſind, fehlen bey ihm. In den Mémoires 1744 iſt noch eine Abhandlung von Nicole enthalten, worin er den cubiſchen Gleichungen zwey Formen giebt, die zu einer ſchnellen Näherung dienen. Sie erfordern aber auch mehrere Verſuche.

13. Dieſe Formen ſind

$$x^3 - px + n\sqrt{(p+n)} = 0$$

$$x^3 - \frac{rx}{\sqrt[3]{(q+r)}} + q = 0.$$

Die Wurzeln der erſten Gleichung ſind: I. $-\sqrt{(p+n)}$; II. $+\frac{1}{2}\sqrt{(p+n)} + \frac{1}{2}\sqrt{(-3n)}$; III. $+\frac{1}{2}\sqrt{(p+n)} - \frac{1}{2}\sqrt{(p-3n)}$. Die Wurzeln der zweyten Gleichung ſind, I. $-\sqrt[3]{(q+r)}$;

II. $+\frac{1}{2}\sqrt[3]{(q+r)} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r-3q}{\sqrt[3]{(q+r)}}}$;

III. $+\frac{1}{2}\sqrt[3]{(q+r)} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r-3q}{\sqrt[3]{(q+r)}}}$.

Dieſe Formen ſind hier angeführt, um eine Übung in der Formation der Coefficienten aus den Wurzeln zu veranlaſſen. Das erſte Verfahren von Nicole durch Auflöſung der Formel in zwey Reihen findet man in Clairauts Algebra, V. Th. Bey dem zweyten Verfahren wird nach der erſten Form eine Zahl n durch eine poſitio falſi geſucht, daß das gegebene Glied der Gleichung die Form $n\sqrt{(p+n)}$ völlig genau oder nahe genug bekomme. Nach der andern Form iſt eine Zahl r zu finden, ſo daß der Coefficient von x die Form $\frac{r}{\sqrt[3]{(q+r)}}$ erhalte.

14. In Käſtners Analyſis endl. Größen §. 699. ff. iſt umſtändlich gezeigt, wie die Cardaniſche Formel drey mögliche Wurzeln liefern könne. Die daſelbſt §. 718

getadelte Bemerkung Newtons möchte doch gerechtfertigt werden können. Ein möglicher algebraiſcher Ausdruck der Wurzel einer Gleichung durch die Coefficienten derſelben kann nicht mehrere mögliche Werthe haben, wenn nicht etwa Wurzeln mit einem geraden Exponenten darin vorkommen; und doch ſollte er, wenn mehrere mögliche Wurzeln vorhanden ſind, eine ſo gut als die andere angeben. Darum erhält der Ausdruck eine unmögliche Form, als bey welcher eine Vieldeutigkeit Statt hat. Die Gleichung ſelbſt iſt auch ein Ausdruck für die Wurzeln, aber eine functio implicita.

15. In den neuern Zeiten noch hat man ſich, in der That unnöthiger Weiſe, viel mit der Cardaniſchen Regel in dem Falle dreyer möglichen Wurzeln beſchäftigt.

A method of extending Cardan's Rule for reſolving one caſe of a cubick equation ... to the other caſe, called the irreducible. By Fr. Maſeres, Phil. Tranſ. 1778.

Sul queſito analitico propoſito dall' Academia di Padova ... differt. di Pietro Coſſali, Verona. 1782.

Della poſſibilità della reale Solutione analytica del caſe irreducibile, rifleſſioni dell' Arciprete Nicolai. Padova. 1783.

Mem. ſur la regle de Cardan, par de Caſtillon. Mem. de Berlin. 1783.

Oſſervazione del Signor Sebaſt. Canterzani ſul Valor Cardanico -- in occaſione d'eſſere uſcito un foglio anonimo, che propone una maniera di redurre il caſo irreducibile. In Bologna 1787.

Cardioide eine Linie der vierten Ordnung, von einer herzförmigen Geſtalt. Ihre Entſtehungsart iſt folgende. Über der Linie AB (Fig. 60. Tab. IV.) ſey ein Kreis beſchrieben. In dieſem ziehe man irgend eine Chorde AN, und verlängere ſie nach beiden Seiten, nehme darauf NM = AB, und Nm = AB, ſo ſind M, m Puncte der Cardioide.

Die Gleichung für die krumme Linie iſt leicht gefunden Es ſey MP ſenkrecht auf die Abſciſſenlinie AD. Von dem Endpuncte B des Durchmeſſers des Kreiſes auf der Abſciſſenlinie ziehe man BN nach dem Puncte N, ſo ſo iſt das Dreyeck ANB dem APM ähnlich, und es iſt AB : AN = AM : AP. Es ſey AB = a ; AP = x; PM = y ; AM = z, ſo iſt a : z — a = z : x, alſo $z^{2} - az = ax$, oder $z^2 - ax = az$. Beide Theile quadrirt geben die Gleichung $z^4 - 2axz^2 + a^2x^b = a^2z^2$. Da $z^2 = z^2 + a^2x^2$, ſo entſteht aus jener Gleichung dieſe:

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2ax^3 - 2axy^2 - a^2y^2 = 0.$$

oder

$$y^4 - (a^2 + 2ax - 2x^2)y^2 - 2ax^3 + x^4 = 0.$$

Für den Punct m auf der andern Seite von A wird in dieſer Gleichung x negativ. Setzt man die Abſciſſe Ap = u, ſo iſt a : a — z = z : u, und daher durch eine ähnliche Rechnung

$$u^4 + 2u^2y^2 + y^4 2au^3 + 2au^2 - a^2y^2 = 0,$$

welche Gleichung aus der obigen entſteht, wenn a = — x geſetzt wird.

Man ziehe durch den Mittelpunct C des Kreiſes ANBA die Parallele CE mit AM, nehmen CF = AB = NM, und ziehe CN, FM, ſo iſt FM parallel mit CN, und ihr gleich, und der Punct M der Cardioide liegt auf dem Umfange des aus F als Mittelpunct beſchriebenen, dem Kreiſe ANBA gleichen Kreiſes GnMG. Dieſer berührt jenen in dem Puncte G, welcher CF halbirt. Der W. EFM iſt gleich dem W. GCN = CNA. Da der W. BCN = 2 CNA, ſo iſt W. BCG = GCN, alſo W. BCG = EFM, und W. ACG = GFM, daher der Bogen ANG = MnG. Die Cardioide iſt alſo eine Epicykloide, welche durch die Wälzung eines Kreiſes auf einem ihm gleichen von einem Puncte auf dem Umfange jenes beſchrieben wird. — Man kann ſie auch als eine Verwandte der Conchoide anſehen, da eine gegebene gerade Linie auf einem Kreiſe, ſo wie bey der Conchoide auf einer geraden Linie fortgeführt wird, indem zugleich ihre Verlängerung durch einen gegebenen Punct geht.

Es ſey L der Punct auf dem Bogen AH, deſſen Abſtand von der auf AB ſenkrechten Chorde AH am größten iſt, und l ein ſolcher Punct auf dem Bogen Ah. Die zugehörige Abſciſſe ſey AK. In den Puncten L, l werden zwey Ordinaten einander gleich, die für kleinere AK ungleich ſind. Daher hat die Ordinate y hier zwey gleiche poſitive Werthe, und eben ſo zwey gleiche, eben ſo große, negative Werthe, alſo hat y^2 einen einfachen Werth. Dieſer ſey $= A$, ſo daß $q^2 - A = 0$, alſo $q^4 - 2Aq^2 + A^2 = 0$ iſt. Die Vergleichung mit der Gleichung für y giebt $A = \frac{1}{2}(a^2 + 2ax - 2xx$, und $A^2 = x^4 - 2ax^3$; alſo $\frac{1}{4}(a^2 + 2ax - 2xx)^2 = x^4 - 2ax^3$. Daraus wird $x = -\frac{1}{4}a$. Dieſer Werth in die Gleichung zwiſchen x und y geſetzt, verwandelt ſie in dieſe, $y^4 - \frac{3}{8}a^2y^2 + \frac{9}{256}a^4 = 0$, woraus folgt $y^2 \frac{3}{16} = a^2$, und $y = \pm \frac{1}{4}a\sqrt{3}$.

Die krumme Linie hat in A eine Spitze oder einen Rückkehrpunct, da die beiden Bögen HLA, hlA in A zuſammen kommen, ohne weiter fortgeſetzt zu werden, ſondern in einander übergehen. Sie müſſen hier eine gemeinſchaftliche berührende haben, die, weil die Abſciſſenlinie die Curve in zwey gleiche und ähnliche Theile theilt, die Abſciſſenlinie ſelbſt iſt. Die Rechnung zeigt dieſes folgendergeſtalt.

Die Tangente des Winkels einer krummen Linie oder ihrer berührenden mit der Ordinate iſt $=\frac{dx}{dy}$, (berührende Linie, 14.). Aus der Gleichung für unſere Curve folgt

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{2x^2y + 2y^3 - 2axy - a^2y}{2x^3 + 2xy^2 - 3ax^2 - ay^2}.$$

Nimmt man $x = 0$, ſo iſt ſowohl $y = a$, als $y = 0$. Für $y = a$ iſt $\frac{dx}{dy} = 1$. Die Curve macht in H, h, wo HAh ſenkrecht auf AB iſt, einen halben rechten Winkel mit der Ordinate. Für $y = 0$ iſt $\frac{dx}{dy} = \frac{0}{0}$, welches an ſich unbeſtimmt iſt. Man ſetze in dem Werthe von $\frac{dx}{dy}$ den Zähler $= Q$, den Nenner $= P$, ſo daß $\frac{dx}{dy} = -\frac{Q}{P}$ ſey. In dem angeführten Artikel, (24.) iſt gezeigt, daß wenn für ein Paar Coordinaten $P = 0$ und $Q = 0$ wird, der Quotient $\frac{Q}{P}$ den Werth $\frac{dQ}{dP}$ erhält, in welchem nun für die Coordinaten diejenigen Werthe zu

ſetzen ſind, wodurch P und Q Null werden. Dieſe ſind hier $x = o$, und $y = o$. Dividirt man Zähler und Nenner durch dy, um ſtatt der Differentiale ihre Quotienten einzuführen, und ſetzt $\frac{dx}{dy} = p$, ſo iſt $p = - \frac{o \times p - aa}{o \times p}$. Daher kann p keinen endlichen Werth haben, auch nicht o ſeyn, ſondern iſt unendlich groß. Die krumme Linie macht alſo in A mit der auf AB ſenkrechten einen rechten Winkel, und wird alſo von AB berührt.

Carré hat über dieſe Linie einen Aufſatz in den Mem. de l'Acad. des Sc. 1705 geliefert. Er hat ſie aber auf den Bogen AH allein eingeſchränkt. Vor ihm hatte ſchon, wie er anführt, ein Mathematiker, Könersma, ſich mit ihr beſchäftigt. Den Namen Cardioide hat Caſtilliani der krummen Linie gegeben. Philoſ. Tranſ. 1741. Cramer hat in der Analyſe des lignes courbes § 173. exemple 3. dieſe Linie als Beyſpiel gebraucht, conſtruirt ſie aber als eine Epicykloide, und erwähnt nicht, daß ſeine Linie dieſelbe mit der von Carré betrachteten iſt. Eben dieſe Linie iſt die Brennlinie durch Zurückſtrahlung von einem Kreiſe, deſſen Durchmeſſer = 3 AB iſt, wenn die Strahlen von dem Endpuncte eines Durchmeſſers auf denſelben fallen (ſiehe Catacauſtica, 19.). Dieſes und die doppelte Conſtruction macht ſie merkwürdig.

Caſſinoide, oder vielmehr Caſſiniſche Curve, iſt eine Linie vom vierten Grade, durch welche Dominicus Caſſini die Bewegung der Erde um die Sonne genauer darzuſtellen glaubte, als es ihm durch die Kepleriſche Hypotheſe von einer Ellipſe möglich ſchien. Die Eigenſchaft dieſer Linie iſt, daß das Produkt oder Rechteck von zwey Linien, die aus zwey gegebenen Puncten an einen Punct der Curve gezogen werden, unveränderlich iſt, ſtatt daß in der Ellipſe ihre Summe eine gegebene Größe hat.

Dieſe krumme Linie kann ſehr verſchiedene Geſtalten haben, erſtlich eine längliche, nach Art einer Ellipſe, zweytens eine längliche mit einer gegen die Axen convexen Einbeugung oberhalb und unterhalb des Mittelpunctes; drittens eine wie die Ziffer 8 geſchlungene Figur; viertens kann ſie aus zwey abgeſonderten Ovalen beſtehen; ja ſie kann ſich in zwey einzelne Puncte zuſammen ziehen. Dieſe Mannigfaltigkeit der Geſtalt macht dieſe Linie ſchon untauglich, um durch eine regelmäßige Kraft beſchrieben werden zu können. Sie iſt auch von den Aſtronomen gar nicht beachtet worden. Caſſini war nur darauf gefallen, weil er Keplers Hypotheſe nicht recht gefaßt hatte. Die krumme Linie iſt von einigen ſehr ungriechiſch Caſſinoide genannt. Dies bedeutet eine Linie, die dem Caſſini ähnlich iſt. — Elémens d'Aſtronomie par Caſſini: p. 149. Montucla hiſtoire des Mathématiques. T. II. p. 563. nouv. edit.

Caſus irreducibilis tertii gradus, oder ſchlecht hin caſus irreducibilis iſt der Fall, da eine cubiſche Gleichung drey mögliche Wurzeln hat, weil die Formel, welche eine einzige mögliche Wurzel zwar in irrationalen Ausdrücken, aber doch vollſtändig angiebt, in jenem Falle mit unmöglichen Größen vermengt iſt. S. Cardans Regel.

Catacauſtica iſt die Brennlinie durch Zurückſtrahlung. In dem Artikel, Brennlinie, iſt die Beſchaffenheit dieſer Gattung von Linien erklärt, auch iſt die Conſtruction der Catacauſtica für den Kreis gewieſen. Hier iſt die Abſicht, eine allgemeine Methode und Formel zu ihrer Erfindung anzugeben.

I. Brennlinie für parallele Strahlen.

1. Es iſt LMNO (Fig. 61. Tab. IV.) ein Bogen einer krummen Linie, AX die Abſciſſenlinie, auf welche die Ordinaten MP, NQ ſenkrecht ſind. Die Normalen MR, NR ſchneiden ſich in R; die zurückgeworfenen MS, NS in S. Die Ordinate NQ wird von MR in m, von MS in n geſchnitten. Es iſt MRN = MmN — mNR = PMR — QNR, und MSN = MnN — nNS = PMS — QNS. Da PMS = 2 PMR, und QNS = 2 QNR, ſo iſt MSN = 2 MRN.

2. Aufgabe. Die allgemeine Gleichung für die Catacauſtica der Parallelſtrahlen zu finden.

I. Es ſey (Fig. 61. Tab. IV.) Ap = x, PM = y, die Normale ſchneide die Abſciſſenlinie in H, ſo iſt die Subnormale PH $= \frac{ydy}{dx}$ (berührende Linie 42.). Man ſetze $\frac{dy}{dx} = p$, ſo daß PH = py, und tang PMH = p iſt. Der zurückgeworfene Strahl ſchneide die Abſciſſenlinie in V; ſo iſt PMV = 2 PMH, alſo tang PMV $= \frac{2p}{1 - pp}$ (Goniom. 46.). Folglich iſt PV $= \frac{2py}{1 - pp}$:

II. Es ſey ST ſenkrecht auf die Abſciſſenlinie, und AT = t; TS = u. Nun iſt PM : PV = TS : TV und daher PM -: PV = PM — TS : PV — TV, das iſt $1 - pp : 2p = y - u : t - x$, alſo $(1 - pp)(t - x) = 2p(y - u)$.

III. Wenn S ein Durchſchnitt irgend zweyer Strahlen MS, NS iſt, ſo darf man für x und p irgend zwey zuſammengehörige $x + \Delta x$ und $p + \Delta x$ ſetzen, ohne t und u zu verändern. Soll aber S ein Punct der Brennlinie ſeyn, ſo müſſen die Veränderungen von x und p kleiner als jede angebbare Größe gedacht werden, das iſt, die Gleichung muß differentiirt werden, ſo aber, daß t und u ungeändert bleiben. Nach dieſem Verfahren iſt

$$-2p(t-x)\,dp-(1-pp)\,dx=2(y-u)\,dp+2p\,dy.$$

IV. Für dy ſetze man $p\,dx$, und für $y-u$ ſeinen Werth aus der Gleichung in (II.), ſo wird erhalten

$$t-x=-\frac{p\,dx}{dp},\ \text{ſo daß}$$

$$t=x-\frac{p\,dx}{dp},$$

wo dp für den Fall der Figur negativ iſt, das iſt, die zweyten Unterſchiede der y abnehmen, und die Curve gegen die Abſciſſenlinie concav iſt.

V. Ferner iſt, wenn für $t-x$ ſein Werth aus (II,) geſetzt wird,

$$y-u=-\frac{(1-pp)\,dx}{2\,dp},\ \text{ſo daß}$$

$$u=y+\frac{(1-pp)\,dx}{2\,dp}.$$

VI. Aus der Gleichung zwiſchen x und y wird der Werth von p, und daraus der von $\frac{dp}{dx}$ erhalten. Aus den beyden Gleichungen für t und u, und der Gleichung zwiſchen x und y werden die beyden Größen x und y heraus-

geſchafft, wodurch die Gleichung zwiſchen t und u hervorgeht. Dieſes Verfahren aber iſt mühſam. Bequemer werden die Werthe von t und u durch die zugehörigen x und y beſtimmt.

3. Die berührende an der Brennlinie KSk in S iſt der zurückgeworfene Strahl MSV.

Denn der Winkel der berührenden mit der Ordinate nach der Seite, auf welcher der Anfang der Abſciſſen liegt, hat zur Tangente den Quotienten $\frac{dt}{du}$ (berührende Linie, 14.). Nun iſt aus (2. IV. und V.), wenn dx conſtant iſt, $dt = \frac{p\,dx\,d^2p}{dp^2}$, und $du = -\frac{(1-pp)\,dx\,d^2p}{2\,dp^2}$; alſo $\frac{dt}{du} = -\frac{2p}{1-pp}$. Das Verneinungszeichen zeigt an, daß der Winkel der berührenden mit TS nach A hin ſtumpf iſt, wenn nämlich $p < 1$ iſt, wie in dem Falle für unſere Rechnung, worin PMV ſpitz iſt. Alſo iſt die Tangente dieſes Winkels nach TX hin $= +\frac{2p}{1-pp}$.

Nun iſt $\tang TSV = \frac{TV}{TS} = \frac{PV - PT}{TS}$, und $PV - PT = \frac{2py}{1-pp} - (t-x) = \frac{2p}{1-pp}\left(u - \frac{(1-pp)\,dx}{2\,dp}\right) + \frac{p\,dx}{dp} = \frac{2pu}{1-pp}$. Demnach iſt $\tang TSV = \frac{2p}{1-pp}$. Folglich iſt TSV der Winkel der berührenden mit TS, und MSV die berührende an der Brennlinie in S.

Es iſt MS $= - \frac{(1+pp)dx}{2dp}$. Denn MS^2

$= (t-x)^2 + (y-u)^2 = \frac{p^2 dx^2}{dp^2} + \frac{(1-pp)^2 dx^2}{4dp^2}$

$= \frac{(1+pp)^2 dx^2}{4dp^2}$. Die Wurzel MS bekommt das Vorzeichen $-$, weil $\frac{dx}{dp}$ negativ iſt, da die zurückwerfende Linie gegen die Abſciſſenlinie hohl ſeyn ſoll. Dadurch wird MS, wie der Halbmeſſer der Krümmung MR, poſitiv.

5. Es ſey s der Bogen der Brennlinie von irgend einem Puncte K angenommen bis zu S, ſo iſt

$$ds = \frac{(1+pp)dx^2 dp}{2dp^2}.$$

Denn es iſt $ds = \frac{dt}{\sin TSV}$, und $\sin TSV$

$= \frac{\tan TSV}{\sec TSV}$. Nun iſt $\tan TSV = \frac{2p}{1-pp}$,

und $\sec TSV^2 = \frac{4pp}{(u-pp)^2} + 1 = \frac{(1+pp)^2}{(1-pp)^2}$,

alſo $\sin TSV = \frac{2p}{1+pp}$, und $ds = \frac{1+pp}{2p}dt$.

Da $dt = \frac{p\,dx\,d^2p}{dp^4}$, ſo iſt $ds = \frac{(+pp)dx\,dp^2}{2dp^2}$.

6. Es iſt der Bogen der Brennlinie s $=$ MS $+$ PM $-$ Conſt, wo die beſtändige Größe die Summe der Ordinate an der zurückwerfenden Linie, und des zurückgeworfenen Strahls für denjenigen Punct der Brennlinie iſt,

von welchem an der Bogen derſelben genommen wird.

Denn es iſt $d.MS = -pdx + \frac{(1+pp)\,dx\,d^2p}{2\,dp^2} =$

$-dy + ds$, oder $ds = d.Ms + dy$, und daher $s = Ms + PM - Conſt.$, wo die Conſt. ſo beſtimmt werden muß, daß in dem Anfangspuncte der Brennlinie der Werth von $s = 0$ ſey.

7. Iſt die Gleichung zwiſchen x und y eine algebraiſche, ſo iſt der Bogen der Brennlinie rectificabel.

8. Der Halbmeſſer der Krümmung in M ſey $= r$.

Es iſt $r = -(1+pp)^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{dp}$ (Krümmungskreis 2.).

Demnach iſt $MS = \frac{r}{2\sqrt{(+pp)}}$, und

$$s = \frac{r}{2\sqrt{(1+pp)}} + y - Conſt.$$

9. Es ſey R der Mittelpunct der Krümmung für den Punct M, und RG ſenkrecht auf MSV, ſo iſt $MS = \frac{1}{2} MG$, oder $MS = \frac{1}{2} r \cos RMG$. Denn es iſt

$\text{tang } PMH = \frac{dy}{dx} = p$, alſo auch $\text{tang } RMG = p$.

Daher $\cos RMG = \frac{1}{\sqrt{(1+pp)}}$ (Goniometrie, 14.);

folglich $MG = MR \cos RMG = \frac{r}{\sqrt{(1+pp)}} = 2\,MS$.

10. Exempel I. Die zurückwerfende Linie ſey ein Kreisquadrant BMD, deſſen Halbmeſſer AB iſt. Fig. 62.). Die Strahlen fallen parallel mit AD auf. Die Linien in der Figur behalten ihre Bedeutungen und Benennungen,

wie in der allgemeinen Figur und Rechnung. Der Halbmeſſer des Kreiſes ſey $= a$. Die Gleichung für denſelben iſt $aa = xx + yy$. Die Differentialgleichung iſt

$o = x dx + y dy$, alſo $p = -\frac{x}{y}$. Die Negation zeigt an, daß die poſitiven Ordinaten abnehmen, wenn die poſitiven x wachſen. Hieraus iſt $dp = \frac{-y dx + x dy}{y^2}$

$= \frac{xy dy - p^2 dx}{y^3} = -\frac{aa dx}{y^3}$. Folglich $t = x$

$- \frac{xyy}{aa} = \frac{x^3}{a^2}$. Ferner iſt $1 - pp = \frac{yy - xx}{yy}$, alſo

$u = y - \frac{yy - xx}{2yy} \cdot \frac{y^3}{aa} = \frac{(3aa - 2yy)y}{2aa}$.

II. Für gleiche aber entgegengeſetzte x hat t gleiche und entgegengeſetzte Werthe. Ebenfalls hat für gleiche und entgegengeſetzte y die Ordinate u zwey gleiche und entgegengeſetzte Werthe. Die vollſtändige Brennlinie beſteht aus vier ſolchen, ſich gleichen Bogen wie BSF, einem in jedem Quadranten des Kreiſes. Zwey gehören als Brennlinien zu den von der convexen Seite des Kreiſes zurückgeworfenen Strahlen.

III. Für $x = o$, und $y = a$, iſt $t = o$, und $y = \frac{1}{2} a = AF$.

IV. Für kleine x iſt t viel kleiner als x, da $t : x = xx : aa$ iſt. Auch verändert u ſich wenig für ſolche x, da y ſich wenig verändert, und in dem Producte $(3aa - 2yy) y$ der eine Factor zunimmt, wenn der andere abnimmt. Daher ſind die Durchſchnitte der zurückgeworfenen Strahlen bey P herum am dichteſten beyeinander.

V. Der größte Werth von u iſt $a\sqrt{\frac{1}{2}}$. Dieſer iſt nämlich derjenige, für welchen der zurückgeworfene Strahl der Abſciſſenlinie parallel, oder mit dem auffallenden Strahl einen rechten Winkel macht. Alsdann iſt $p = 1$, und $1 - pp = 0$, daher $y = x = a\sqrt{\frac{1}{2}}$.

VI. Es iſt $1 + pp = \frac{a^3}{y^2}$, der Halbmeſſer der Krümmung $= a$ und $MS = \frac{a}{2\sqrt{(1+pp)}} = \frac{1}{2}y$, oder $MS = \frac{1}{2}PM$.

VII. Der Bogen $BS = \frac{1}{2}y + y - Conſt.$ Da in dem Anfange B des Bogens $y = 0$ iſt, ſo iſt $Conſt = 0$, und $BS = \frac{3}{2}y$.

VIII. Man ziehe die ſenkrechte AG auf den zurückgeworfenen Strahl, ſo iſt $MS = \frac{1}{2}MG$. Man halbire AM in E, und ziehe ES, ſo iſt ES parallel mit AG, alſo ſenkrecht auf MG, und der Punct S iſt auf dem Umfange des über EM beſchriebenen Halbkreiſes. Man ziehe durch S den Durchmeſſer SCH, ſo iſt der W. ECS $= 2\,CMS = 2\,AMP = 2\,DAM$, alſo $ECS = 2\,DAM$. Mit AE beſchreibe man den Quadranten FEK, ſo iſt dieſer ſo groß als der Halbkreis SEH, und der Bogen ES ſo groß als der Bogen FE. Denn wenn ſich die Winkel an den Mittelpuncten zweyer Kreiſe umgekehrt wie die Halbmeſſer verhalten, ſind die zugehörigen Bogen gleich groß. Folglich wird die Brennlinie FSB durch den Punct S des Halbkreiſes SEH, bey der Wälzung deſſelben auf dem Quadranten FEK beſchrieben, ſo daß H auf K liegt, wenn S in B fällt, und die Brennlinie iſt eine Epicykloide.

11. Exempel II. Die zurückwerfende Linie ſey eine Parabel CBD, (Fig. 63.) deren Axe AB, Scheitel B iſt. Mit der Axe parallel fallen die Strahlen wie PM auf. Der Parameter ſey $= a$, die gegebene $AB = b$, die Abſciſſe $AP = x$; $PM = y$, ſo iſt $xx = a(b - y)$.

Daraus $2xdx = -ady$, und $p = -\frac{2x}{a}$; $dp = -\frac{2dx}{a}$; Alſo iſt $t = x - x = 0$. Da $1 - pp = \frac{aa - 4xx}{aa}$, ſo iſt $u = y - \frac{aa - 4xx}{4a} = y - \frac{1}{4}a + b - y = b - \frac{1}{4}a$. Der Vereinigungspunct aller zurückgeworfenen Strahlen, die auffallenden parallel mit der Axe geſetzt, iſt ein einziger Punct S, deſſen Abſtand vom Scheitel $= \frac{1}{4}a$ oder $\frac{1}{4}$ des Parameters iſt. Dieſer heißt daher der Brennpunct der Parabel. Es läßt ſich dieſes auch unmittelbar aus der Natur der Parabel herleiten.

12. Exempel III. Die zurückwerfende Linie ſey eine Cykloide, deren Hälfte DMB in Fig. 64. gezeichnet iſt. Die Axe iſt AD, als der Durchmeſſer des beſchriebenen Kreiſes; die halbe Baſis iſt AB, gleich dem halben Umfange deſſelben. Die Normale in einem Puncte M geht durch denjenigen Punct der Baſis H, wo der ſich wälzende Kreis ſie berührt, indem der beſchreibende Punct deſſelben in M iſt. Man ziehe CH ſenkrecht auf AB in H, und nehme $CH = \frac{1}{2}AD$, ſo iſt C der Mittelpunct des ſich wälzenden Kreiſes, und $CMH = CHM = HMP$. Alſo geht die zurückgeworfene Linie durch dieſen Mittelpunct. Der Halbmeſſer der Krümmung an der Cykloide in einem Puncte $M = 2MH$. Zieht man durch H, die ſenkrechte

HS an die verlängerte MC, ſo iſt daher S ein Punct der Brennlinie, wie es aus (9) leicht folgt. Wegen des rechten Winkels CSH iſt S auf dem Umfange des über CH beſchriebenen Kreiſes. Der Mittelpunct deſſelben ſey in E, ſo iſt der W. SEH = 2 SCE. Es ſey N der andere Endpunct des Durchmeſſers MCN in dem erzeugenden Kreiſe für die Cykloide, ſo iſt der Bogen NH = Bog. SH, da die zugehörigen Winkel an den Mittelpuncten ſich umgekehrt wie die Halbmeſſer verhalten. Der Bogen HM iſt dem Theile HB der Baſis gleich, alſo die Ergänzung zum Halbkreiſe, nämlich der Bogen NH = AH. Daher iſt auch Bog. SH = AH, und der Punct S liegt auf der Cykloide ASB, die durch die Wälzung des über dem Durchmeſſer CH beſchriebenen Kreiſes erzeugt wird. Die Brennlinie der Cykloide für Strahlen, die mit der Axe AD parallel auffallen, iſt wieder eine Cykloide mit einer halb ſo großen Baſis.

II. Brennlinie für Strahlen, die von einem gegebenen Puncte ausfahren.

13. I. Es iſt LMNO (Fig. 65.) eine krumme Linie, an welche von dem gegebenen Puncte A Strahlen wie AM, AN fallen, und nach MS, NS zurückgeworfen werden. Die Normalen in M, N ſind MR, NR, die ſich in R ſchneiden, und jene den Winkel AMS, dieſe den ANS, halbiren.

II. Die Linie MR ſchneide AN in P, und NR ſchneide SM in Q, ſo iſt, weil der W. MPN der Summe der beiden innern Winkel in jedem der beiden Dreyecken PRN, PAM, und eben ſo MQN der Summe der beiden innern Winkel in jedem der Dreyecke QRM, QSN gleich iſt.

$$MRN + ANR = MAN + AMR,$$

$$MRN + SMR = NSM + SNR.$$

die Addition dieſer beiden Gleichungen giebt (wegen AMR = SMR und NR = SNR)

$$2\,MRN = MAN + NSM,$$

ſo daß der Winkel R das arithmetiſche Mittel zwiſchen den beiden A und S iſt.

III, Man beſchreibe aus A mit dem Halbmeſſer AM innerhalb des W. MAN den Kreisbogen Mm, und aus S mit MS innerhalb des W. MSN den Kreisbogen Mn, ſo iſt der Winkel NMm der krummen Linie mit dem Bogen Mm (d. i. der Winkel ihrer berührenden in M) gleich AMR oder RMS, weil AMm, RMN beydes Rechte ſind, und RMm ihnen gemein iſt. Eben ſo iſt der W. NMn = RMS, alſo W. NMm = NMn.

IV. Wenn S ein Punct der Brennlinie ſeyn ſoll, ſo muß der Bogen MN kleiner als jede angebbare Größe ſeyn. Alsdann iſt Nm = MN . sin NMm, und Nn = Mn. sin NMn, alſo Nm = Nn.

Alsdann iſt auch Mm = MN . coſ NMm = MN . coſ AMR, und Mn = MN . coſ NMn = MN . coſ RMS. Auch iſt MR oder NR der Halbmeſſer der Krümmung in M, und R der Mittelpunct des Krümmungskreiſes.

V. Es ſey AM = z; SM = u; RM = r, wo SM, RM die Gränzen der ſich ſchneidenden MR, NR, und MS, NS ſind. Ferner ſey AMR = ω, und der Bogen LM von irgend einem Puncte L an genommen = s. Erſtlich iſt $dz = -du$.

Zweytens iſt $MRN - \frac{ds}{r}$ MAN $= \frac{\cos\omega \, . \, ds}{z}$;

MSN $= \frac{\cos\omega \, . \, ds}{u}$. Die Winkel ſind hier Kreisbogen mit einem der Einheit gleichen Halbmeſſer.

Nun iſt aus (II.)

$$\frac{2\,ds}{r} = \frac{\cos\omega.\ ds}{z} + \frac{\cos\omega.\ ds}{u}.$$

Daraus iſt

$$u = \frac{r\,z\cos\omega}{2z - r\cos\omega}.$$

VI. Für die krumme Linie muß eine Gleichung zwiſchen dem Radius AM und dem Winkel BAM, den AM mit einer der Lage nach gegebenen AB macht, oder einer Function dieſes Winkels, gefunden oder gegeben ſeyn. Aus dieſer wird für irgend ein z der Werth von r und von cos ω hergeleitet. Der daraus zufolge der Formel für u gefundene Werth von MS wird auf den zurückgeworfenen Strahl getragen, um den zugehörigen Punct der Brennlinie zu erhalten.

VII. Man ziehe RG ſenkrecht auf MA, ſo iſt $MG = \cos\omega$, und $MS = \frac{MA \times MG}{2MA - MG}$. Man halbire MG in H, ſo iſt $MS = \frac{MA \times MG}{2AH}$, weil $MA - AH = HM = \frac{1}{2}MG$ iſt, es mag G jenſeits oder dieſſeits A liegen.

14. Wenn die auffallenden Strahlen ſich parallel ſind, ſo iſt z unendlich groß, und $u = \frac{1}{2}\cos\omega$, wie in (G.) gefunden iſt.

15. Daß die zurückgeworfenen Strahlen die Brennlinie berühren, iſt in (3) für parallel einfallende Strahlen analytiſch erwieſen. Daſſelbe gilt auch für divergirend auffallende. Denn nicht auf den Winkel, welchen die auffallenden Strahlen mit den Normalen und unter ſich machen, kommt es hier an, ſondern darauf, daß die zurückgeworfenen mit den Normalen dieſelben Winkel wie die auffallenden machen.

16. Wenn die zurückgeworfenen Strahlen ſelbſt ſich ſchneiden, ſo kann man A und S als die Brennpuncte einer die krumme Linie in dem Bogen MN oſculirenden Ellipſe betrachten; das iſt, einer ſolchen, die zwey unendlich nahe Puncte und die daſelbſt berührenden mit der Curve gemein hat. Es iſt alſo, zufolge der Natur der Ellipſe, $AM + MS = AN + NS$, und $AN - AM = SM - SN$. Schneiden aber die rückwärts genommenen Verlängerungen der zurückgeworfenen Strahlen ſich einander, ſo ſind A und S die Brennpuncte einer die krumme Linie oſculirenden Hyperbel, und es iſt, $AM - MS = AN - NS$, alſo nun $AN - AM = SN - SM$.

17. Man betrachte in dem erſten Falle die zurückwerfende Linie als eine Reihe von elliptiſchen Bogen, die einen gemeinſchaftlichen Brennpunkt A haben. Der andere Brennpunct rückt auf der Brennlinie fort, ſo wie der Einfallspunct auf der zurückwerfenden Linie fortrückt. Jedes Element der Brennlinie liegt in der Richtung eines zurückgeworfenen Strahls zwiſchen den Durchſchnitten mit zwey andern auf beiden Seiten unendlich nahen, und iſt die Verlängerung deſſelben in Rückſicht auf den unmittelbar folgenden. Es ſey die ſtetige Folge der auffallenden Strahlen, a, b, c, d . . . . z, deren jeder von dem vorhergehenden unendlich wenig verſchieden iſt. Die dazu gehörigen zurückgeworfenen ſeyn $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots \omega$. Der Anfang der Brennlinie ſey in dem Durchſchnitte der beiden erſten α, β, die Reihe der Elemente auf der Brennlinie ſey ds, ds', ds'', etc. Ihre Summe ſey $= S$. Es iſt

$$a + \alpha = b + \beta$$
$$b + \beta + ds = c + \gamma$$
$$c + \gamma + ds' = d + \delta$$
$$d + \delta + ds'' = e + \varepsilon$$
etc. etc.

Bey der Addition aller dieſer Gleichungen heben ſich alle Paare, $b+\beta$; $c+\gamma$, etc. gegen einander auf, bis auf das erſtere $a+\alpha$, und das letzte $z+\omega$, und es iſt $+\alpha+S=z+\omega$, alſo

$$S=z-a-(\alpha-\omega).$$

Die Brennlinie iſt alſo rectificabel, wenn die zurückwerfende eine algebraiſche iſt.

17. Wenn die zurückgeworfenen Strahlen divergiren, ſo iſt,

$$a-\alpha=b-\beta$$

$$b-\beta-ds'=c-\gamma$$

etc. etc.

und $a-\alpha-S=z-\omega$

alſo $S=a-z-(\alpha-\omega)$.

18. Wenn die zurückwerfende Linie ein Kreis iſt, ſo iſt es ſehr leicht, Puncte der Brennlinie zu finden, da der Halbmeſſer der Krümmung und der Mittelpunct derſelben unveränderlich ſind. — Die Aufgabe iſt ſchon in dem Artikel Brennlinie (> — 9) aufgelöſet. Da für parallele Strahlen die Brennlinie eine Epicykloide iſt, ſo wollen wir ſuchen, ob eine ſolche auch für divergirende Strahlen Statt habe.

Es ſey R (Fig. 66.) der Mittelpunct des zurückwerfenden Kreiſes BM. Um denſelben ſey ein Kreis FDE beſchrieben, auf deſſen Umfange ein anderer Kreis DSM ſich wälze, und mit dem Puncte S des Umfanges eine Epicykloide beſchreibe. Der Mittelpunct dieſes Kreiſes ſey C. An einem zurückwerfenden Puncte M ſey das Einfallsloth RM gezogen, und MS der zurückgeworfene Strahl, MA der einfallende von einem Puncte A auf der Linie BRA durch R und den Anfang der Wälzung F. Man ſucht das Verhältniß MS : MA. Es ſey $RM=r$; $RA=a$; $CM=b$; $MS=u$; $MA=z$; W. $CMS=\omega$.

Erſtlich iſt $u = 2b\cos\omega$. Zweytens folgt aus der Formel in (13. V.) $z = \frac{ru\cos\omega}{2u - r\cos\omega}$. Setzt man für $\cos\omega$ ſeinen Werth, ſo iſt $z = \frac{ru}{4b - r}$. Alſo iſt das Verhältniß $z:u$ ein unveränderliches, nämlich $r:4b - r$. Drittens muß der Abſtand RA des Punctes A von R unveränderlich ſeyn. Nun iſt in dem Dreyecke ARM für die drey Seiten nebſt dem Winkel ω die Gleichung, $aa = rr + zz - 2rz\cos\omega$, und es iſt, wenn in der Formel für z der Werth von u geſetzt wird, $z = \frac{2br\cos\omega}{4b - r}$, oder abgekürzt, $z = mr\cos\omega$. Dieſer Werth in jene Gleichung geſetzt, giebt $aa = rr + m^2r^2\cos\omega^2 - 2mr^2\cos\omega^2$. Damit a eine endliche unveränderliche Größe ſey, muß der Factor der veränderlichen, $\cos\omega^2$, Null ſeyn. Dieſes giebt $m = 2$, und $a = r$, ſo daß der ſtrahlende Punct auf dem Umfange des zurückwerfenden Kreiſes liegt. Ferner iſt $2b = 2(4b - r)$, daher $3b = r$. Nimmt man alſo $RF = \frac{1}{3}RB$, und läßt den Kreis mit dem Durchmeſſer $DM = \frac{2}{3}RB$ ſich auf jenem wälzen, ſo iſt die von einem Puncte S auf dem Umfange des letztern beſchriebene Epicykloide die Brennlinie für die von A auffallenden Strahlen, wenn nämlich bey der Berührung in F der Punct S in F fällt. Sie geht durch den Punct A.

Nimmt man den ſtrahlenden Punct A auf dem Endpuncte des Durchmeſſers eines zurückwerfenden Kreiſes, ſo läßt ſich leicht zeigen, daß MS ($= u$) zu MA ($= z$) ein gegebenes Verhältniß hat, da $z = 2r\cos\omega$ iſt, alſo $u = \frac{1}{3}z$ iſt. Hieraus ergiebt ſich ſogleich, daß die

Brennlinie eine Epicykloide iſt, deren Conſtruction die vorher gefundene iſt.

Wird m unendlich groß genommen, ſo iſt $4b - r = o$, daher a unendlich, ſo wie z. Die Strahlen fallen parallel auf, und der Halbmeſſer des ſich wälzenden Kreiſes iſt $= \frac{1}{4} r$, des unbewegten $= \frac{1}{2} r$, wie es in (10. VIII.) gefunden iſt.

Die Epicykloide oder Brennlinie für die von A auf dem Umfange des Kreiſes auffallenden Strahlen iſt diejenige, welche wegen ihrer Geſtalt auch die **Cardioide** genannt wird, ſ. Cardioide.

19. Die zurückwerfende Linie LMNO (Fig. 65.) ſey eine Ellipſe, auf welche die Strahlen von dem einen der Brennpuncte A fallen. Die halbe große Axe ſey $= a$; die halbe kleine Axe $= b$. Für die Ellipſe iſt der Halbmeſſer der Krümmung $r = \frac{bb}{a \cos\omega^3}$ (ſ. Ellipſe), folglich die Länge des zurückgeworfenen Strahls $u = \frac{bbz}{2az\cos\omega^2 - bb}$. Daraus iſt $2auz\cos\omega^2 = b^2(u + z)$. An der Ellipſe iſt die Summe der beiden Linien, die aus den Brennpuncten an einem Punct ihres Umfanges gezogen werden, $= 2a$, und ihr Product $= \frac{b^2}{\cos\omega^2}$, aus welchen beiden Gleichungen dieſelbe wie die zwiſchen u und z gefundene entſteht. Die auf die Ellipſe aus dem einen Brennpuncte auffallenden Strahlen werden alſo alle nach dem andern Brennpuncte hin zurückgeworfen.

Cavaleri's Methode des Untheilbaren (Methodus Indiviſibilium) iſt ein Verfahren, Flächen und Körper zu meſſen, wobey Linien als untheilbare Ele-

mente oder Beſtandtheile von Flächen, und Flächen als ſolche Beſtandtheile von Körpern angeſehen werden. Bonaventura Cavaleri, ein Geometer in der erſten Hälfte des 17ten Jahrhunderts, aus dem Orden der Jeſuaten, war Profeſſor der Mathematik zu Bologna. Er hat ſeine Methode in einem Werke vorgetragen, welches den Titel führt: Geometria indiviſibilibus continuorum nova quadam ratione promota. Autore F. Bonaventura Cavalerio. Bononiae 1635. 696. pag. 4. Zweyte Ausgabe 1653. Er erläuterte ſie nachher noch in den Exercitatonibus geometricis, Bonon. 1647. 4, und vertheidigte ſie gegen die Einwürfe des Guldin. Vor Cavaleri hat Kepler die Ausmeſſung mancherley Körper durch Zerlegung in Elemente, aber körperliche, gezeigt, in dem Supplemento Stereometriae Archimedeae, die der Stereometria doliorum vinariorum, Lincii 1615 Fol. beygefügt iſt. Cavaleri führt auch Keplers Unterſuchungen in der Vorrede zu ſeinem erſten Werke an, mit der Bemerkung, daß es ihm angenehm geweſen, ſeine neue und bequeme Methode auf die von Kepler aufgeſtellten neuen Gattungen von Körpern anzuwenden. Guldin nahm von dieſer Anzeige einen Grund her, daß Cavaleri durch Kepler auf ſeine Methode geleitet wäre. Dieſem widerſpricht C. in ſeinem zweyten Werke, und fügt hinzu, Kepler ſetze aus höchſt kleinen (minutiſſimis) Körperchen ohne Zwiſchenräumchen größere zuſammen, er aber ſage, daß ebene Figuren ſich wie die Aggregate gleich weiter Parallelen, Körper, ſich wie die Aggregate gleich weiter parallelen Ebenen, verhalten. Seine Methode ſey die von den Alten ſchon gebrauchte, nur einfacher gemacht. In der That iſt die Exhauſtions-Methode der Alten im Weſentlichen dieſelbe mit der Cavaleriſchen, nur daß jene ihrer Beweisart die befriedigendſte Evidenz gaben, dagegen Cavaleri's Methode durch die Unbeſtimmtheit des Begriffs, untheilbare Größe, und durch das Unendliche eine Dunkelheit läßt, die der Urheber ſelbſt in der Vorrede zu dem ſiebenten Buche ſeines Werks befürchtet, daher er eben dieſes Buch dazu wid-

mek, andere Beweiſe für die vorher erwieſenen Sätze, ohne den Begriff des Unendlichen zu geben. Die Alten fanden zwey Summen endlicher Größen, zwiſchen welchen die Größe liegt, deren Werth beſtimmt werden ſoll; die gemeinſchaftliche Gränze beider Summen iſt dieſer Werth. Sie zeigten, daß derſelbe weder größer noch kleiner ſeyn könne als jene Gränze. Cavaleri erſpart ſich die Mühe, die beiden einſchließenden Summen zu beſtimmen, und den eben gedachten Beweis zu führen. Er ſucht gleich die Gränze der Summe einer unbeſtimmten Menge unendlich kleiner Größen, ſetzt aber für die letztern endliche ihnen proportionale einer andern Art, und druckt die unendlich große Summe durch eine proportionale endliche Größe aus, welches möglich iſt, weil hier nicht die abſolute Menge, ſondern nur eine proportionale geſucht wird, indem immer zwey Größen auf eine gleichförmige Art in unendlich viele Theile getheilt werden. Cavaleri erklärt ſich nirgends deutlich über ſeine Indiviſibilia. In einem Scholium im 2ten Buche, p. 17. wo er eine Bedenklichkeit wegen ſeiner Beweisart heben will, läßt er es unentſchieden, ob die ſtetigen Größen ganz und allein aus den Untheilbaren zuſammengeſetzt ſeyn, oder ob zwiſchen den Untheilbaren noch etwas enthalten ſey. Die Untheilbaren ſind bey ihm parallele Linien und Ebenen, jene als gleichſam untheilbare Abſchnitte von Flächen, dieſe als ſolche von Körpern. Nun kann man aber durchaus nicht Flächen aus Linien, noch Körper aus Flächen zuſammenſetzen. Der Ausdruck, Indiviſibilia, verurſacht hier eine ſehr nachtheilige Dunkelheit und Schwierigkeit. Nimmt man Linien und Flächen für das, was ſie wirklich ſind; ſo kann man keine Flächen und Körper daraus zuſammenſetzen. Nimmt man ſie für höchſt ſchmale Flächenſtreifen und körperliche Abſchnitte, ſo leidet entweder die Genauigkeit, wenn man ſich dieſe als endliche Größen gedenkt, oder die Deutlichkeit, wenn man ſie als unendlich klein oder verſchwindend betrachtet.

In dem Corollarium des 3. S. im 2. Buche giebt Cavaleri ſelbſt an, was die Grundlage ſeiner neuen Geo-

metrie ſey. Er ſagt, um das Verhältniß zweyer ebenen, oder körperlichen Figuren zu finden, brauche man nur das Verhältniß zu ſuchen, welches in den ebenen Figuren alle ihre nach irgend einer Regel genommenen Linien, und in den körperlichen Figuren alle ihre gleichergeſtalt genommenen Ebenen (d. i. Durchſchnitte) haben. Die Regel iſt bey ebenen Figuren irgend eine in ihrer Ebene gezogene gerade Linie, mit welcher innerhalb der Figur unendlich viele parallele gedacht werden; bey Körpern iſt ſie eine Ebene, mit welcher innerhalb des Körpers unendlich viele parallele Durchſchnitte gelegt werden.

Es ſey die gerade Linie RR (Fig. 67. Tab. IV.) eine ſolche Regel. Mit dieſer werde SS parallel gezogen. Innerhalb dieſer Parallelen ſind die Linien AB und DC, gerade oder krumme, wie auch ab und dc, gezogen, mit dem Geſetze, daß die in einerley Abſtande von der Regel innerhalb der Figuren ABCD, abcd, mit jenen parallelen MN, mn ein gegebenes Verhältniß haben. Sind AD, ad, die Durchſchnitte der Figur mit RR; und BC, bc die Durchſchnitte mit SS, ſo iſt AD : ad = BC : bc = MN : mn. Dieſes geſetzt, verhalten ſich die Flächenräume der Figuren ABCD, abcd, wie AD : ad, oder wie zwey einander zugehörige, MN : mn. Cavaleri, L. II. prop. 4.

Durch die Linie RR lege man eine Ebene als Regel, mit welcher durch die parallele SS eine Ebene parallel gelegt werde. Zwiſchen beiden Ebenen ſeyn zwey Körper enthalten, deren Durchſchnitte mit einer dritten Ebene die Figuren ABCD ſind. Die Durchſchnitte dieſer Körper mit den der Regel parallelen Ebenen in einerley Abſtande von derſelben ſeyn in einem gegebenen Verhältniſſe p : q, ſo ſind die Körper ſelbſt in eben demſelben Verhältniſſe p : q. Cavaleri l. c.

Zum Beyſpiel nehme man einen Kreis und eine Ellipſe, deren große Axe dem Durchmeſſer jenes gleich iſt. Die Ordinaten, die auf einen Durchmeſſer und die große Axe

ſenkrecht ſind, verhalten ſich in beiden Figuren, für dieſelbe Abſciſſe, wie der Durchmeſſer und die kleine Axe, daher die Flächenräume eben ſo. — Läßt man den Kreis ſich um einen Durchmeſſer, die Ellipſe ſich um die große Axe, drehen, ſo verhalten ſich die Flächenſchnitte, die ſenkrecht auf jene Linien ſind, wie die Quadrate der großen und der kleinen Axe, und eben ſo die Kugel und das oblonge Sphäroid. —

Sind in den beiden ebenen Figuren die Durchſchnittslinien, welche der Regel RR parallel ſind, in demſelben Abſtande von dieſer gleich, ſo ſind die Figuren dem Flächenraume nach gleich, ſie mögen dabey ſich ähnlich ſeyn, oder nicht.

Desgleichen, wenn in den Körpern, die zwiſchen zwey parallelen Ebenen enthalten ſind, die Durchſchnitte mit derſelben, jenen parallelen, Ebene gleich groß ſind, ſo ſind die Körper dem Raume nach gleich, wie auch übrigens ihre Geſtalt verſchieden ſeyn mag.

Segner gebraucht dieſe beiden Sätze, von der Gleichheit der Figuren und Körper, als Grundlage für die Vergleichung ebener Figuren und der Körper, Elem. Geometriae §. 194. 258. Die Flächen, erinnert er, werden zwar nicht aus Linien, noch die Körper aus Flächen zuſammengeſetzt, allein die geraden Linien dienen, ihm zufolge, bloß zur Angabe der Ausdehnung nach einer gewiſſen Richtung, und eben ſo zeige die Gleichheit der Durchſchnitte in den Körpern eine gleiche Ausdehnung an.

Cavaleri erweiſet nun, nach ſeiner Methode, allgemein (L. II. Prop. 15.), daß alle ähnliche Figuren in dem zweyfachen Verhältniſſe der gleichnamigen Seiten, oder der auf ähnliche Art in ihnen gezogenen Linien, ſtehen. Der Beweis iſt etwas lang, weil er, wenn die Figuren von den parallelen Durchſchnittslinien, in mehr als zwey Puncten geſchnitten werden, ſie in andere gleich große, durch die Addition der Theile auf den Durchſchnittslinien, und Übertragung längs einer geraden Linie, verwandelt.

Dann erweiſet er (Prop. XVII.), daß alle ähnliche Körper in dem dreyfachen Verhältniſſe ihrer gleichnamigen Seiten oder der auf ähnliche Art in ihnen gezogenen Linien ſtehen. Der Beweis nimmt funfzehn Quartſeiten ein, zum Theil wegen der Verwandlung der Schnitte in einfachere. Er iſt nicht lesbar, wie Cavaleri ſelbſt befürchtet, läßt ſich aber, ſo wie der vorhergehende Beweis, kurz und leicht genug machen, und zwar nach der Cavaleriſchen Methode. Cavaleri glaubt ſehr viel geleiſtet zu haben, daß er einen Satz allgemein erweiſet, den die Alten nur von einzelnen Körpern erwieſen hatten. (Schol. Prop. 16. L. II.).

Ein Hauptſatz für die Vergleichungen der Flächen und Körper iſt der 24ſte im zweyten Buche. Expoſito parallelogrammo quocunque, in eoque ducta diametro; omnia quadrata parallelogrammi ad omnia quadrata cujusvis triangulorum per dictam diametrum conſtitutorum erunt in ratione tripla, uno laterum parallelogrammi communi regula exiſtente. Das heißt: wenn in dem Parallelogramm und dem Dreyecke Parallelen mit der einen Seite des erſtern gezogen werden, ſo iſt das Gränzverhältniß der Summen der Quadrate von dieſen Linien das von 3 : 1. Der Ausdruck, ratio tripla, kommt auch im 17ten Satze von dem Verhältniſſe ähnlicher Körper vor, und bedeutet daſelbſt, was man jetzt ratio triplicata nennt.

Mit Hülfe dieſes Satzes und des von dem Verhältniſſe aller Linien in dem Parallelogramm und dem Dreyecke, welches das von 2 : 1 iſt. (Coroll. 2. prop. 19.) erweiſet Cavaleri ſehr viele geometriſche Sätze, zwar mühſam aber doch ſinnreich.

Cavaleri's Satz folgt aus der Formel in (14.) des Artikels, arithm. Reihen höherer Ordnungen. Die Summe der Quadrate der natürlichen Zahlen, $1 + 4 + 9 \ldots + r^2$ iſt $= \frac{1}{6} r (r+1)(2r+1)$. Die

Summe von r Quadraten, deren jedes r^2 iſt, iſt $= r^3$. Dieſe verhält ſich zu jener, wie $r^2 : \frac{1}{6}(r+1)(2r+1)$. Die Gränze dieſes Verhältniſſes für ein unendlich großes r iſt $r^2 : \frac{2}{6} r^2$ oder 3 : 1.

Zum Beyſpiel nehme man einen Cylinder und Kegel mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe. Man zeichne ein Rechteck, deſſen Grundlinie der Durchmeſſer der Grundfläche beider Körper, und die Höhe ihre Höhe iſt, und ziehe darin eine Diagonale. Schneidet man die Körper durch eine Ebene parallel mit der Grundfläche, und zieht in dem Rechtecke nebſt dem Dreyecke in derſelben Entfernung von der Grundlinie, wie dort von der Grundfläche, eine parallele mit der Grundlinie, ſo ſind die Durchmeſſer der Durchſchnitte in den Körpern die Parallelen in den beiden Figuren. Die beiden Durchſchnittsflächen verhalten ſich wie die Quadrate dieſer Linien; und alle Durchſchnittsflächen (nach Cavaleri's Art zu reden) wie alle Quadrate; daher Cylinder und Kegel wie 3 zu 1. (Prop. 34. Coroll. 4. ſect. 9.)

Ein anderes Beyſpiel giebt die Quadratur der Parabel. Es ſey (Fig. 68.) BAC eine Parabel, deren Axe AD, auf welche die Chorde BC ſenkrecht iſt. Die berührende im Scheitel A iſt EF. Man ziehe durch den Punct C, und durch irgend einen andern Punct M der Parabel mit ihrer Axe die parallelen FC, PM, deren letztere die Chorde BC in N trifft. Vermöge der Eigenſchaft der Parabel iſt FC:PM=AFqu: APqu, oder PN: PM=AFqu:APqu. Alſo iſt die Summe aller PN zu der Summe aller PM, wie die Summe aller AFqu. zu der Summe aller APqu. Die beiden erſten Summen verhalten ſich wie das Rechteck ADCF und der dreylinige Raum AMCF; die beiden andern Summen verhalten ſich wie 3 : 1. Alſo iſt das Trilineum der dritte Theil des

Rechtecks, und der paraboliſche Raum BACB iſt zweydrittheil des Rechtecks BEFC. (Cavaleri L. IV. prop. 1.)

Noch ein Beyſpiel ſey die Cubatur eines Kugel-Abſchnitts und der Kugel ſelbſt, wozu es nöthig iſt, die Summe aller Quadrate der Ordinaten in einem Abſchnitte mit der Summe der Quadrate der größten unter ihnen zu vergleichen.

Es iſt AEB (Fig. 69.) ein Halbkreis über dem Durchmeſſer AB aus dem Mittelpuncte C beſchrieben; ED eine beſtimmte Ordinate ſenkrecht auf AB, und AFED das Rechteck von den Coordinaten AD, DE. Eine unbeſtimmte Ordinate iſt PM zu der Abſciſſe AP. Man laſſe das Rechteck AE und den Kreisabſchnitt AMED ſich um AD als Axe drehen, ſo beſchreibt nach einem vollendeten Umlaufe jenes einen Cylinder, dieſer ein Kugelſtück. Beide Körper verhalten ſich wie die Summen aller circulären Durchſchnitte, die mit der von DE beſchriebenen Kreisfläche parallel ſind. Da dieſe Durchſchnitte ſich wie die Quadrate ihrer Durchmeſſer verhalten, ſo verhalten ſich die beiden Körper wie die Summen aller PNqu und aller PMqu. Die Summe aller PNqu iſt proportional dem Producte AD × DEqu oder AD × AD × DB. Die Summe aller PMqu iſt die Summe aller Producte AP × PB. Man verlängere FA nach G, nehme AG = AD, und vollende ſowohl das Quadrat AGID als das Rechteck AGHB. In dem Quadrate ziehe man die Diagonale AI, und errichte über dem Dreyecke AGI als Grundfläche ein dreyſeitiges ſenkrechtes Prisma, deſſen Höhe AB iſt. Auf AG nehme man AL = AP, und ziehe parallel mit AB die Linie LM, welche AI in Q ſchneide, ſo iſt LQ (= AL) = AP. Durch LQ führe man einen Schnitt des Prisma ſenkrecht auf die Grundfläche, ſo iſt der Inhalt deſſelben = LM × LQ = AB × AP. Das Prisma verhält ſich alſo wie die Summe aller Producte AB × AP, oder wie das Aggregat der Summen aller Producte AP × AP + AP × PB.

Auf der Seitenfläche des Prisma, das GI zur Grundlinie hat, zeichne man über GI ein Quadrat, und nehme es zur Grundfläche einer Pyramide, deren Spitze A, und Höhe AG iſt. Eine Seitenfläche dieſer Pyramide iſt das Dreyeck AGI. Ein Schnitt durch LQ ſenkrecht auf AGI, alſo parallel mit der Grundfläche, iſt ein Quadrat, und die Pyramide iſt proportional der Summe aller Quadrate, wie LQqu, oder der Summe aller APqu. Der übrige Theil des Prisma iſt der Summe aller $AP \times PB$ proportional. Dieſer übrige Theil beſteht aus einem Prisma von der Höhe DB über der Grundfläche AGI, und dem Theile des Prisma von der Höhe AD über derſelben Grundfläche, der nach abgeſchnittener Pyramide übrig bleibt. Das Prisma von der Höhe AD wird ausgedruckt durch das Product $\frac{1}{2} AG \times GI \times AD$ oder $\frac{1}{2}$ AD cub. Die Pyramide aber durch $\frac{1}{3} GI \times GI \times AG$ oder $\frac{1}{3}$ AD cub. Alſo iſt der übrige Theil jenes Prisma $= \frac{1}{6}$ AD cub. Dieſes werde zu dem Prisma von der Höhe DB, das iſt zu $\frac{1}{2} AG \times GI \times DB$ oder $\frac{1}{2} AD \times AD \times DB$ addirt, ſo iſt die Summe $\frac{1}{2} AD \times AD \times DB + \frac{1}{6}$ AD cub. proportional der d Summe aller $AP \times PB$. Folglich verhält ſich der Cylinder mit dem Halbmeſſer DE zu dem Kugelabſchnitte über derſelben Grundfläche wie $AD \times AD \times DA$ zu $\frac{1}{2} AD \times AD \times DB + \frac{1}{6}$ AD cub, oder wie $DB : \frac{1}{2} DB + \frac{1}{6} AD$.

Für die Halbkugel iſt $DB = AD = AC$, alſo verhält ſich der Cylinder, deſſen Halbmeſſer und Höhe dem Halbmeſſer der Kugel gleich ſind, zu der Halbkugel, wie $1 : \frac{2}{3}$, oder wie $3 : 2$. Eben ſo verhält ſich der Cylinder, deſſen Durchmeſſer und Höhe dem Durchmeſſer der Kugel gleich ſind, zu der ganzen Kugel.

Die hieher gehörigen Sätze bey Cavaleri ſind Coroll. Propoſ. 30. L. 2.; Prop. 1. L. 3.; und Cor. 1. Prop. 34. L. 3. Die Deduction iſt hier ſehr abgekürzt, doch mit Beybehaltung ſeiner Vorſtellungsart.

Wenn die Linien, durch deren Bewegung oder Fortfließen (Cavaleri braucht einigemal das Wort fluere) eine Figur beſchrieben wird, ſich um einen feſten Punct bewegen, ſo verhalten ſich die beſchriebenen Flächenräume nicht wie die Summen der Linien, ſondern wie die Summen ihrer Quadrate. Denn man muß hier die Linien als Repräſentanten von verſchwindenden Kreisſectoren anſehen. Bey der Quadratur der Archimedeiſchen Spirallinie verfährt Cavaleri nach dieſem Grundſatze, wiewohl er ſich nicht deutlich darüber erklärt. L, 6, Prop. 9.). Er quadrirt ſie durch Hülfe der Quadratur der Parabel.

In dem zweyten anfangs angeführten Werke, den exercitt. mathem. geht Cavaleri weiter als in dem erſten, worin er nur ſolche Summirungen vortrug, die von dem Werthe einer unendlichen Reihe Quadrate, deren Wurzeln in arithmetiſcher Fortſchreitung ſind, abhangen. Er erhebt ſich daſelbſt zu Unterſuchungen, welche die Summirung einer unendlichen Anzahl von Cubis und Biquadraten erfordern. Er fand, daß die Summe der Cuborum aller Linien, die in paralleler Lage ein Rechteck ausfüllen, ſich zu der Summe der Cuborum aller parallelen in dem halbirenden Dreyecke wie 4 : 1 verhalten; und daß die Summen ihrer Biquadrate wie 5 : 1 ſind. Vergl. die Artikel: arithm. Reihen höherer Ordn. 15. und Potenz. III.

Man wird ſich gegenwärtig nicht die Mühe machen, Cavaler'is Werke zu leſen, da man ſeine Sätze weit leichter durch die Integralrechnung finden kann. Er hatte nicht den philoſophiſchen Geiſt, der auch in der Mathematik zur lichtvollen Darſtellung nöthig iſt. Seinem Vortrage fehlt es an Nettigkeit, und die Schreibart ſelbſt iſt äußerſt vernachläßigt.

Seine Methode erhielt unter ſeinen Zeitgenoſſen vielen Beyfall. Torricelli ſagt in der Vorrede zu ſeiner Abhandlung de ſolido acuto hyberbolico ſogar: Miſeret me veteris Geometriae, quae cum Indiviſibi-

lium doctrinam ſive non noverit, ſive non admiſerit, circa dimenſionem ſolidorum adeo paucas veritates invenit, ut ipſa penuria infelix ad aetatem noſtram pervenerit. In der Vorrede zu der Abhandlung, Quadratura parabolae per novam indiviſibilium Geometriam pluribus modis abſoluta, ſagt er, er wolle nicht behaupten, daß die Geometria indiviſibilium eine ganz neue Erfindung ſey. Er glaube vielmehr, daß die alten Geometer ſich dieſer Methode zur Erfindung ſehr ſchwerer Sätze bedient hätten, ob ſie gleich in ihren Beweiſen einen andern Weg genommen haben, es ſey, um die Kunſt der Erfindung zu verſtecken, oder um allen Anlaß zu Widerſprüchen zu verhüten. Genug, dieſe Geometrie ſey ein herrliches Erfindungsmittel, wodurch man unzählige, ſehr verborgene Lehrſätze kurz und directe erweiſen könne, welches nach der Methode der Alten nicht thunlich ſey.

Torricelli wendet die Methode des Cavaleri auf die Quadratur der Cykloide an, indem er zeigt, daß in dem Raume zwiſchen der halben Cykloide (vom Anfange bis zum Scheitel) und der Chorde je zwey Parallelen, in gleicher Entfernung von der Grundlinie und dem Scheitel, zuſammengenommen den beyden gleichen correſpondirenden Parallelen in dem Halbkreiſe am Scheitel gleich ſind, daher jener Raum dem Halbkreiſe gleich iſt.

Er führt auch noch neue Indiviſibilia ein, Kreisumfänge, und Flächen von Kugel, Cylinder und Kegel. Dadurch findet er den Inhalt eines hyperboliſchen Körpers, den er ſolidum hyperbolicum acutum nennt. Dieſer entſteht durch die Umdrehung eines hyperboliſchen, ins Unendliche nach einer Seite hin ſich erſtreckenden, Bogens um ſeine Aſymptote. Es hat einen endlichen Inhalt, obgleich es unendlich lang iſt, weswegen T. es ein wunderſames nennt.

Descartes würdigte des Cavaleri Geometrie keiner Aufmerkſamkeit. In einem Briefe an Merſenne (Epiſt.

T. III. 86.) ſagt er, daß er die Sätze in einer Viertelſtunde überlaufen habe, weil nach einer ihm von dem jüngern Schooten mitgetheilten Nachricht Cavaleri nur ſchon bekannte Sätze auf eine neue Art bewieſen hätte, welche mit dem Verfahren übereinkäme, das er zur Vergleichung des Flächenraums an einer Cykloide ſchon ehemahls gebraucht hätte. Dieſes iſt der Schluß, daß zwey gemiſchtlinichte Dreyecke, in welchen je zwey zuſammen gehörige parallele Linien gleiche Länge haben, gleich groß ſind. (Epiſt. 58.).

Roberval in Frankreich behauptete in einem Briefe an Torricelli vom J. 1644, daß er ſchon fünf Jahre vor der Ausgabe der Geometrie des Cavaleri eine ähnliche Methode gefunden hätte, die er aus den Alten geſchöpft habe, daß er aber, welches beſſer ſey, Flächen und Körper, jene aus unendlich vielen kleinen Rechtecken, dieſe aus dergleichen Prismen zuſammen ſetze. (Divers ouvrages de Mſſ. de l'Acad. roy. Paris 1693.).

Fermat gebrauchte die Methode des Untheilbaren, die er mit Rechnung verband, als eine Abkürzung der Archimedeiſchen durch umſchriebene und eingeſchriebene Rechtecke und Prismen. Er wandte ſie auch auf andere geometriſche Unterſuchungen höherer Art, außer der Cubirung der Körper, an. In einem Briefe an Roberval vom J. 1636 ſagt er, daß er ſeine Methode ſchon vor etwa ſieben Jahren einem Freunde mitgetheilt hätte.

Lucas Valerius, Profeſſor der Mathematik in Rom, der 1603 ein Werk über den Schwerpunct lieferte, brachte darin den wichtigſten und fruchtbarſten Theil der alten Exhauſtions Methode auf einige allgemeine Lehrſätze. Dadurch ſcheint er die Geometer ſeines Zeitalters auf die Vorſtellung von der Zuſammenſetzung geometriſcher Gröſſen aus unendlich vielen, unendlich kleinen Theilen, und die Bemühung jenes umſtändlichere Verfahren abzukürzen, geleitet zu haben.

Keplers im Anfange dieſes Artikels angezeigte Methode, den Inhalt körperlicher Räume zu vergleichen, iſt, wie Cavaleri richtig behauptete, von der ſeinigen ganz verſchieden. Auch iſt ſie auf gewiſſe Arten von Körpern eingeſchränkt, ſolche nämlich, die durch die Umdrehung eines Kreiſes oder einer Ellipſe um eine Axe in ihrer Ebene, parallel mit einer der Axen der Ellipſe entſtehen, die Drehungsaxe mag innerhalb oder außerhalb der Figur liegen, oder ſie berühren. Den ringförmigen, oder vollen, oder vertieften, oder zugeſpitzten Körper verwandelt er in einen Cylinder, deſſen Grundfläche die ſich drehende Figur, die Höhe oder Länge der Umfang des von einem gewiſſen Puncte der Figur beſchriebenen Kreiſes iſt, auf eine ähnliche Art, als man die Kreisfläche in ein Dreyeck verwandelt, deſſen Grundlinie der Umfang, die Höhe der Halbmeſſer iſt. Auch zerlegt er den Körper, der durch Umdrehung eines Kreiſes oder einer Ellipſe um eine Chorde (die in letzterer ſenkrecht auf eine der Axen iſt) in zwey Stücke, ein cylinderförmiges, und ein ringförmiges, welches er eine Zone nennt. Dieſe Zone verwandelt er in einen hufförmigen Abſchnitt eines Cylinders mit einer circulären oder elliptiſchen Grundfläche, und zerlegt dieſen in zwey Stücke, wovon das eine eine Zone einer Kugel iſt.

Cavaleri mag durch ſich ſelbſt auf ſeine Methode gekommen ſeyn. In der Vorrede zu der Geometrie erzählt er, daß er anfangs cylindriſche und koniſche Körper aus Ebenen, die ſich in der Axe ſchneiden, habe zuſammenſetzen, und aus den Verhältniſſen dieſer Ebenen das Verhältniß der Körper ſelbſt herleiten wollen. Allein da er eingeſehen, daß dieſes unthunlich ſey, ſo habe er die Linien und Ebenen parallel mit einander gelegt, und aus deren Verhältniſſen die Vergleichung der Figuren und Körper gefunden.

Zu vergleichen iſt

Montucla hiſtoire des Mathém. nouvelle édit. T. II. p. 37—42.

Pfleidereri diſſert. qua Kepleri methodus ſolida quaedam ſua dimetiendi illuſtratur. Tubingae 1795, worin viele hieher gehörige literariſche Nachrichten vorkommen.

Käſtners Geſchichte der Mathem. Bd. 3. S. 205.

Centrobaryca methodus ſ. regula iſt das Verfahren, den Inhalt einer Fläche oder eines Körpers, die durch die Umdrehung einer Linie oder Figur um eine Axe erzeugt werden, jene vermittelſt des Schwerpuncts der beſchreibenden Linie, dieſen vermittelſt des Schwerpuncts der Fläche der erzeugenden Figur anzugeben. Von κεντρον und βαρυς, ſchwer.

Die Regel iſt: die Fläche oder der Körper, die durch die Umdrehung einer Linie oder Figur um eine Axe erzeugt werden, werden durch das Product aus der erzeugenden Größe (Linie oder Fläche) in den Weg ihres Schwerpunctes dargeſtellt.

Dieſe Regel heißt gewöhnlich Guldins Regel, weil Guldin (ein Jeſuit aus St. Gallen gebürtig) ſie in ſeinem Werke de centro gravitatis 1635—1642 vorgetragen, und auf viele Fälle angewandt hat. Sie findet ſich aber ſchon in des Pappus mathem. Sammlungen am Ende der Vorrede zum 7ten Buche, und ſchon in der erſten Ausgabe von 1588. Guldin erwähnt dies gar nicht, ob er gleich das Werk des Pappus häufig anführt. (Montucla T. I. p. 330.).

Beyſpiel 1. Ein Kreis wird durch die Drehung des Halbmeſſers um einen Punct beſchrieben. Der Schwerpunct des Halbmeſſers liegt auf der Mitte deſſelben; der Weg dieſes Punctes iſt ein Kreis mit der Hälfte des Halbmeſſers beſchrieben. Dieſer Kreis mit der beſchreibenden Linie, dem Halbmeſſer, multiplicirt giebt einen Inhalt, der dem von dieſem beſchriebenen Kreiſe gleich iſt, übereinſtimmend mit dem, was die Kreismeſſung lehrt.

Beyſpiel 2. Auf eine ähnliche Art wird gefunden, daß die Oberfläche eines ſenkrechten Kegels durch das Product aus der Seite des Kegels in den von dem mittlern Puncte derſelben beſchriebenen Kreisumfang ausgedruckt wird.

Beyſpiel 3. Es ſey BAC (Fig. 70. Tab. IV.) ein bey A rechtwinklichtes Dreyeck, durch deſſen Drehung um AB ein Kegel beſchrieben wird. Man halbire AC in D, ziehe BD, und nehme DE $= \frac{1}{3}$ BD, ſo iſt E der Schwerpunct des Dreyecks. Es ſey EF parallel mit AC, ſo iſt der mit FE beſchriebene Kreisumfang der Weg des Schwerpuncts. Dieſer multiplicirt mit der erzeugenden Fläche BAC iſt der Inhalt des Kegels. Es ſey $1 : \pi$ das Verhältniß des Durchmeſſers zum Umfange eines Kreiſes, ſo iſt der Weg des Schwerpuncts $= 2\,\pi \,.\, FE = \frac{4}{3}\,\pi \,.\, AD = \frac{2}{3}\,\pi \,.\, AC$. Das Dreyeck iſt $= \frac{1}{2} \,.\, AB \times AC$; alſo iſt der Inhalt des Kegels $= \frac{1}{3}\pi \,.\, AB \times AC$ qu, oder gleich dem dritten Theile des Cylinders mit dem Halbmeſſer AC und der Höhe AB, wie in der Geometrie erwieſen wird.

Die Regel iſt gegenwärtig von keinem Nutzen für die Berechnung der Körper und ihrer Oberflächen, weil es gewöhnlich ſchwerer iſt, den Abſtand des Schwerpunctes von der Drehungsaxe zu finden als jenes. Die Geometer des 17ten Jahrhunderts, welche noch keine allgemeine Methoden zu geometriſchen Vergleichungen hatten, mußten einzelne Hülfsmittel dazu ſuchen. Inzwiſchen iſt der Satz für ſich merkwürdig, weil er die Relation zwiſchen dreyerley Größen, der Länge einer Linie oder dem Inhalt einer Figur, der beſchriebenen Fläche oder dem Körper, und dem Abſtande des Schwerpuncts der erſtern zeigt.

Man kann ſich dieſes Satzes bedienen, den Abſtand des Schwerpunctes einer Linie oder Fläche von der Axe der Drehung zu finden, wenn die beiden andern Größen bekannt ſind. Z. B. man wolle den Schwerpunct eines Halbkreiſes finden. Die von demſelben beſchriebene Ku-

gel iſt $= \frac{4}{3}\pi r^3$, wenn r der Halbmeſſer iſt. Der Inhalt des Halbkreiſes iſt $\frac{1}{2}\pi r^2$. Alſo iſt der Weg des Schwerpunctes bey einer ganzen Drehung $\frac{4}{3}\pi r^3 : \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{8}{3} r$. Dieſes iſt der Umfang des beſchriebenen Kreiſes, deſſen Halbmeſſer folglich $\frac{4r}{3\pi}$ iſt, der Abſtand des Schwerpunctes vom Mittelpuncte.

Man ſuche den Schwerpunct des halben Kreisumfanges. Da die von demſelben beſchriebene Oberfläche der Kugel $= 4\pi r^2$, und der halbe Umfang $= \pi r$ iſt, ſo iſt der ganze Weg des Schwerpunctes $= 4r$, und der Abſtand deſſelben von dem Mittelpuncte $= \frac{2r}{\pi}$.

Guldin erwies ſeinen Satz theils durch Induction in ſolchen Fällen, wo die erzeugte Größe ein ſchon bekanntes und erwieſenes Verhältniß zu der erzeugenden hat, und die Lage des Schwerpunctes der letztern auch bekannt iſt. Dann wollte er auch einen directen Beweis führen, der aber ſehr mißlungen iſt. Er glaubte, weil der Abſtand des Schwerpuncts von der Axe der Drehung ein gewiſſes Mittel zwiſchen den Abſtänden der Theile der erzeugenden Größe hält, und weil dieſer Punct ein einziger ausgezeichneter iſt, ſo müſſe ihm vor allen andern Puncten die in dem Satze angegebene Eigenſchaft zukommen. Es iſt beſſer, ſich an die Induction allein zu halten, als ſolche Vermuthungsgründe zu gebrauchen.

Aus der Eigenſchaft des Schwerpunctes läßt ſich der Satz leicht herleiten. Wenn in einer Ebene mehrere ſchwere Puncte auf derſelben Seite einer geraden Linie liegen, und von ihnen Perpendikel auf dieſe Linie gezogen werden, ſo iſt die Summe der Producte aus dem Gewichte jedes Punctes in ſeine Entfernung von der gegebenen Linie gleich dem Producte aus der Summe aller Gewichte in den Abſtand des Schwerpunctes. Man laſſe die Ebene mit den Puncten um die gegebene Linie ſich drehen, und

einen Umlauf vollenden, ſo iſt die Summe der Producte aus dem Gewichte jedes einzelnen Punctes in den beſchriebenen Weg gleich dem Producte aus der Summe aller in den Weg des Schwerpunctes, weil die Kreisumfänge ſich wie die Halbmeſſer oder Entfernungen von der Drehungs-Axe verhalten.

Zuerſt laſſe man die Puncte alle gleich ſchwer ſeyn, und auf einer gegebenen Linie liegen. Es iſt alsdann die Summe der Producte aus dem Gewichte jedes Punctes in ſeinen Weg gleich dem Producte aus dem Gewichte eines einzelnen Punctes in die Summe aller Wege. Da der Satz für jede beliebige Anzahl Puncte richtig iſt, ſo iſt er auch für die ganze Linie richtig, oder es iſt das Product aus dem Gewicht eines einzelnen Puncts in die Oberfläche gleich dem Producte aus der Summe aller Gewichte in den Weg des Schwerpunctes. Die Summe aller Gewichte iſt das Gewicht eines einzelnen Punctes mit der Länge des Bogens multiplicirt. Dadurch geht das Gewicht des einzelnen Punctes aus der Vergleichung heraus.

Iſt die erzeugende Größe eine ebene Figur, die ſich um eine geradlinichte Seite dreht, ſo ziehe man auf dieſe irgend eine Anzahl ſenkrechter Linien, die alle als ſchwer, und in gleichen Theilen gleich ſchwer betrachtet werden. Ihre Schwerpuncte halbiren jede derſelben. Wird in jedem das Gewicht der ganzen Linie vereinigt, ſo entſteht eine Reihe ſchwerer Puncte, und es iſt das Gewicht aller multiplicirt in den Weg des gemeinſchaftlichen Schwerpunctes gleich der Summe der Producte jedes einzelnen Gewichts in den Weg deſſelben; das iſt, (wenn für die Gewichte die denſelben proportionalen Längen geſetzt werden), die Summe aller ſenkrechten Linien auf die Drehungsaxe multiplicirt in den Weg ihres gemeinſchaftlichen Schwerpunctes iſt gleich der Summe der Producte jeder Linie in den Weg ihres Mittels, oder in den Umfang des von ihrer Hälfte beſchriebenen Kreiſes; oder jenes Product iſt gleich der Summe aller Kreisflächen, die von den ſenkrechten Linien um die Drehungs-Axe beſchrieben werden. Da

dieſes für jede Anzahl von Linien gilt, ſo gilt es auch für die Fläche, welche ſie ausfüllen, und den Körper, den die Kreisflächen ausfüllen. Alſo u. ſ. w.

Tacquet beſchäftigt ſich viel mit der geometriſchen Anwendung des Schwerpunctes, in dem fünften Buche der cylindricorum et annularium, welches in der Sammlung ſeiner Werke denſelben beygefügt iſt.

Characteres ſ. Bezeichnung und Zeichen.

Characteriſtica der Logarithmen, ſ. Logarithmen und Kennzifer.

Characteriſtiſches Dreyeck in einer krummen Linie iſt dasjenige, welchem ſich das gemiſchtlinichte zwiſchen dem Unterſchiede zweyer Ordinaten, dem Unterſchiede der zugehörigen Abſciſſen und dem Bogen der krummen Linie, zu deſſen Endpuncten die Ordinaten gehören, immer mehr nähert, je kleiner der Bogen genommen wird. Es kann nur gedacht, nicht ſinnlich dargeſtellt werden. Die Benennung iſt ſehr ſchicklich, weil die Verhältniſſe der Seiten dieſes Dreyecks die krumme Linie charakteriſiren. Leibnitz hat ſie zuerſt gebraucht. S. Opp. T. III. p. 85. 128. 193. 291. Barrow leitete aus dieſem Dreyeck ſeine Methode her, berührende an eine krumme Linie durch einen gegebenen Punct zu ziehen.

Chilias iſt das griechiſche Wort für Tauſend. Im Zählen machen wir im Deutſchen mit jeder Chiliade einen Abſchnitt.

Chiliagonum, ein Vieleck von tauſend Seiten. Der Centriwinkel eines regulären iſt 21′ 36″, die Seite iſt 62831439 für den Halbmeſſer 10000 Millionen.

Chorde, oder Sehne, iſt die gerade Linie, welche zwiſchen zwey Puncten einer krummen Linie liegt, ohne ſie in einem Puncte zwiſchen denſelben zu ſchneiden. In krummen Linien, die in ſich ſelbſt wiederkehren, wie Kreis

und Ellipſe gehört eine Chorde ſowohl zu dem einen, als zu dem andern Theile, zu dem größern wie zu dem kleinern. Von der Berechnung der Chorden in einem Kreiſe aus den zugehörigen Winkeln ſ. Cyklometrie und reguläre Figur.

Circul, ſ. Kreis.

Circularſtücke in einem rechtwinklichten ſphäriſchen Dreyecke ſind die beiden Katheten, das Complement der Hypotenuſe zum Quadranten, und die Complemente der beiden ſpitzen Winkel (der innern oder äußern) zu einem Rechten. In einem ſphäriſchen Dreyecke, deſſen eine Seite ein Quadrant iſt, ſind es die beiden daran liegenden Winkel, die Complemente der beiden andern Seiten zum Quadranten, und das Complement des gegen über liegenden Winkels (des innern oder äußern ſpitzen) zum Rechten. Neper hat ſie zum Behuf ſeiner Regel für dieſe beiden Gattungen von Dreyecken circulares genannt. (Logarithm. canonis deſcriptio. L. II. c. 4.) Das geſuchte wird als das mittlere angeſehen, die gegebenen Dinge ſind entweder die zunächſt anliegenden (circumpoſita) oder die entgegengeſetzten (oppoſita), d. i., welche auf die anliegenden folgen, immer mit Übergehung des rechten Winkels oder der Quadrantalſeite. Die Regel iſt in dem Artikel, Nepers Regel, zu finden.

Circulirender, oder periodiſcher, **Decimalbruch** iſt ein ſolcher, worin dieſelbe Ziffer oder mehrere immerfort in ihrer Ordnung wiederkehren, wie 4,7390 7390 7390 ... Alle Decimalbrüche, die nicht irgendwo abbrechen, ſind periodiſche. S. Decimalbruch.

Circulzahl oder **Kugelzahl** iſt eine ſolche, von welcher eine Potenz ſich mit ihr ſelbſt endigt. Z. B. von 5 iſt das Quadrat 25, der Würfel 125: von 6 iſt das Quadrat 36, die Würfel 216. Von 76 iſt das Qua-

drat 5776, der Würfel 438976. Dieſes iſt von keinem Nutzen.

Circumferenz, ſ. Umfang.

Ciſſoide iſt eine krumme Linie der zweyten Claſſe, deren Gleichung iſt $x^3 = (a - x)y^2$. Sie iſt von einem griechiſchen Geometer, Diokles, erdacht, um das bey den Alten wichtige Problem, wie zwiſchen zwey gegebnen Größen die zwey mittlern ſtetigen (geometriſch) proportionalen zu finden ſeyn, aufzulöſen. Eutocius hat die Conſtruction des Diokles in ſeinem Commentar über das zweyte Buch des Archimedes von der Sphäre und dem Cylinder uns erhalten. Diokles hat von der krummen Linie nur einen Theil in Betracht gezogen, ſo viel ihm zu ſeiner Abſicht nöthig war. Die neuere Geometrie liefert ihre Beſchaffenheit vollſtändig.

Es iſt (Fig. 71. Tab. V.) ADBd ein Kreis über dem Durchmeſſer AB aus dem Mittelpuncte C beſchrieben, in welchem CD ſenkrecht auf AB iſt. Man nehme die gleichen Bogen DN, Dn, und ziehe die Ordinaten des Kreiſes NP, np, auf AB ſenkrecht, nebſt den Chorden AN und An. Der Durchſchnitt von NP und An giebt einen Punct M der Ciſſoide innerhalb des Kreiſes, und der Durchſchnitt der verlängerten np und AN giebt einen Punct m der Ciſſoide außerhalb des Kreiſes.

Die Gleichung für die krumme Linie wird leicht gefunden. Man bemerke nur im voraus, daß $AP:PN = PN:PB$. Verbindet man damit die beiden identiſchen Verhältniſſe $PN:PB = PN:PB$, ſo iſt $AP:PB = PN^2:PB^2$. Nun iſt

$$AP:PM = Ap:pn = PB:PN,$$

alſo $AP^2:PM^2 = PB^2:PN^2 = PB:AP$,

folglich iſt $AP^3 = PM^2 \times PB$.

Man ſetze $AB = a$; $AP = x$; $PM = y$,

ſo iſt $x^3 = y^2(a - x)$.

Hier iſt x die erſte der beiden mittlern proportionalen zwiſchen y und a — x. Denn die dritte proportionale zu y und x iſt $\frac{x^2}{y}$, und die vierte $\frac{x^3}{y^2}$, welche der gefundenen Gleichung zufolge a — x iſt. Die Ordinate am Kreiſe iſt die zweyte von den beiden mittlern proportionalen. Denn $PN^2 = x(a-x) = \frac{x^4}{y^2}$, alſo $PN = \frac{x^2}{y}$. Die vier ſtetigen Proportionalen ſind demnach

PM : AP : PN : PB.

Nimmt man ſtatt der Coordinaten AP, PM, PN die Ap, pm, pn, ſo iſt auf gleiche Art, wie zuerſt, $Ap^3 = pm^2 \times pB$, und $pn^2 = Ap \times pB$. Setzt man $Ap = x$; $pm = y$, ſo iſt für den Punct m ebenfalls $x^3 = y^2(a-x)$, und die vier ſtetigen proportionalen ſind pm : Ap : pn : pB.

Die Linie AMn ſchneide den Halbmeſſer CD in Q, und BM denſelben in R, ſo iſt AC : CQ = AP : PM, und CR : BC = PM : BP, alſo CR : CQ = AP : BP = PM : PN. (Nämlich PM : PN iſt das duplicirte Verhältniß von PM : AP, wie AP : BP von AP : PN oder PM : AP). Es ſey CS die mittlere proportionale zwiſchen CR und CQ, ſo iſt CR : CS = PM : AP, und auch CS : CQ = PM : AP. Alſo ſind CR : CS : CQ : CA drey gleiche Verhältniſſe, und die vier Linien CR, CS, CQ, CA ſtetig proportional.

Hieraus ergiebt ſich nun die Conſtruction zur Erfindung der zwey mittlern Proportionalen zwiſchen zwey gegebenen CR, CA. Mit der einen (hier der größern)

CA als Halbmeſſer beſchreibe man einen Kreis, und zeichne die zugehörige Ciſſoide. Die andere CR trage man auf den ſenkrechten Halbmeſſer CD von C nach R, ziehe BR, welche die Ciſſoide in M treffe; dann AM, welche CD in Q ſchneide; und ſuche zwiſchen CQ nnd CR die mittlere proportionale CS, ſo ſind CR, CS, CQ, CA die vier ſtetigen Proportionalen, von welchen CR, CA die gegebenen ſind.

Iſt CR größer als CA oder CD, ſo trifft BR die Ciſſoide in einem Puncte außerhalb des Kreiſes, und Q fällt auch jenſeits D, zwiſchen D und R.

Die Linie BT, welche in B auf AB ſenkrecht iſt, iſt Aſymptote der Ciſſoide. Dieſes iſt aus der Conſtruction klar.

Für den andern Halbkreis AdB iſt ein ganz gleicher Zweig der Ciſſoide Adμ mit der Aſymptote Bt vorhanden.

Diokles zeichnet bloß den Bogen AMD des einen Zweiges. Die Alten haben in der Folge noch den Bogen Ad zugefügt, ohne doch die Linie ins Unendliche fortgehen zu laſſen. Geminus nannte, wie Proklus in ſeinem Commentar über Euklides anführt, die Ciſſoide eine zuſammen geſetzte Linie, die ſich breche und einen Winkel mache. Es kann auch ſeyn, daß ſie in dem Quadranten BCD einen Bogen, wie den AMD hinzugefügt haben, der mit dieſem in D zuſammenkam. Geminus bemerkt, daß die Ciſſoide von dem Epheublatte (κισσος, Epheu) ihren Namen, Epheuähnliche, erhalten habe.

Der Punct A, wo die beiden Zweige AD nnd Ad zuſammen kommen, iſt eine Spitze (cuſpis), wo AB die gemeinſchaftliche berührende iſt. Die Tangente des Winkels, welchen eine krumme Linie mit einer normalen Ordinate macht, iſt $\frac{dx}{dy}$, welcher Quotient für die Ciſſoide

iſt $= \frac{2ay - 2xy}{3x^2 + y^2}$. Dieſer wird in A $= \frac{0}{0}$. Um den Werth in dieſem Falle zu beſtimmen, ſetze man den Quotienten allgemein $= \frac{Q}{P}$, ſo iſt, wenn Zähler und Nenner Null werden, derſelbe $= \frac{dQ : dy}{dP : dy}$

$$= \frac{2a - 2x - 2ydx : dy}{6xdx : dy + 2y} = \frac{2a}{0} = \text{unendlich},$$ das iſt, die krumme Linie wird in A von der Abſciſſenlinie berührt. (Berührende Linie, 24.). Es erhellt dieſes auch daher, daß die Tangente des Winkels der krummen Linie mit der Abſciſſe in A ſich immer mehr dem Werthe von $\frac{y}{x}$ in dieſem Puncte nähert. Dieſer Werth iſt $= 0$.

Der ciſſoidaliſche Raum APM oder Apm läßt ſich quadriren, doch mit Zuziehung eines Kreisſectors. Der ganze, ins Unendliche ſich erſtreckende Raum zwiſchen dem unendlichen Zweige Am, der Aſymptote und dem Durchmeſſer AB, iſt das Dreyfache der Fläche des Halbkreiſes, ſ. Quadratur.

Der Bogen AM oder Am läßt ſich durch Hülfe der Logarithmen rectificiren, ſ. Rectification.

Newton hat eine ſinnreiche Conſtruction, die Ciſſoide durch eine ſtetige Bewegung zu beſchreiben, angegeben, Arithm. univ. de aequationum conſtructione lineari. p. 231. Sie iſt folgende. Über AB (Fig. 72) als Durchmeſſer iſt ein Halbkreis ADB beſchrieben. Durch den Mittelpunct ſey die unbeſtimmte CDH ſenkrecht auf AB geſetzt. EFG iſt ein rechter Winkel, deſſen Schenkel FG = AB iſt. Mit dem Endpuncte G bewege ſich dieſer auf CH, ſo daß der andere Schenkel immer durch den Punct E gehe, deſſen Abſtand CE von

C dem Durchmeſſer AB gleich iſt. Die krumme Linie, welche der Punct M, der FG halbirt, bey dieſer Bewegung des Winkelmaßes beſchreibt, iſt die Ciſſoide.

Man ziehe MP und FQ ſenkrecht auf CH, und FE ſchneide ſie in R, Es iſt

$$CE + FQ : CQ = FQ : RQ = PG : PM,$$

oder $CE + 2MP : CP - PG = PG : PM.$

Man ſetze $AC = a$, $CP = x$; $PM = y$, $PG = z$, ſo iſt aus dieſer Proportion

$$2(a+y)y = (x-z)z.$$

Da $z^2 = a^2 - y^2$, ſo iſt

$$a^2 + 2ay + y^2 = xz, \text{ daher}$$

$$(a+y)^4 = x^2z^2 = x^2(a+y)(a-y),$$

alſo

$$(a+y)^3 = x^2(a-y).$$

Mau nehme die Abſciſſenlinie auf AB von A an, ziehe MS darauf ſenkrecht, und ſetze $AS = u$, ſo iſt

$$u = a + y, \text{ und } u^3 = x^2(2a - u).$$

Dieſes iſt die Gleichung, die vorher für die Ciſſoide gefunden iſt.

Wallis fand durch ſeine Arithmetica Infinitorum die Quadratur und Cubatur der Ciſſoide, nebſt der Lage ihres Schwerpuncts. Operum T. I. p. 545.

Reimer in der hiſtoria duplicationis cubi, Göttingae 1798. liefert ſehr gute Nachforſchungen über Diokles und über die Ciſſoide, wie die Alten ſie kannten, nebſt der Überſetzung ſeiner Auflöſung des gedachten Problems aus Eutocius. Er zeigt aus einer Anführung des Proklus, daß die Ciſſoide ſchon dem Geminus, der im erſten Jahrhundert vor Chr. G. gelebt hat, bekannt geweſen, dagegen Montucla u. a. den Diokles erſt ins fünfte Jahrh. nach Chr. G. ſetzen.

Coefficient iſt die gegebene oder die unveränderliche Größe, welche in einer Gleichung oder in einer Reihe mit der unbekannten oder den veränderlichen als Factor verbunden iſt. So die Größen a, b, c in der Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = o$, oder A, B, C, D, etc. in der nach x geordneten Reihe, $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + etc.$ Wo die unbekannte oder veränderliche Größe keinen Factor hat, vertritt die Einheit die Stelle deſſelben. In unſern dekadiſchen Zahl-Ausdrücken iſt jede einzelne Ziffer der Coefficient einer zugehörigen Potenz der Zehn. Wie die unbekannten Coefficienten in einer Reihe aus den Coefficienten in andern zugeordneten Reihen beſtimmt werden, zeigt der Artikel, Methode der unbeſtimmten Coefficienten.

Coelometria iſt die Wiſſenſchaft der Regeln, Gefäße auszumeſſen, ein nicht üblicher Ausdruck für die Viſirkunſt, von κοιλος, hohl.

Coevoluten ſind zwey einander zugeordnete krumme Linien, welche eine die andere durch Abwickelung erzeugen. Es ſeyn AB, ab, (Fig. 73. Tab. V.) Bogen der beiden krummen Linien; an beide ſey ein völlig biegſamer Faden AMPma ohne Dicke gelegt, und in den Puncten M, m, nach den daſelbſt berührenden MP, mP geſpannt. Ferner ſeyn MN, mn gleich große Bogen, und in den Puncten N und n ſeyn NQ und nQ die berührenden, die ſich in Q ſchneiden. Iſt nun die Summe NQ + nQ hier, ſo wie für jede andere gleiche Bogen MN, mn, gleich der Summe MP + Pm, ſo ſind AB, ab Coevoluten. Der Durchſchnittspunct der beiden berührenden beſchreibt nach Art eines den Faden MPm ſpannenden Stiftes eine krumme Linie CD, welche für die berührenden, wie MP, mP, eine zurückſtrahlende Linie iſt, wenn dieſe berührenden als auffallende an CQ betrachtet werden.

Tſchirnhauſen hat die Coevoluten erſonnen, und Leibnitz bemerkt, daß ſie dienen, gewiſſe Aufgaben aufzulöſen.

Man ſehe ſeine Opera, Tom. III. p. 277 und 398; auch das Commercium philoſ. et mathem. Leibnitii et Jo. Bernoulli an mehrern Stellen.

In dem Artikel, Catacauſtica (16.) iſt gezeigt, daß die Summe des auffallenden und zurückgeworfenen Strahls, wenn die Strahlen aus einem Puncte auffallen, mit dem Bogen der Brennlinie gleich viel wächſt. Hier rückt der ſtrahlende Punct gerade ſo viel fort, als der Bogen der Brennlinie zunimmt; daher bleibt die Summe des auffallenden und zurückgeworfenen Strahls unverändert, und die Bogen zwiſchen den zuſammengehörigen Puncten ſind gleich groß.

Da die Liebhaberey an mannigfaltigen Conſtructionen der krummen Linien jetzt bey weitem nicht ſo ſtark iſt, als vor hundert Jahren, ſo mag das hier beygebrachte vollkommen hinreichen.

Combination iſt eine Verbindung von einigen Dingen aus mehrern gegebenen, ohne Rückſicht auf die Ordnung der verbundenen Dinge. Eine Veränderung in der Ordnung der Dinge allein macht keine andere Combination. Die Dinge können Größen ſeyn, von welchen die verbundenen in einander multiplicirt, zu einander addirt, oder zum Theil ſubtrahirt, oder auch bloß zuſammen geſtellt werden, wie die in einem Lotto gezogenen Nummern oder die Augen auf verſchiedenen Würfeln. Sie können aber auch andere Dinge ſeyn, als: Perſonen, Buchſtaben, Wörter, Farben, Karten, einfache Stoffe des Mineralreichs, u. ſ. w.

1. Die verbundenen Dinge nennt man allgemein Elemente. Die Anzahl der combinirten Dinge oder Elemente heißt der Exponens der Combination. Hierbey unterſcheidet man Combinationen an ſich und zu beſtimmten Summen, mit oder ohne Wiederholungen.

2. Die Combinationen werden in Claſſen nach der Anzahl der verbundenen Elemente abgetheilt. Ein ein-

zelnes aus den vorhandenen Elementen heißt eine Union, und eine oder mehrere derſelben machen die erſte Claſſe der Combinationen aus, obgleich dieſes Wort grammatiſch eine Mehrheit, eigentlich eine Zweyheit andeutet. Man ſieht hiebey nur auf das Ausheben aus mehrern Dingen. Eine Verbindung von zwey Elementen heißt eine Binion; von drey eine Ternion; von vier eine Quaternion; von fünf eine Quinion; von ſechs eine Sexnion, u. ſ. w. Was eine Nullion ſey, wird ſich unten (42.) in einem Beyſpiele zeigen.

3. Die Abtheilungen oder Ordnungen in den Claſſen werden nach den Elementen gemacht, die in der erſten Stelle der einzelnen Combinationen ſtehen. So gehören aaa, aab, abc zu der erſten Ordnung in der dritten Claſſe; bbb, bbc, bcd zu der zweyten in derſelben. Die Ordnung iſt der Zahl nach dieſelbe mit der Stellenzahl des anfangenden Buchſtabens, wenn die Elemente nach den folgenden Buchſtaben geordnet werden. Die Unterordnungen kann man durch die nach dem erſten Buchſtaben folgenden angeben. So gehören abbd, abce zu der Unterordnung ab in der vierten Claſſe.

4. In den Combinationen ſind entweder alle Elemente verſchieden, oder eines oder mehrere werden wiederholt, z. B. abcd, aabc, aaabbcd. Die wiederholten Elemente kann man wie Potenzen bezeichnen. — Die Zahl, welche angiebt, wie oft ein Element genommen wird, nenne man den Wiederholungs-Exponenten. So iſt 3 der Wiederholungs-Exponent von a, und 2 der von b in der Combination $a^3 b^2 cd$.

5. Die Beſchaffenheit einer Combination in Rückſicht auf die Anzahl der Elemente, und die Verſchiedenheit oder Wiederholung derſelben macht die Form der Combination aus. Sie hängt nicht von der Ordnung ab, welche man die Elemente befolgen zu laſſen für gut findet.

6. Combinationen, die in der Anzahl der Elemente und in den Wiederholungen, wenn ſolche vorhanden ſind, übereinkommen, ſind ähnlich, und machen eine Species, Art oder Gattung aus. Z. B. abc und bcd; ferner aabc, bbcd, bccd; oder a^3b^2c; c^2d^5e, bc^2d^3.

7. Die Elemente der Combinationen müſſen gut oder regelmäßig geordnet werden, d. i. ſie müſſen nach der Ordnung der ſie bezeichnenden Buchſtaben oder der Zahl ihrer Stellen auf einander folgen. Z. B. die Combination adffc iſt nicht gut geordnet, ſie muß geſchrieben werden, acdff. Dieſes iſt nöthig, wenn bey der Aufſtellung der Combinationen einer Claſſe Verwirrung und Unvollſtändigkeit vermieden werden ſollen.

8. Die Combinationen einer Claſſe werden lexikographiſch, wie die Wörter in einem Wörterbuche, geordnet. Zwey nächſte Combinationen enthalten alſo in der erſten Stelle, wo ſie von einander abgehen, zwey nächſt auf einander folgende Buchſtaben, und die zwente derſelben nach dem veränderten Buchſtaben die darauf unmittelbar folgenden, ſo viele als die Claſſe erfordert. Z. B. wenn die zu combinirenden Elemente ſind, a, b, c, d, e, f, g, ſo ſind die Combinationen aus der vierten Claſſe lexikographiſch geordnet; abcd, abce... abfg, acde ... acfg, adef... aefg, bcde . . befg, cdef . . cefg, defg, an der Zahl 35, wo man die Lücken leicht ausfüllen kann.

9. Variationen ſind Combinationen mit allen Verſetzungen der darin vorhandenen Elemente. Die variirten Combinationen können nicht nach der Folge der bezeichnenden Buchſtaben oder Zahlen in den einzelnen Complexionen geordnet bleiben. Doch muß eine gewiſſe Ordnung in der Folge der Variationen jeder Combination beobachtet werden, ſ. Verſetzungen. Die Combinationen behalten die in (8.) feſtgeſetzte Ordnung.

10. Eine combinatoriſche Involution der Art, wie hier zunächſt vorkommen werden, iſt eine Ausſonderung aller Combinationen oder Variationen, in welchen die Summe der Stellenzahlen der verbundenen Elemente von der Einheit bis zu einem gewiſſen Werthe ſteigt; ſ. unten 37. f. f.

I. Anzahl der Combinationen jeder Claſſe ohne Wiederholungen.

11. Die Anzahl der Verbindungen nach m aus n verſchiedenen Elementen, mit Inbegriff aller Variationen, iſt $= n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$.

Ein einzelnes läßt ſich aus n Elementen n mahl verſchiedentlich nehmen. Setzt man zu jedem derſelben nach der Reihe eines der übrigen $n-1$, ſo entſtehen $n(n-1)$ Verbindungen nach 2, dergleichen ab, ba, ac, dc ſind. Wird zu jeder dieſer eines der übrigen $n-2$ Elemente geſetzt, ſo entſtehen $n(n-1)(n-2)$ Verbindungen nach 3, dergleichen abc, bac, abd, ade, def ſind. Aus der Verknüpfung jeder dieſer Verbindungen entſtehen $n(n-1)(n-2)(n-3)$ Verbindungen nach 4, wie abcd, bacd, abce, abef, aefg, efgh, u. ſ. w. Solchergeſtalt wird bey jeder Zufügung eines Elements die Anzahl der Verbindungen mit Inbegriff ihrer Variationen immer mit der nächſt kleinern Zahl multiplicirt, und für m Elemente iſt die Anzahl der Verbindungen, mit Rückſicht auf die Ordnung der Elememte, die angegebene.

Für $m = n$ iſt nur eine Verbindung, aber mit $n(n-1)\ldots 2.1$ Variationen.

12. Die Anzahl der Combinationen nach m aus n verſchiedenen Elementen, ohne Variationen, iſt

$$= \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}\ldots(n-m+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,\ldots m}.$$

Es ſey dieſe Anzahl = N. Aus jeder Combination von m Elementen entſtehen durch die Verſetzung derſelben, ſie ſelbſt auch gerechnet, m (m − 1) (m − 2) . . . 2 . 1 Variationen. Alſo iſt die Menge aller Verbindungen nach m, mit Inbegriff der Variationen = m (m − 1) (m — 2) . . . . . . 2 . 1 × N. Dieſe iſt aber auch n (n — 1) (n — 2) . . . . . . (n — m + 1); alſo iſt

$$N = \frac{n . n-1 . . . . (n-m+1)}{1 . 2 . . . . m}.$$

Es iſt aus n verſchiedenen Elementen

Die Anzahl der Unionen $= \frac{n}{1}$.

Die Anzahl der Binionen $= \frac{n . n-1.}{1 . 2}$.

Die Anzahl der Ternionen $= \frac{n . n-1 . n-2.}{1 . 2 . 3}$.

Die Anzahl der Quaternionen $= \frac{n . n-1 . n-2 . n-3.}{1 . 2 . 3 . 4}$.

u. ſ. f.

14. Wenn 2m größer als n, das iſt, wenn m größer als n − m iſt, ſo nehme man das Complement n — m des Exponenten m zu der Anzahl der Elemente n, und ſuche für den Exponenten n — m die Anzahl der Combinationen. Denn nach der Formel (13.) iſt die Anzahl der Combinationen nach m =

$$\frac{n . n-1 . . . (m+1) \, m . . . (n-m+1)}{1 . 2 . . . (n-m)(n-m+1) . . . m} =$$

$$\frac{n . n-1 . . . . m+1.}{1 . 2 . . . . . n-m.},$$ da die Factoren m . . . . . (n — m + 1) im Zähler ſich gegen eben ſo viele ſolche im Nenner aufheben. Dieſes iſt aber die Anzahl der Combinationen für den Exponenten n — m.

15. Man kann n — m Dinge aus n Dingen gerade eben ſo oft nehmen als m Dinge aus derſelben Anzahl, z. B. 27 Karten aus 40 ſo oft als 13 aus 40 Karten.

16. Exempel. I. In dem Hazardſpiele, welches Lotto heißt, werden 90 Nummern in einen Kaſten gethan, und daraus 5 gezogen. Die Binionen, Ternionen, Quaternionen heißen hier Amben, Ternen, Quaternen.

Aus allen 90 Nummern iſt die Anzahl

der Amben $= \frac{90 \cdot 89}{1 \cdot 2} = 4005$

der Ternen $= \frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 117480$

der Quaternen $= \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 2555190.$

Aus den gezogenen Nummern ſind nur 10 Amben, 10 Ternen und fünf Quaternen möglich. Wer eine Ambe beſetzt, hofft auf einen Gewinn in einer Lotterie von 4005 Looſen, mit 10 Gewinnen; bey einer Terne auf einen Gewinn in einer Lotterie von 117480 Looſen mit 10 Gewinnen, und bey einer Quaterne auf einen Gewinn in einer Lotterie von 2555185 Nieten gegen 5 Gewinne.

17. Exempel. II. Im Lombre iſt die Menge der in den Händen aller drey Spieler zuſammen möglichen Spiele $= \frac{40 \cdot 39 \ldots 28 \ldots 14}{1 \cdot 2 \ldots 13 \ldots 27} = \frac{40 \ldots 28}{1 \ldots 13} =$ 12033 22280, weil 27 Karten aus 40 genommen, oder 13 aus 40 zurückgelegt werden.

Die Menge der in einer Hand möglichen Spiele, iſt die Menge der Combinationen von 9 Karten aus 40, alſo $= \frac{40 \cdot 39 \ldots 32}{1 \cdot 2 \ldots 9} = 273\,438880,$

Die Menge der in einer Hand möglichen Spiele ohne Spadille und Baſta iſt die Menge der Combinationen von 9 Karten aus 38, alſo $= \frac{38 \cdot 37 \ldots 30}{1 \cdot 2 \ldots 9} =$ 163 011640.

Die Menge der in einer Hand möglichen Spiele mit Spadille und Baſta iſt die Menge der Combinationen von 7 Karten aus 38, alſo $= \frac{38 \cdot 37 \ldots 32}{1 \cdot 2 \ldots 7} = 12620256.$

18. Die Anzahl aller Combinationen in allen Claſſen aus n Elementen iſt $= 2^n - 1$.

Es iſt die Anzahl der Unionen $= n$; der Binionen $= \frac{n \cdot n-1.}{1 \cdot 2}$; der Ternionen $= \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2.}{1 \cdot 2 \cdot 3}$; u. ſ. w. Die Anzahl der Verbindungen aller Elemente iſt $= \frac{n \cdot n-1 \ldots 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \ldots n-1 \cdot n}$. Nun iſt $(1+1)^n = 1 + \frac{n}{1} + \frac{n \cdot n-1.}{1 \cdot 2} \ldots + \frac{n \cdot n-1 \ldots 1}{1 \cdot 2 \ldots n}$ (Binomiſcher Lehrſatz. 1.). Alſo iſt die Anzahl der Combinationen in allen Claſſen $= (1+1)^n - 1 = 2^n - 1$.

Exempel. Die Zahl 2310 hat die einfachen Factoren 2, 3, 5, 7, 11, ohne Wiederholung eines derſelben. Sie hat alſo $2^5 - 1$ Factoren, das iſt, 31 Factoren.

II. Anzahl der Combinationen mit Wiederholungen.

19. Die Anzahl der Combinationen einer gegebenen Form mit Wiederholung eines oder mehrerer Elemente aus n Elementen zu beſtimmen.

Man ſuche zuerſt die Anzahl der Combinationen von ſo viel verſchiedenen Elementen, als in derſelben vorkommen, und multiplicire dieſe mit der Anzahl der Verſetzungen, die für die Wiederholungs-Exponenten Statt finden, wann dieſe als einzelne Elemente zuſammengeſtellt werden. Z. B. Die Form der Combinationen ſey aaabbcd, die Anzahl aller Elemente, $= n$. Daſſelbe

Element kann entweder dreymahl, oder zweymahl oder einmahl genommen werden. Folglich ſind für dieſelben Elemente a, b, c, d, folgende ähnliche Combinationen mit dem Exponenten 7 möglich.

$a^3b^2cd \quad a^2b^3cd \quad ab^3c^2d \quad ab^2cd^3$

$a^3bc^2d \quad a^2bc^3d \quad ab^3cd^2 \quad abc^3d^2$

$a^3bcd^2 \quad a^2bcd^3 \quad ab^2c^3d \quad abc^2d^3$

Die Anzahl der Vertauſchungen iſt offenbar die Anzahl der Verſetzungen der Wiederholungs-Exponenten 3, 2, 1, 1, welche iſt $\frac{1.2.3.4}{1.2} = 12$. Vier Elemente, wie a, b, c, d, laſſen ſich aus n Elementen nehmen $\frac{n.n-1.n-2.n-3.}{1.2.3.4}$ mahl. Folglich iſt die Anzahl der Combinationen nach 7 mit den Wiederholungs-Exponenten 3, 2, 1, 1, $= \frac{n.n-1.n-2.n-3.}{1.2.3.4} \cdot \frac{1.2.3.4}{1.2}$.

Wie in dieſem Beyſpiele, ſo in jedem andern Falle.

20. Die Anzahl der Binionen aus n Elementen, ohne und mit Wiederholungen, iſt $= \frac{n.n+1.}{1.2}$.

Die Anzahl der Binionen verſchiedener Elemente iſt $= \frac{n.n-1.}{1.2}$; der Verdoppelungen $= n$, alſo die Summe $= \frac{n.n+1.}{1.2}$.

21. Die Anzahl der Ternionen aus n Elementen, ohne und mit Wiederholungen iſt $= \frac{n.n+1.n+2}{1.2.3}$.

Die Elemente ſeyn a, b, c, d, etc. Die verſchiedenen Formen der Ternionen ſind abc, aab, aaa, welche

die Stelle aller übrigen vertreten. Die Anzahl der ähnlichen Gattungen bezeichne man durch ein vorgeſetztes N, als N. abc; N. aab; N. aaa, oder N. abc; N. a^2 b: N. a^3. Es iſt N. abc $= \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3}$; N. a^2 b $= \frac{n.n-1}{1.2}.2.1 = n.n-1$; N. $a^3 = n$. Die Summe dieſer drey Zahlen iſt die angegebene.

22. Die Anzahl der Quaternionen aus n Elementen, ohne und mit Wiederholungen, iſt

$$= \frac{n.n+1.n+2.n+3.}{1.2.3.4}.$$

Die verſchiedenen Formen dieſer Verbindungen ſind: abcd; a^2bc; a^2b^2; a^3b; a^4. Es iſt N. abcd

$$= \frac{n.n-1.n-2.n-3.}{1.2.3.4}; \text{ N. } a^2 bc$$

$$= \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3}.\frac{1.2.3}{1.2} = \frac{n.n-1.n-2.}{1.2};$$

$$\text{N. } a^2 b^2 = \frac{n.n-1.}{1.2}.\frac{2.1}{1.2} = \frac{n.n-1.}{1.2};$$

$$\text{N. } a^3 b = \frac{n.n-1.}{1.2}.2.1 = n.n-1.; \text{ N. } a^4 = n.$$

Die Summe dieſer Zahlen iſt die angegebene.

23. Die Anzahl der Verbindungen von je fünfen aus n Elementen, ohne und mit Wiederholungen, iſt

$$= \frac{n.n+1.n+2.n+3.n+4.}{1.2.3.4.5}.$$

Die verſchiedenen Formen der Verbindungen ſind hier: abcde; a^2 bcd; a^3bc; a^2b^2c; a^4b; a^3b^2; a^5.

Es iſt N. abcde $= \frac{n\,...\,n-4.}{1\,...\,5}$; N. a^2 bcd

$= \frac{n \ldots n-3.}{1 \ldots 4} \cdot 4$; $N. a^3bc = \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3} \cdot 3$;

$N. a^2b^2c = \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3} \cdot 3$; $N. a^4b = \frac{n.n-1}{1.2} \cdot 2$;

$N. a^3b^2 = \frac{n.n-1.}{1.2} \cdot 2$; $N. a^5 = n$. Die Summe aller dieſer Zahlen iſt die angegebene.

24. Da die Formen der Verbindungen, und die Anzahl in jeder Gattung nach gewiſſen Geſetzen beſtimmt werden, ſo darf man ſchließen, daß das in den vier berechneten Fällen ſich zeigende Geſetz allgemein ſey, nämlich, daß die Anzahl der Verbindungen von je m Elementen aus n, ohne und mit Wiederholungen, iſt

$$\frac{n.n+1.n+2 \ldots n+m-1.}{1 . 2 . 3 \ldots m}.$$

25. Es läßt ſich auf einem andern Wege, als dem vorher, zur Übung in den Combinationen genommenen, leicht erweiſen. Die Elemente ſeyn a, b, c, d, etc. an der Zahl n. Man multiplicire ſie nach der Reihe durch a, dann von b an durch b; von c an durch c, u. ſ. f. und ſetze den Multiplicator voran. So erhält man alle Binionen, wie ab und aa, ohne Verſetzungen und jede von den andern verſchieden. Die Anzahl der mit a anfangenden iſt $= n$, der mit b anfangenden, $= n - 1$, der mit c $= n - 2$, u. ſ. f. Folglich iſt die Anzahl aller die Summe der Reihe $n; n - 1; n - 2; \ldots, 2; 1$. Dieſe Summe iſt $= \frac{n+1.n}{1.2}$ (arithm. Reihe 6.). Die Binionen multiplicire man auf dieſelbe Art wie die Unionen, nämlich erſtlich alle durch a; dann die von der Ordnung b und den folgenden durch b; darauf die von der Ordnung c und den folgenden durch c, u. ſ. f. den Multiplicator immer vorangeſetzt. So erhält man folgende Partialſummen der verſchiedenen Ternionen nach ihren

Ordnungen: I. $\frac{n+1 . n}{1 . 2}$; II. $\frac{n . n-1 .}{1 . 2}$

III. $\frac{n-1 . n-2 .}{1 . 2}$ .... letzte $= \frac{2 . 1}{1 . 2}$. Die Summe dieſer arithmetiſchen Reihe der zweyten Ordnung erhält man am leichteſten durch den binomiſchen Lehrſatz, (Binomial-Coefficienten. 6.). Das erſte Glied iſt der zweyte Binomial-Coefficient in der $(n+1)$ten Potenz. Die Summe aller Glieder iſt der dritte Coefficient in der

$(n+2)$ten Potenz $= \frac{n+2 . n+1 . n}{1 . 2 . 3}$. Mit den Ternionen verfahre man auf dieſelbe Art, wie mit den Unionen und Binionen, ſo erhält man die Partial-Summen der Quaternionen nach ihren Ordnungen:

I. $\frac{n+2 . n+1 . n}{1 . 2 . 3}$; II. $\frac{n+1 . n . n-1 .}{1 . 2 . 3}$;

III. $\frac{n . n-1 . n-2 .}{1 . 2 . 3}$.... letzte $= \frac{3 . 2 . 1}{1 . 2 . 3}$

Die Summe dieſer dritten Binomial-Coefficienten iſt

$= \frac{n+3 . n+2 . n+1 . n}{1 . 2 . 3 . 4}$, als die Summe aller Quaternionen.

Auf dieſe Art erhellt deutlich, daß die Anzahl der Combinationen von m Elementen aus n, ohne und mit Wiederholungen, aber ohne Verſetzungen, iſt

$$\frac{n . n+1 . n+2 \ldots n+m-1 .}{1 . 2 . 3 \ldots m}.$$

26. Dieſe iſt der mte Coefficient in der Potenz $(a+b)^{-n}$, den Coefficienten n das zweyten Gliedes als den erſten gerechnet, ohne Rückſicht auf die Vorzeichen. (Binomiſcher Lehrſatz. 11.). Die Anzahl der Combinationen von m Elementen aus n, ohne Wiederholun-

gen, nämlich $\frac{n \,.\, n-1 \,.\, n-2 \,.\,.\,.\, n-m+1 \,.}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\,.\,.\,.\, m}$.

iſt der mte Coefficient in der Potenz $(a+b)^n$. (a. a. O. 1.).

27. Die Anzahl aller Combinationen aus allen Claſſen, ohne und mit Wiederholungen, von den Unionen an bis zu der von m Elementen, aus n, iſt

$= \frac{n+1 \,.\, n+2 \,.\,.\,.\,.\, n+m}{1 \,.\, 2 \,.\,.\,.\,.\, m} - 1$. Dieſe Summirung gründet ſich auf den Satz, daß die Summe des rten und $(r+1)$ten Binomial-Coefficienten in einer Potenz dem $(r+1)$ten Coefficienten in der nächſt höhern Potenz gleich iſt, (Binominal Coeff. 5.).

Oder: es iſt die Anzahl der Unionen $= n+1-1$; der Binionen $= \frac{n+1 \,.\, n}{1 \,.\, 2}$; alſo die Summe beider

$= \frac{n+2 \,.\, n+1 \,.}{1 \,.\, 2} - 1$. Die Anzahl der Ternionen iſt

$\frac{n+2 \,.\, n+1 \,.\, n}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$, alſo die Summe jener und dieſer

$= \frac{n+3 \,.\, n+2 \,.\, n+1 \,.}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} - 1$. u. ſ. f. Zur Erläuterung ſummire man in der Tafel a. a. O. 4. die Coefficienten nach einer Diagonale genommen.

28. Exempel. Man habe fünf cubiſche oder gemeine Würfel, es iſt die Frage, wie vielerley Arten von Würfen, und wie viele Würfe jeder Art mit allen dieſen Würfeln möglich ſind. Bezeichnet man die Augen durch a, b, c, d, e, f, ſo ſind die verſchiedenen Arten des Wurfs: 1) abcde; 2) aabcd; 3) aabbc; 4) aaabc; 5) aaabb; 6) aaaab; 7) aaaaa, wo die Buchſtaben jede Anzahl Augen von 1 bis 6 bedeuten,

aber jeder eine andere. Es iſt aus (20.), wenn das vorgeſetzte N die Anzahl der Combinationen in einer Gattung bedeutet, N. abcde = 6

N. aabcd = 60; N. aabbc = 60;

N. aaabc = 60; N. aaabb = 30;

N. aaaab = 30; N. aaaaa = 6.

Die Summe iſt $= 252 = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10.}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5.}$.

Weil jede Anzahl verſchiedener Augen mit andern Würfeln gebracht werden kann, ſo ſind von jeder Combination ſo viele Variationen möglich als Verſetzungen der Elemente. Dieſe ſind 1) 720, 2) 3600, 3) 1800, 4) 1200, 5) 300, 6) 150, 7) 6; in Summa 7776, welches die fünfte Potenz von 6 iſt, wie es ſeyn muß. Denn mit zwey Würfeln ſind 6 mahl 6 Würfe möglich; nimmt man noch einen Würfel dazu, ſo kann zu jedem Wurfe mit zwey Würfeln eine Seite des dritten Würfels gebracht werden, welches $6 \times 6 \times 6$ Würfe giebt, u. ſ. f.

29. Aufgabe. Wenn unter den gegebenen Elementen einige mehrmahls vorkommen, die Anzahl der Combinationen aus allen Claſſen, ohne Wiederholungen der übrigen, anzugeben.

Das Verfahren wird ſich nur an einem Beyſpiele zeigen laſſen, Es ſeyn die wiederholten Elemente, a, a, a, a, b, b, b, c, c; die übrigen d, e, f, etc. Man ſuche zuerſt die Anzahl der Combinationen von den wiederholten Elementen, a, b, c. Das erſte für ſich giebt 4, das zweyte 3, das dritte 2 Combinationen. Die Combinationen je zweyer derſelben ſind an der Zahl $4 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 2$; die Combinationen aller drey ſind an der Zahl $4 \cdot 3 \cdot 2$. Die Summe aller dieſer Combinationen iſt $9 + 26 + 24 = 59$.

Die Anzahl aller verſchiedenen Elemente ſey $= n$, ſo iſt in unſerm Falle die Anzahl der übrigen d, e, f, etc.

$= n - 3$, und die Anzahl ihrer Combinationen $= 2^{n-3} - 1$ nach (18.). Das Product dieſer Zahl in die Anzahl der Combinationen aus a, b, c giebt die Anzahl der Combinationen, worin Elemente aus beiden Abtheilungen, der a, b, c, und der übrigen, d, e, f, etc. vorkommen. Dazu nehme man die Combinationen aus a, b, c allein, ſo iſt die geſuchte Anzahl aller Combinationen aus a, a, a, a, b, b, b, c, c, d, e, f, etc.

$$= 2^{n-3} - 1 + 59(2^{n-3} - 1) + 59 = 60 \times 2^{n-3} - 1.$$

30. Exempel. Die Anzahl der verſchiedenen Factoren der Zahl $831600 = 2.2.2.2.3.3.3.5.5.7.11.$ zu finden. Hier iſt $n = 5$, alſo die Anzahl der verſchiedenen Factoren, die Zahl ſelbſt und die Einheit ausgeſchloſſen, $= 60 \times 4 - 1 = 239$.

Die Anzahl aller Combinationen aus den Elementen, a, a, a, a, a,; b, b, b, b; c, c, c; d, d iſt die Summe der Unionen, Binionen, Ternionen und der Quaternion aus den Zahlen 5, 4, 3, 2, d. i. die Summe $14 + 71 + 154 + 120 = 359$. Die Anzahl der übrigen von einander durchgehends verſchiedenen Elemente ſey $n - 14$, ſo iſt die Anzahl aller Combinationen $= 359 + 2^{n-14} - 1 + 359(2^{n-14} - 1) = 360 \times 2^{n-14}$.

III. Aufſtellung aller einzelnen Combinationen mit und ohne Wiederholungen jeder Claſſe aus einer gegebenen Anzahl von Elementen.

31. Die Anzahl der Elemente, aus welchen die Combinationen gemacht werden, ſey $= n$; die Elemente ſeyn a, b, c, d, etc. Die Claſſe der Binionen mit Wiederholungen deſſelben Elements, aber ohne Verſetzungen, wird erhalten, wenn jeder Union erſtlich das Element a; darauf der Union b und allen folgenden das Element b; ferner der Union c und allen folgenden das Element c, u. ſ. f. vorgeſetzt wird. Die Claſſe der Ternionen, wenn die einzelnen Elemente a, b, c, d, etc. ſucceſſiv denjenigen Binionen vorgeſetzt werden, die ſich mit dem vorzuſetzen-

den Element oder einem folgenden anfangen. Auf dieſe Art werden die übrigen Claſſen nach einander vollſtändig aufgeſtellt.

32. Die Combinationen ohne Wiederholungen darzuſtellen, ſetzt man in jeder Claſſe jedes Element nach der Reihe nur denjenigen Combinationen vor, die ſich mit einem der folgenden Elemente anfangen.

33. Exempel für Combinationen mit Wiederholungen.

I.	a	b	c	d
II.	aa	ab	ac	ad
		bb	bc	bd
			cc	cd
				da
III.	aaa	aab	aac	aad
		abb	abc	abd
			acc	acd
				add
		bbb	bbc	bbd
			bcc	bcd
				bdd
			ccc	ccd
				cdd
				ddd
IV.	aaaa	aaab	aaac	aaad
	etc.			

34. Exempel für Combinationen ohne Wiederholung.

I.	a	b	c	d	e
II.		ab	ac	ad	ae
			bc	bd	be
				cd	ce
					de
III.			abc	abd	abe
				acd	ace
					ade
				bcd	bce
					bde
					cde
IV.				abcd	abce
					abde
					acde
					bcde
V.					abcde

35. Die Variationen werden erhalten, wenn jeder einzelnen Combination die Zahl der Verſetzungen vorgeſchrieben wird. Das Total aller Variationen in einer Claſſe iſt die Potenz des Polynomium $a + b + c + d + e + f +$ etc. als der Summe der Elemente mit dem Exponenten, welcher der Zahl der Claſſe gleich iſt.

36. Von Combinationen ohne Wiederholungen ſind nur ſo viele Claſſen möglich, als Elemente vorhanden ſind. Mit Wiederholungen iſt die Anzahl der Claſſen willkührlich.

IV. Aufſtellung der Combinationen mit beſtimmter Summe der Stellenzahlen ihrer Elemente.

37. Den Elementen, die verbunden werden ſollen, gebe man jedem eine beſtimmte Stelle, die durch die beygeſetzte Zahl angezeigt wird, nämlich

1	2	3	4	5	6	7	....
a	b	c	d	e	f	g	....

Dieſe Verbindung der Buchſtabenreihe mit der Zahlenreihe heißt der Zeiger (Index). Es ſollen alle diejenigen Combinationen mit Wiederholungen aufgeſtellt werden, in welchen die Summe der Stellenzahlen, oder die Localſumme, eine beſtimmte Zahl iſt. Dieſes kann auf mehr als eine Art geſchehen. Erſtlich laſſen ſich die Combinationen Claſſenweiſe darſtellen, mit Beobachtung der Folge der Elemente in jeder Claſſe. Zweytens kann man ſie lexikographiſch ordnen, ſo daß nach jeder Combination diejenige geſetzt wird, welche ihr in der Folge der bezeichnenden Buchſtaben am nächſten kommt. Ein Exempel wird beide Methoden hinlänglich erklären.

83. Die Summe der Stellenzahlen ſey = 7, weswegen von allen Elementen nur die erſten 7 in den Combinationen vorkommen.

Combinationen nach Claſſen.
g
af be cd
aae abd acc bbe
aaad aabc abbb
aaaac aaabb
aaaaab
aaaaaaa

Combinationen in lexikographiſcher Folge.

7	6	5	4	3	2	1	
a	a	a	a	a	a	a	1
a	a	a	a	a	b		2
a	a	a	a	c			3
a	a	a	b	b			
a	a	a	d				4
a	a	b	c				
a	a	e					5
a	b	b	b				
a	b	d					
a	c	c					
a	f						6
b	b	e					
b	e						
c	d						
g							7

Nach der erſtern Methode ſetze man das 7te Element als Union in die erſte Claſſe. Darauf ſetze man dieſem g ſucceſſiv die Elemente a, b, etc. vor, und vertauſche g ſucceſſive mit f, e, etc. geſtatte aber keinen Rückgang in der Folge der Buchſtaben. Aus der zweyten Claſſe bildet man die dritte durch ſucceſſive Vorſetzung der Elemente a, b, etc., und Vertauſchung des letzten Elements mit demjenigen, das ſo viele Stellen rückwärts liegt, als die Zahl der Stelle des vorgeſetzten Elements Einer enthält, übergeht aber alle Combinationen, worin Rück-

gänge vorkommen, weil dieſe nur Verſetzungen ſchon gefundener Combinationen ſind.

Nach der zweyten Methode ſetze man zuerſt das erſte Element a, und ſondere es durch einen Winkelhaken ab. Man ſetze a vor, und vertauſche das a in dem Winkelhaken mit dem nächſten Elemente b, welches unter das vorgeſetzte a geſchrieben wird. Dieſe Combinationen ſondere man durch den Winkelhaken 2, 2 ab. Sie geben die Localſumme = 2. Weiter ſetze man den gefundenen Combinationen das Element a vor, vertauſche in demſelben das erſte Element linker Hand mit dem nächſtfolgenden, und ſetze die daraus entſtehenden Combinationen mit Auslaſſung derer, die Rückgänge enthalten, zu dem mit a anfangenden. Alle in dem Winkelhaken 3,3 eingeſchloſſenen Combinationen geben die Localſumme = 3. Auf dieſe Art verfahre man überhaupt, erſtlich, daß man den Combinationen von der Summe m — 1 das Element a vorſetze, und daß man in denſelben das erſte Element linker Hand mit dem nächſtfolgenden vertauſche, und alle ſo erhaltene Combinationen, die keine Rückgänge enthalten, zu jenen mit a anfangenden in denſelben Winkelhaken ſetze, wodurch dieſer alle Combinationen mit der Lokalſumme m liefert.

Setzte man in den obigen Combinationen nach Claſſen, ſtatt der Buchſtaben die zugehörigen Zahlen nach dem Zeiger (37.) ſo würden alle Combinationen, von der erſten g = 7, an bis zur letzten aaaaaaa = 1111111, arithmographiſch (ſo wie die Buchſtaben in der zweyten Darſtellung lexikographiſch) fortgehen und auf einander folgen. Auch in der arithmographiſchen Fortſchreitung der erſten Darſtellung befolgen die Combinationen, aber nur in den einzelnen Claſſen, die lexikographiſche Ordnung.

39. Die zweyte ſehr ſinnreiche Darſtellung, ſo wie die combinatoriſchen Regeln und Verfahren für beyde, ſind von Hindenburg angegeben, (Archiv der Mathem. IV. Heft. 392. S. und erſte Samml. combin. Abhandl.

S. 183.). Die zweyte Darſtellung iſt involutoriſch, d. h. ſie liefert mit den Combinationen von der Localſumme m zugleich alle von jeder niedrigern Summe. Sie ſtellt alſo die Geneſis der Combinationen ſehr ſinnlich und leicht dar; welches auf ähnliche Art auch bey den einzelnen Claſſen der erſten Darſtellung geſchehen kann, die ſich auch involutoriſch anordnen laſſen (Erſte Samml. a. A. S. 187.) Eine ſolche Darſtellung gewährt daher auch den Vortheil, daß man ſie leicht fortſetzen und für jede höhere Localſumme die Aufſtellung der niedrigern benutzen kann. Z. B. die Combinationen für die Localſumme 7 ſeyn zuſammen ^{7}J; für die Localſumme 8 ſey ſie ^{8}J, u. ſ. f. ſo ſind die

Combinationen für ^{8}J

a	^{7}J			
b	b	b	b	2
b	b	d		4
b	c	c		
b	f			6
c	e			
d	d			
h				8

Combinationen für ^{9}J

a	^{8}J			
b	b	b	c	3
b	b	e		5
b	c	d		
b	g			7
c	c	c		
c	f			
d	e			
i				9

Combinationen für ^{10}J

a	^{9}J				
b	b	b	b	b	2
b	b	b	d		4
b	b	c	c		
b	b	f			6
b	c	e			
b	d	d			
b	h				8
c	c	d			
c	g				
d	f				
e	e				
k					10

Die Combinationen, welche hier zu denen, die a enthalten, hinzukommen, ſind nach einem ähnlichen Geſetze, wie das in (38.) für die lexikographiſche Folge, aus den Elementen b, c, d, e, f, g, etc. zu den Local-Summen, 2, 4, 6, 8, etc. oder 3, 5, 7, 9, etc. gebildet. Den gefundenen Combinationen von einerley Localſumme wird das Element b vorgeſetzt, und zweytens wird in denſelben jedes der beiden erſten Elemente mit dem nächſt folgenden vertauſcht, und wo nur ein einziges vorhanden iſt, das zweyte folgende dafür genommen, wobey alle diejenigen Combinationen bey Seite geſetzt werden, in welchen ein Rückgang der Buchſtaben vorhanden iſt. Dieſe Anwendung des obigen Geſetzes bemerklich zu machen, ſind die Combinationen von gleichen Localſummen durch Winkelhaken abgeſondert. Es kann nach dieſem Verfahren keine Combination ausgelaſſen werden. Wenn eine in dem letzten Winkelhaken fehlte, ſo müßte auch eine in dem nächſt vorher gehenden fehlen, daher auch eine in dem vor dieſem vorher gehenden, u. ſ. f. bis zu dem letzten oder vorletzten von oben.

Die auf dieſe Art aus allen Combinationen der Elemente a, b, c, d, etc. ausgeſonderten machen eine combinatoriſche Involution mit dem Exponenten m aus, wenn die höchſte Localſumme = m iſt. Werden dieſe Combinationen auf jede mögliche Art verſetzt, ſo entſteht eine Involution der Variationen mit dem Exponenten m.

V. Abtheilung der Combinationen nach den Localſummen, und Anordnung nach den Wiederholungs-Exponenten eines der Elemente.

40. Es ſind wiederum n Elemente, a, b, c, d, e, etc. gegeben, von welchen je m genommen werden. Die Stelle des erſten werde durch o bezeichnet, ſo daß der Zeiger iſt

o	1	2	3	4	5	6	7	8	..
a	b	c	d	e	f	g	h	i	..

Bey der Beſtimmung der Localſumme für eine Combination wird a nicht mit gerechnet. Die Abtheilungen werden nach der Folge der Localſummen gemacht, und die Combinationen werden nach dem Wiederholungs-Exponenten von a geordnet, von dem größten angefangen.

Tafel der Combinat. in den Potenzen eines Polynomium

a^m	a^{m-1}	a^{m-2}	a^{m-3}	a^{m-4}	a^{m-5}	a^{m-6}	a^{m-7}	a^{m-8}	a^{m-9}	a^{m-10}
	b									
	c	b^2								
	d	bc	b^3							
	e	bd c^2	b^2c	b^4						
	f	be cd	b^2d bc^2	b^3c	b^5					
	g	bf ce d^2	b^2e bcd c^3	b^3d b^2c^2	b^3c	b^5				
	h	bg cf de	b^2f bce bd^2 c^2d	b^3e b^2cd bc^3	b^4d b^3c^2	b^5c	b^7			
	i	bh cg df e^2	b^2g bcf bde c^2e cd^2	b^3f b^2ce b^2d^2 bc^2d c^4	b^4e b^3cd b^2c^3	b^5d b^4c^2	b^6c	b^8		
	k	bi ch dg ef	b^2h bcg bdf be^2 c^2f cde d^3	b^3g b^2cf b^2de bc^2e bcd^2 c^3d	b^4f b^3ce b^3d^2 b^2c^2d bc^4	b^5e b^4cd b^3c^3	b^6d b^5c^2	b^7c	b^9	
	l	bk	b^2i	bh^3	b^4g	b^5f	b^6e	b^7d	b^8c	b^{10}

etc. etc.

41. In der beygefügten Tafel haben die Combinationen jeder horizontalen Abtheilung einerley Localſumme, und die in jeder Verticalreihe befindlichen mit den zu oberſt ſtehenden a enthalten m Elemente. Die Tafel liefert, ſo weit ſie reicht, in jeder Verticalreihe die Glieder der Potenz $(a + b + c + d \ldots)^m$, welche die zu oberſt ſtehende Potenz von a zum Factor haben, wenn dieſe mit den darunter ſtehenden Producten verbunden wird, wozu noch die Verſetzungszahl der Elemente als numeriſcher Factor oder Coefficient geſetzt werden muß. In jeder horizontalen Abtheilung ſind die Factoren zu den vertical darüber ſtehenden Potenzen von a enthalten, die mit jenen verbunden die Literal-Coefficienten in der Potenz $(a + bz + cz^2 + dz^3 + \text{etc.})^m$, geben, ſo daß die rte horizontale Antheilung (ohne die Reihe der Potenzen von a) zu der rten Potenz von z gehört. Die Tafel gewährt alſo eine ſehr deutliche Überſicht der Bildung der polynomiſchen Potenzen.

Die Combinationen jedes Faches werden aus denen in dem darüber zunächſt befindlichen derſelben Verticalreihe auf folgende Art hergeleitet. Für das letzte Element wird das nächſtfolgende geſetzt. Iſt das Element, welches vor dem letzten oder vor den letzten unter ſich gleichen zunächſt vorhergeht, in der Ordnung der Buchſtabenzeichen auch das nächſt vorhergehende (wie in $b^2 cd$, $b^2 cd^2$, $bc^2 d^2$), ſo wird damit dieſelbe Vertauſchung vorgenommen, ſonſt aber nicht. Alle übrigen Elemente bleiben unvertauſcht. Iſt das letzte Element wiederholt, ſo wird die Vertauſchung doch nur mit einem einzigen, dem letzten, vorgenommen. Eben ſo auch, wenn das nächſt vorhergehende unterſchiedene Element vertauſcht wird.

Der Grund dieſer Vertauſchung iſt leicht begreiflich. Durch ſie wird, wie es ſeyn ſoll, die Localſumme in der Combination um Eins erhöht. Jede Combination, die ſich auf ein einfaches oder nicht wiederholtes Element endigt, wird auf dieſe Art aus einer Combination

mit der nächſt niedrigern Localſumme hervorgebracht, z. B. bcdf aus bcde. Allein die Combinationen, in welchen das letzte Element wiederholt iſt, können nur durch Vertauſchung des nächſt vorhergehenden, von jenen verſchiedenen, Elements entſtehen. So entſteht bce^3 aus $bcde^2$; dieſes aus bcd^2e, und dieſes durch die erſtere Art der Vertauſchung aus bcd^3. Die fernere Folge der vertauſchten Combinationen rückwärts mit abnehmender Localſumme iſt $bccd^2$, bc^3d; bc^4, b^2c^3. b^3c^2, b^4c; b^5; Es kann daher bey dieſer Herleitung kein Glied in einem Fache fehlen, es müßte dann auch in dem nächſt obern fehlen; alſo auch in dem über dieſem befindlichen; alſo müßte in dem oberſten Fache die Combination der b allein auch nicht vorhanden ſeyn, auf welche doch zuletzt ſich jede Combination bringen läßt.

42. Die Tafel dient auch zu Subſtitutionen für die Potenzen einer vieltheiligen Größe, $bz+cz^2+dz^3+ez^4+fz^5+gz^6+$ etc., wenn dieſe mit gegebenen Factoren verbunden werden, und daraus eine Größe zuſammengeſetzt wird, da dann diejenigen Glieder, welche in den verſchiedenen Potenzen des Polynomium einerley Potenz von z enthalten, in ein Glied zuſammengefaßt werden. Die Polynomialgröße ſey $=Z$, und es werden alle Glieder verlangt, welche die fünfte Potenz von z enthalten. Aus den Potenzen von z ſind ſie folgende:

Aus Z	fz^5
aus Z^2	$(2be+2cd)z^5$
aus Z^3	$(3b^2d+3bc^2)z^5$
aus z^4	$4b^3c.z^5$
aus Z^5	$b^5.z^5$

Die Verſetzungszahlen ſind den Combinationen beygefügt. Jedes Element kann nämlich aus jedem der gleichen polynomiſchen Factoren genommen werden.

Iſt das Polynomium $Z = a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 + \text{etc.}$, ſo ſind die Glieder, welche die fünfte Potenz von z enthalten.

aus Z	fz^5
aus Z^2	$(2af + 2be + 2cd)z^5$
aus Z^3	$(3a^2f + 3a(2be + 2cd) + 3b^2d$ $+ 3bc^2)z^5$
aus Z^4	$(4a^3f + 6a^2(2be + 2cd)$ $(+ 4a\,3b^2d + 3bc^2) + 4b^3c)z^5$
aus Z^5	$(5a^4f + 10a^3(2be + 2cd)$ $+ 10a^2(3b^2d + 3bc^2) + 5a.4b^3c + b^5)z^5$
etc.	

In den Potenzen beider Polynomien gehören diejenigen Combinationen von a, b, c, d, e, etc. zu derſelben Potenz von z, deren Localſumme nach dem Zeiger $\overset{0}{a}\;\overset{1}{b}\;\overset{2}{c}\;\overset{4}{d}\;\overset{4}{e}\;\overset{\dots}{\dots}$ dem Exponenten der Potenz von z gleich iſt. Daher ſind aus den Potenzen des erſten, worin $a = 0$ iſt, die zu z^r gehörigen Combinationen in den Fächern der rten Horizontalreihe nach ihrer Folge anzutreffen, die Reihen oder Abtheilungen nach den höchſten Potenzen von b gezählt. Hingegen ſind aus den Potenzen des zweyten Polynomium alle Combinationen, die a enthalten, noch beyzufügen. Aus Z^m gehören zu der Potenz z^r alle Combinationen der rten Abtheilung mit den zu jeder Verticalreihe gehörigen Potenzen von a verbunden, von a^{m-1} an bis zu a^0.

Die Potenzen von a ſind hier eigentlich Combinationen deſſelben wiederholten Elements. So wie in der Reihe der Potenzen von a auch a^0 aufgenommen wird, ſo wird auch hier a^0 als Zeichen eines abweſenden Elements a gebraucht, und daher eine **Nullion** genannt werden können.

V. Relationen der Combinationen und der Summen der Potenzen von den combinirten Größen.

43. Satz. Es ſey die Summe der Unionen, $a+b+c+d+e+$ etc. $=A$; die Summe der Binionen $=B$; der Ternionen $=C$; der Quaternionen $=D$; der Quinionen $=E$; der Senionen $=F$: u. ſ. f. alle ohne Wiederholungen. Ferner ſey die Summe der a, b, c, d, etc. als Potenzen vom erſten Grade betrachtet, $=P$; ihrer Quadrate $=Q$; ihrer Cuborum $=R$; ihrer Biquadrate $=S$; ihrer fünften Potenzen $=T$ u. ſ. f. ſo iſt

$$P=A$$
$$Q=AP-2B$$
$$R=AQ-BP+3C$$
$$S=AR-BQ+CP-4D$$
$$T=AS-BR+CQ-DP+5E$$
$$V=AT-BS+CR-DQ+EP-6F$$

etc. etc.

Bew. Man bezeichne die Summe der Combinationen einer gewiſſen Gattung durch das vorgeſetzte Zeichen $\int$. als $\int.a^2$ die Summe aller Quadrate von den Größen a, b, c, etc.; $\int.a^2b$ die Summe aller Combinationen von der Form a^2b; $\int.abcd$ die Summe aller Quaternionen ohne Wiederholung, u. ſ. w. Erſtlich iſt

$(a+b+c\ldots)(a+b+c\ldots)=\int.a^2+2\int.ab$, das iſt, in den Zeichen des Satzes, $AP=Q+2B$, alſo $Q=AP-2B$.

Zweytens,

$(a+b+c\ldots)(a^2+b^2+c^2\ldots)=\int.a^3+\int.a^2b$, und $(ab+ac+bc\ldots)(a+b+c\ldots)=\int.a^2b+3\int.abc$. Der numeriſche Factor 3 iſt der Summe, $\int.abc$, vorgeſetzt, weil eine Binion und eine Union aus den drey

Größen, a, b, c, jede auf dreyerley Art genommen werden können, nämlich abc, acb, bca. Aus den beiden Gleichungen ergiebt ſich

$$AQ - BP = R - 3C, \text{ und}$$

$$R = AQ - BP + 3C.$$

Drittens,

$(a + b + c \ldots)(a^3 + b^3 + c^3 \ldots) = ſ.a^4 + ſ.a^3 b$, und

$(ab + ac + bc \ldots)(a^2 + b^2 + c^2, \ldots) = ſ.a^3 b + ſ.a^2 bc$,

auch $(abc + abd + bcd \ldots, (a + b + c \ldots) = ſ.a^2 bc + 4 ſ.abcd$, wo der Factor 4 der Summe aller Quaternionen, wie abcd, vorgeſetzt iſt, weil eine Ternion und eine Union aus 4 Größen auf viererley Arten genommen werden können. Aus den drey Gleichungen zuſammengenommen folgt

$$AR - BQ + CP = S + 4D, \text{ und}$$

$$S = AR - BQ + CP - 4D.$$

Viertens,

$(a + b + c \ldots)(a^4 + b^4 + c^4 \ldots) = ſ.a^5 + ſ.a^4 b$

$(ab + ac + bc \ldots)(a^3 + b^3 + c^3 \ldots) = ſ.a^4 b + ſ.a^3 bc$

$(abc + abd + bcd \ldots)(a^2 + b^2 + c^2 \ldots) = ſ.a^3 bc + ſ.a^2 bcd$

$(abcd + bcde \ldots)(a + b + c \ldots) = ſ.a^2 bcd + 5 ſ.abcde$. Dieſe vier Gleichungen vereinigt geben die Gleichung

$$AS - BR + CQ - DP = T - 5E, \text{ und}$$

$$T = AS - BR + CQ - DP + 5E.$$

Aus den Beweiſen dieſer vier Formeln erhellt, daß allgemein,

$$ſ.a^{m-3} = ſ.a \times ſ.a^{m-1} - ſ.ab \times ſ.a^{m-2} + ſ.abc \times^{m-3} - ſ.abcd \times ſ.a^{m-4} \ldots\ldots \pm m ſ.abcd \ldots$$

wo in der letzten Combination m Factoren zu nehmen ſind, und das obere Vorzeichen für ein ungerades m gilt.

44. Der Gang des Beweiſes zeigt, daß unter den Größen a, b, c, d, etc. auch ſubtractive vorhanden ſeyn können. Die Combinationen, welche eine ungerade Anzahl negativer Factoren enthalten, ſind ſubtractiv.

45. Da in jeder Gleichung, $x^m - \alpha x^{m-1} + \beta x^{m-2} - \gamma x^{m-3} + \delta x^{m-4} \ldots \mp k = o$, der Coefficient α die Summe der Wurzeln; β die Summe der Producte je zweyer; γ die Summe der Producte je dreyer, u. ſ. f. iſt, ſo hat der Satz ſeine Anwendung in der Theorie der Gleichungen.

46. Die gefundenen Formeln für die Summen der Potenzen ſind abhängige, indem in den Werth jeder Summe die vorhergehenden alle hineinkommen. Setzt man in jeder nach der Reihe die Werthe aus den vorhergehenden Formeln, ſo erhält man die unabhängigen Werthe. Doch wird dieſes Verfahren in der Fortſetzung mühſam, und führt nicht leicht auf das Geſetz der Formation. In dem Artikel, combinatoriſche Analyſis, (54.) ſind die unabhängigen Werthe der Summen der Potenzen auf eine leichte Art aus gewiſſen combinatoriſchen Formeln mit Hülfe eines Satzes aus der Lehre von den Logarithmen hergeleitet.

47. In dem Artikel, Algebra, iſt angeführt, daß Albert Girard in dem Buche, Invention nouvelle en l'Algebre etc. 1629, die unabhängigen Formeln für die Summen der Potenzen vorgetragen hat, jedoch ohne Beweis. Die abhängigen Formeln hat Newton in ſeiner Arithm. univerſ. p. 192. (edit. s'Graveſ.) auch ohne Beweis angeführt, und ſie benutzt, eine Gränze der größten Wurzel zu finden. Die Vorzeichen ſind daſelbſt alle einerley, weil die Combinationen von einer ungeraden Anzahl Elemente negativ genommen ſind. Man nennt die Formeln auch den Newtoniſchen Lehrſatz von dem Verhalten der Coefficienten in einer Gleichung zu den

Summen der Potenzen ihrer Wurzeln. Die abhängigen Formeln mag man ſo nennen; doch muß man dabey des alten Girard, als urſprünglichen Erfinders, nicht vergeſſen. Joh. Bernoulli gebraucht den Satz, welchen er elegantiſſimum theorema Newtonianum nennt, um die geraden Potenzen der Brüche $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, etc. in infin. zu ſummiren, und ſagt, daß er einen Beweis des Satzes gefunden habe, den er aber nirgends mittheilt. (Joh. Bernoulli Opp. T. IV. n. 152.) Euler giebt in der Introd. in Anal. Inf. T. I. §. 166. die Formeln, ſo wie ſie hier in dem Satze aufgeſtellt ſind, und ſetzt hinzu, daß man ſich von ihrer Richtigkeit leicht würde verſichern können, daß aber in der Differentialrechnung der Satz in völliger Strenge würde dargethan werden. In ſeinen Inſtitt. calc. diff. iſt das nicht geſchehen. Er hat aber zwey Beweiſe des Satzes in dem zweyten Bande der Opuſculorum, p. 108 — 120. mitgetheilt, der auch den Titel hat: Conjectura phyſica circa propagationem ſoni ac luminis, cet. Berolini 1750. Der erſtere wird durch die Differentialrechnung geführt, der andere wird aus einem Lehrſatze über die algebraiſchen Gleichungen hergeleitet. In den Comment. novis Petrop. T. XV hat Euler für die unabhängigen Formeln ein Geſetz ihrer Formation gezeigt, doch nur durch Induction. Bärmann hat im J. 1745 einen etwas verwickelten Beweis des Satzes geliefert in einem Programm: Demonſtratio theorematis algebraici. Dieſer veranlaßte Käſtnern einen leichtern zu ſuchen, den er 1758 der Götting. Societät mittheilte. S. deſſen Diſſertt. mathem. et phyſicae, und ſeine Analyſis endlicher Größen, S. 450. An jenem Orte zeigt er an, daß Landen in ſeinen Mathematical Lucubrations, London 1755. P. V. einen Beweis durch die Rechnung des Unendlichen geführt habe. In Tempelhofs Analyſis endlicher Größen, Berlin 1769, §. 643 f. iſt der Beweis aus algebraiſchen Gründen, verſchieden von dem Euleriſchen, geführt. Der Beweis, den la Grange in einer Abhandlung über die Gleichungen, Mem. de Berlin, pour 1768. p. 252.

(Michelſens Sammlung betitelt, Theorie der Gleichungen, S. 191.) gegeben hat, bezieht ſich zunächſt auf die reciproken Wurzeln einer Gleichung. Er kommt mit dem vorher angeführten erſten Euleriſchen im Weſentlichen überein. Arbogaſt hat in dem Calcul des dérivations, 1800, nach ſeiner Methode, die ſich auf den Taylorſchen Lehrſatz gründet, einen ſehr bequemen Weg zur Herleitung beiderley Formen des Lehrſatzes genommen. S. combinatoriſche Analyſis, 54. 55.

Der Satz gehört nicht der Algebra, ſondern der Combinationslehre zu, aus welcher man die eine Form deſſelben mit der kläreſten Einſicht herleiten kann, woraus ſich auch die zweyte und ihr Geſetz, durch Induction, herleiten läßt.

48. Satz. Es ſey wiederum die Summe der Unionen $=A$; der Binionen $=B$; der Ternionen $=C$; u. ſ. f. ohne Wiederholungen. Nun nehme man die Quadrate der Combinationen jeder Gattung zuſammen, und ſetze

$$P = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \text{etc.}$$
$$Q = a^2 b^2 + a^2 c^2 + a^2 d^2 + b^2 c^2 + \text{etc.}$$
$$R = a^2 b^2 c^2 + a^2 b^2 d^2 + a^2 b^2 e^2 + a^2 c^2 d^2 + \text{etc.}$$
$$S = a^2 b^2 c^2 d^2 + a^2 b^2 c^2 e^2 + a^2 b^2 d^2 e^2 + \text{etc}$$

u. ſ. w.

ſo iſt

$$P = AA - 2B$$
$$Q = BB - 2AC + 2D$$
$$R = CC - 2BD + 2AE - 2F$$
$$S = DD - 2CE + 2BF - 2AG + 2H$$

u. ſ. w.

Bey dem Beweiſe dieſer Formeln kommt es vornehmlich darauf an, die numeriſchen Coefficienten der Combi-

nationen, die durch die Multiplication zweyer Reihen von Combinationen entſtehen, zu beſtimmen. Dazu dient die folgende Bemerkung.

Wenn eine Reihe A von Combinationen der Elemente a, b, c, d, etc. deren Exponent α iſt, in eine Reihe B von Combinationen derſelben Elemente, deren Exponent β iſt, multiplicirt wird, ſo entſtehen dadurch, wenn α kleiner als β geſetzt wird, $\alpha + 1$ Formen von Partialproducten, weil der Factor aus der Reihe A entweder α, oder $\alpha - 1$, oder $\alpha - 2$ ..., oder zwey, oder eines, oder gar keine Elemente mit dem Factor aus der Reihe B übereinſtimmig hat. Die Anzahl der übereinſtimmigen Factoren ſey $= \gamma$, welche auch $= 0$ ſeyn kann, ſo enthält das Product γ Paare gleicher Factoren, und daher $\alpha + \beta - 2\gamma$ verſchiedene. Von den letztern gehören $\alpha - \gamma$ dem Factor aus der Reihe A, und $\beta - \gamma$ dem Factor aus der Reihe B zu. Nun ſuche man, wie oft ſich $\alpha - \gamma$ Elemente oder (welches auf eins hinaus kommt) wie oft ſich $\beta - \gamma$ aus $\alpha + \beta - 2\gamma$ Elementen nehmen laſſen, ſo hat man die Anzahl der Producte von derſelben Form und mit denſelben Elementen. Mit dieſer Zahl muß die Summe aller verſchiedenen Combinationen derſelben Form multiplicirt werden.

Z. B. Wenn die Reihe der Ternionen in die Reihe der Quinionen multiplicirt wird, ſo nehme man aus dem Totalproducte das Partialproduct a^2b^2cdef heraus. Hier iſt $\alpha = 3$; $\beta = 5$; $\gamma = 2$, und $\alpha - \gamma = 1$, auch $\alpha + \beta - 2\gamma = 4$. Nun laſſen ſich 1 oder 3 Elemente aus 4 Elementen nehmen 4 mahl; das iſt, man kann das Product derſelben Elemente a, b, c, d, e, f nach jener Form aus den Ternionen und Quinionen 4 mahl machen, nämlich aus abc in abdef, aus abd in abcef, aus abe in abcdf, und aus abf in abcde,

Dieſes wohl verſtanden, hat die Multiplication zweyer Reihen von Combinationen keine Schwierigkeit. Die erſte Formel iſt dieſelbe mit der erſten in (43.).

Die zweyte Formel wird folgendergeſtalt gefunden. Es iſt

I. $(ab + ac + bc\ldots)(ab + ac + bc\ldots)$ $= ſ.a^2 b^2 + 2 ſ.a^2 bc + 6 ſ.abcd$. Dieſe ſind alle hier möglichen Formen mit den Zahlen, die anzeigen, wie oft ſie Statt finden. Ferner iſt II. $(a + b + c\ldots)(abc + abd + bcd\ldots) = ſ.a^2 bc + 4 ſ abcd$. Aus beiden Gleichungen folgt

$$B^2 - 2AC = Q - 2D, \text{ alſo}$$

$$Q = B^2 - 2AC + 2D.$$

Die dritte Formel entſteht folgendergeſtalt. Es iſt

I. $(abc + abd\ldots)(abc + abd\ldots) = ſ.a^2 b^2 c^2 + 2 ſ.a^2 b^2 cd + 6 ſ.a^2 bcde + 20 ſ.abcdef$.

II. $(ab + ac\ldots)(abcd + \ldots) = ſ.a^2 b^2 cd + 4 ſ.a^2 bcde + 15 ſ.abcdef$.

III. $(a + b + c\ldots)(abcde + \ldots) = ſ.a^2 bcde + 6 ſ.abcdef$. Aus dieſen drey Gleichungen folgt

$$C^2 - 2BD + 2AE = R + 2F,$$

das iſt

$$R = C^2 - 2BD + 2AE - 2F.$$

Die vierte Formel ergiebt ſich auf ähnliche Art: Es iſt

I. $(abcd + \ldots)(abcd + \ldots) = ſ.a^2 b^2 c^2 d^2 + 2 ſ.a^2 b^2 c^2 de + 6 ſ.a^2 b^2 cdef + 20 ſ.a^2 bcdefg + 70 ſ.abcdefgh$.

II. $(abc + \ldots)(abcde + \ldots) = ſ.a^2 b^2 c^2 de + 4 ſ.a^2 b^2 cdef + 15 ſ.a^2 bcdefg + 56 ſ.abcdefgh$.

III. $(ab + \ldots)(abcdef + \ldots) = ſ.a^2 b^2 cdef + 6 ſ.a^2 bcdefg + 28 ſ abcdefgh$.

IV. $(a + b + \ldots)(abcdefg + \ldots) = ſ.a^2 bcdefg + 8 ſ.abcdefgh$.

Aus dieſen vier Gleichungen folgt

$$D^2 - 2CE + 2BF - 2AG = S - 2H, \text{ alſo}$$

$$S = D^2 - 2CE + 2BF - 2AG + 2H.$$

Die Gleichförmigkeit in der Entwickelung der Producte aus den Combinations-Reihen berechtigt zu ſchließen, daß das Geſetz, welches ſich in den gefundenen Formeln zeigt, allgemein gelte.

49. Der Satz ſteht in Eulers Inſtitt. Calc diff. p. 702, ohne Beweis, nur mit dem Beyfügen, daß die Formeln ſich aus der Natur der Combinationen ergeben. Er wird zur Entdeckung unmöglicher Wurzeln in einer algebraiſchen Gleichung gebraucht.

VII. Geſchichte der Combinationslehre.

Die erſte noch unvollkommene Bekanntſchaft der Algebraiſten des ſechszehnten Jahrhunderts mit dem binomiſchen Lehrſatze führte ſchon auf Combinationen; oder konnte doch darauf aufmerkſam machen. Johann Buteo löſete in ſeiner Logiſtica, 1559 die Aufgabe auf, alle verſchiedene mit vier Würfeln mögliche Würfe zu finden. Er ſtellt in einer Tabelle die viererley Verbindungen der Zahlen 1 bis 6 regelmäßig auf, ſo daß, wie er ausdrücklich vorſchreibt, nie eine kleinere Zahl auf eine größere folgt, und leitet die Claſſen aus einander her auf die Art, wie oben in (33) geſchehen iſt. Bey einer andern Aufgabe dieſer Art, wo er alle Variationen der vier erſten Claſſen von Verbindungen aus ſechs Buchſtaben ſucht, ſetzt er, um es bequemer zu machen, Zahlen ſtatt der Buchſtaben. (Pfaffii disquiſit. analyticae, p. 311.). In dem letzten Satze der Schrift von Vieta, de emendatione aequationum (1615), kommen Combinationen vor. Es ſeyn fünf Größen B, D, G, H, K, deren Summe ich α nenne, die Summe ihrer Binionen β, der Ternionen γ, der Quaternionen δ. Vieta druckt alles mit Worten aus. Sein Satz iſt folgender: Wenn $A^5 - \alpha A^4 + \beta A^3 - \gamma A^2 + \delta A = B.D.G.H.K$, ſo ſind B, D, G, H, K, die Wurzeln dieſer Gleichung, oder die Werthe von A; oder, wie Vieta es ausdruckt: A explicabilis eſt de uqalibet illarum quinque B, D, G, H, K.

Harriots ganze Algebra beruht auf Combinationen der Wurzeln der Gleichungen. Doch findet ſich die Benennung noch nicht darin; auch iſt nie die Frage von der Anzahl der Combinationen einer Claſſe, bey einer gegebenen Anzahl von Größen.

Paſcal wechſelte mit Fermat Briefe über verſchiedene Fragen, die Combinationen und die Wahrſcheinlichkeiten in Spielen betreffend, wobey er auf ſein arithmetiſches Dreyeck gerieth, in welchem die Zahlen zur Beſtimmung der Anzahl der Combinationen einer gewiſſen Menge von Dingen aus einer gegebenen Anzahl dienen. S. arithmetiſches Dreyeck. In Fermats Werken, S. 179 — 188 ſind zwey Briefe von Paſcal enthalten, worin Anwendungen der Combinationen auf Wahrſcheinlichkeiten in Spielen vorkommen.

Um dieſelbe Zeit beſchäftigte ſich der Pater Merſenne mit den Combinationen, und machte davon Anwendungen auf die Verbindungen der Töne. Er findet, daß 20 Dinge ſich über zwey Trillionen (beinahe 2½ Trillionen) mahl verſetzen laſſen. Für 64 Dinge erhält die Verſetzungszahl neunzig Ziffern. Cogit. phyſ. mathem. p. 296. und Harmonicorum L. 7, p. 116.

Guldin berechnete in einer Abhandlung über die Combinationen die Menge der Wörter, die aus 23 Buchſtaben zuſammen geſetzt werden können, und fand, daß ſie über 25 Trillionen Bände von 1000 Seiten, jede Seite von 100 Zeilen, und jede Zeile zu 60 Buchſtaben, anfüllen würden. Eine ſolche Berechnung machte nach ihm Preſtet, der die Anzahl der Wörter von 2, von 3, von 4 bis zu 24 Buchſtaben über 1391 Quinquillionen groß findet, von welchen aber ein großer Theil ſich nicht ausſprechen läßt.

Van Schooten trägt in dem 5ten Bd. ſeiner Exercitationum mathematicarum (1657) einige Aufgaben über die Combinationen vor. Er nennt ſie Electiones ganz ſchicklich. Der Satz (18.), und die Aufgabe (29.) finden ſich bey ihm. Auch giebt er eine Tafel der Combi-

nationen, aus welchen eine gegebene Anzahl Combinatio⸗ nen, wie Factoren, genommen werden kann, von der Anzahl 1 bis 100.

Leibnitz brachte in ſeinem 20ſten Jahre eine Diſputation de complexionibus, zu Leipzig 1666 auf die Katheder, welche ſeiner Ars characteriſtica, Lipſ. 1668 zum Grunde liegt. Er wandte in der Folge die Combinationslehre auf die Umkehrung der Reihen an, wovon er die Möglichkeit aber nur an einem Beyſpiele, nicht ſehr deutlich zeigte. (A. Erud. 1700 m. Maji). Die arithmetiſchen Combinationen erweckten in ihm die Idee von einer höhern Combinirkunſt und combinatoriſchen Charakteriſtik, welche zur Erfindung hoher philoſophiſcher Wahrheiten dienen ſollte. Dergleichen wollte auch Athanaſius Kircher erfinden. Ars magna ſciendi. Amſtelod. 1669.

Wallis gab 1685 eine Schrift über Combinationen, Verſetzungen und Zerfällungen heraus, in engliſcher Sprache, welche lateiniſch in ſeinen Operibus, Vol. II. befindlich iſt.

Jakob Bernoulli, der 1705 geſtorben iſt, hinterließ ein Werk über die Wahrſcheinlichkeits⸗Rechnung, Ars conjectandi, welches 1713 zu Baſel herausgekommen iſt. Die zweyte Abtheilung enthält eine faſt vollſtändige Ausführung der Lehre von den Combinationen und Verſetzungen, wovon in der folgenden Abhandlung die Anwendungen auf Glücksſpiele gemacht werden.

Euler hat die Lehre von den Combinationen nicht unberührt gelaſſen. Die Formeln (48) ſcheinen ihm zu gehören. Von ihm ſind obſervationes analyticae de combinationibus. Comm. Petrop. vet. T. XIII. 1741 — 43.

Man bekümmerte ſich in der Combinationslehre aber faſt nur allein um die Anzahl der Verbindungen und Verſetzungen der Dinge, und übergieng faſt gänzlich ihre wirkliche Darſtellung, die doch für die Analyſis ſo wichtig iſt. Denn die Anwendung der Combinations⸗

lehre in der Analyſis beſteht vornehmlich darin, daß zuſam-mengeſetzte Größen als Summen von Combinationen nach gewiſſen Geſetzen in einem einfachen Ausdruck dargeſtellt werden. Dabey wird aber erfordert, daß man die Beſtand-theile der Summe, wo die Entwickelung nöthig iſt, leicht, mit Deutlichkeit und Regelmäßigkeit angeben, gleichſam mechaniſch hinſchreiben könne. Dieſen wichtigen Dienſt hat Hindenburg der Analyſis geleiſtet. Er hat gezeigt, wie Combinationen und Variationen an ſich (ſimpliciter) nach ſichern und einfachen rein-combinatoriſchen Geſetzen, in Claſſen und Ordnungen vollſtändig aufgeſtellt werden; ſowohl arithmographiſch als lexikographiſch und involuto-riſch; eben ſo hat er zuerſt die Combinationen und Varia-tionen zu beſtimmten Summen, deren Gebrauch in der combinatoriſchen Analyſis am häufigſten vorkommt, auszuſondern und aufzuzählen gelehrt, ebenfalls nach einer zweyfachen Methode. Dann hat er gewieſen, wie jede ganze Zahl in alle ihre ganzen Theile auf eine regelmäßige Art, mit und ohne Verſetzungen zerlegt wird. Seine hierher gehörigen Schriften ſind nebſt mehreren die Com-binationslehre und ihre Anwendungen betreffenden Schrif-ten am Ende des folgenden Artikels angezeigt.

Combinatoriſche Analyſis iſt die allgemeine Anwendung der Combinationslehre auf die Analyſis, wo, bey der Aufſuchung und dem Vortrage der Formeln, bey der Entwickelung ihrer Reſultate, überall combinatoriſche Begriffe und Sätze angewandt, combinatoriſche Zuſam-menſetzungen und Zeichen gebraucht, ſtatt der al-gebraiſchen und tranſcendentiſchen (oft ſehr verwickel-ten und ſchweren) Operationen, die gleichgültigen (ein-fachern und leichtern) combinatoriſchen geſetzt und benutzt werden. — Dieſe Erklärung giebt in dem mathem. Archiv 1. Bd. 423. S. Prof. Hindenburg, der als Erfinder dieſes wichtigen Theils der Analyſis anzu-ſehen iſt, da er die bis dahin nur als einzelne Sätze be-kannten combinatoriſchen Lehren in einen Zuſammenhang gebracht, erweitert, und ſehr vortheilhaft angewandt, zu-

gleich auch eine neue, ſchickliche und faßliche Bezeichnungs-art in dem neuen Syſtem eingeführt hat.

Die Lehre von den Combinationen, wovon die combinatoriſche Analyſis eine Anwendung iſt, muß alſo von demjenigen, der dieſen fruchtbaren und intereſſanten Theil der höhern Arithmetik ſtudieren will, wohl gefaßt werden. Zu dem Ende iſt dieſe in dem Artikel, Combination, ausführlich vorgetragen und erläutert worden, doch in einer ſolchen Kürze, daß das Ganze noch gut zu überſehen iſt; zugleich unabhängig von andern analytiſchen Sätzen, und ohne eine beſondere Characteriſtik. Ferner muß man die Lehrſätze von den Permutationen oder Verſetzungen gegebener Elemente, und von der Zerlegung ganzer Zahlen in alle mögliche ganze Theile wohl inne haben. Die erſtern werden gebraucht, um die verſchiedenen Combinationen einer Art aus ihren Variationen, die ſich nur durch die Stellung der Elemente unterſcheiden, auszuſondern, nach einem dazu vorgeſchriebenen oder angenommenen Geſetze der Folge oder Ordnung, und auf der andern Seite für jede Combination die Anzahl ihrer Variationen anzugeben, auch die Anzahl der Combinationen einer gegebenen Art zu finden. Die Zerlegung der Zahlen dient auf mehr als eine Art zur Aufſtellung aller Combinationen von einer gewiſſen Beſchaffenheit, wovon in dem gedachten Artikel Beyſpiele vorkommen.

Bey den Zerlegungen der Zahlen hat Hindenburg ſich anfänglich der Zerfällung (diſcerptio) derſelben in ihre möglichen ganzen kleineren Theile bedient. Daher die beiden gewöhnlich ſo genannten Diſcerptionsprobleme (Infin. Dign. p. 73. ſeq, p. 129. ſeq.) für Combinationen und Variationen; unſtreitig die beiden wichtigſten in Abſicht auf ihren weitläuftigen Gebrauch in der combinatoriſchen Analyſis. Die Zerfällung der Zahlen in ihre Aggregattheile führt auf Summen und ihre Complemente, und iſt alſo nicht rein, ſondern arithmetiſch-combinatoriſch. Späterhin ſind daher von Hindenburg, auch die rein-combinatoriſche, arithmo-

graphiſchen und lexikographiſchen, Zerlegungen und Ableitungen der Combinationen, ſowohl zu beſtimmten als unbeſtimmten Summen, durch Ordnungen aus Ordnungen eingeführt worden, die für Zahlen- und Buchſtaben-Combinationen gleich gerecht und bequem, auch wegen ihrer unvolutoriſchen Anordnung nach leichter ſind als jene ſucceſſiven Zerfällungen der größern Zahlen in ihre kleinern ſummatoriſchen Theile. (Erſte Samml. anal. comb. Abh. 177, 183, 187, 189, 191, 202, 204.).

I. Gegenſtände der combinatoriſchen Analyſis.

1. Die combinatoriſche Analyſis geht alſo von einfachen, rein- oder arithmetiſch-combinatoriſchen (gemiſchten) Operationen aus, von einer Zuſammenzählung und Zuſammenſtellung des Gleichartigen, wie es nach einer gewiſſen Regel genommen wird, nachdem man dabey auf die Anzahl der Elemente, mit oder ohne Verſchiedenheit, mit oder ohne Veränderung der Folge, oder in andern Fällen auf die Summe der Stellenzahlen (den Summenexponenten) mit oder ohne Rückſicht auf die Anzahl der Elemente ſieht. Der Weg zu ihr geht nicht durch die dornige Algebra, welcher ſie viel mehr Licht ertheilt, ja ihr zur Darſtellung der Wurzeln jeder Gleichung durch Reihen hilft, ſondern der Übergang zu ihr geſchieht gleich von der leichten elementariſchen Buchſtabenrechnung in den höhern und allgemeinern Aufgaben der Multiplication, Diviſion und Zerfällung in gleiche Factoren Man hat ſie alſo als einen ſelbſtſtändigen Theil der Analyſis anzuſehen.

2. Der wichtigſte Fall der Multiplication vieltheiliger Größen iſt der, wenn alle Factoren gleich groß ſind. Dieſes giebt den polynomiſchen Lehrſatz, von welchem in einem beſondern Artikel gehandelt wird. Hier nur dieſes, um ein in die Augen fallendes Beyſpiel von der Anwendung det combinatoriſchen Analyſis zu geben. Der

Satz iſt auch die Veranlaſſung zu der Erweiterung der Analyſis durch ein Syſtem von combinatoriſchen Operationen geweſen.

3. Wenn die Reihe der unabhängigen formloſen Größen, $a + b + c + d + e +$ etc. deren Anzahl $= n$ ſey, auf die mte Potenz erhoben werden ſoll, ſo iſt dieſes nichts anders als alle mögliche Combinationen von m Größen aus n Größen, ohne und mit Wiederholungen, machen. Z. B. wenn die zweyte Potenz verlangt wird, erhält man alle Producte je zweyer ungleichen (Binionen), mit den Verſetzungen oder Variationen, und die Quadrate jedes Theils (Wiederholung des einzelnen). Wird der Cubus gemacht, ſo erhält man alle Producte wie abc (Ternionen mit den Verſetzungen); alle Producte wie a^2b (Combinationen mit Wiederholung), jedes ſo oft als ſich die a, a, b verſetzen laſſen; dann noch alle Cubos, wie aaa, (Conternationen mit Wiederholung des einzelnen).

4. Die vieltheilige Größe ſey nach den Potenzen einer veränderlichen Größe geordnet, deren Coefficienten als unveränderlich angenommen werden. Sie ſey $a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 +$ etc. $= p$. Die Potenz p^m werde ebenfalls nach den Potenzen von z geordnet. Nun beſteht jeder Coefficient von z aus m Factoren, die alle verſchieden, oder zum Theil dieſelben, oder ganz und gar daſſelbe ſeyn können. Bezeichnet man die Stellen der Glieder in p durch 0, 1, 2, 3, 4, etc., ſo iſt der Coefficient der Potenz z^n in p^m die Summe der Combinationen in welchen die Summe Stellenzahlen, ihrer Elemente (der Summenexponent) $= n$ iſt, und beſteht z. B. für $n = 5$, aus den Combination, $a^{m-1}f$; $a^{m-2}be$; $a^{m-2}cd$; $a^{m-3}b^2d$; $a^{m-3}bc^2$; $a^{m-4}b^3c$; $a^{m-5}b^5$. Es iſt nur noch nöthig die Zahlen beyzufügen, wie oft jede vorkommt.

Das (in 3 und 4) Geſagte dient blos als Nachweiſung, wie leicht ſich dieſe Producte, als die Beſtandtheile jener Potenzen der Reihe, combinatoriſch überſehen laſſen. Übrigens giebt die Combinationslehre Regeln an die Hand,

vermöge welcher man die einzelnen Combinationen der Potenzen (in 3, 4), ohne an die Beſchaffenheit jener Producte weiter zu denken, gleich gut geordnet, mechaniſch hinſchreiben kann. Dieſe Bemerkung gilt auch für die folgenden als Beyſpiele aufgeführten, und andere Aufgaben. Die arithmographiſchen, lexikographiſchen und andere combinatoriſchen Anordnungen leiſten hierbey vortreffliche Dienſte.

5. Man ſoll das Product von mehrern Reihen, wie

$$a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + \text{etc.} = p$$

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{etc.} = q$$

$$\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \text{etc.} = r$$

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{D}z^3 + \mathfrak{E}z^4 + \text{etc.} = s$$

machen. Das wird dem erſten Anblicke nach nicht allein eine ſehr mühſame, ſondern auch dem Fehlen ſehr unterworfene Arbeit ſcheinen. Die combinatoriſche Analyſis aber macht es leicht und ſicher. Man hat nur in den Combinationen, woraus p^m nach (4.) beſteht, für jedes der darin vorkommenden Elemente eines an derſelben Stelle aus jeder der Reihen, p, q, r, s, zu ſetzen. Z. B. der Coefficient von z^2 in p^4 enthält die Combinationen a^3c und a^2b^2. Daher enthält die Coefficient von z^2 in dem Producte p q r s die Combinationen; $aA\alpha\mathfrak{C}$; $aA\mathfrak{A}\gamma$; $a\alpha\mathfrak{A}c$; $A\alpha\mathfrak{A}c$; und $aA\beta\mathfrak{B}$; $a\alpha B\mathfrak{B}$; $a\mathfrak{A}B\beta$; $A\alpha b\mathfrak{B}$; $A\mathfrak{A}b\beta$; $\alpha\mathfrak{A}bB$. Die Zahlcoefficienten in den Coefficienten von p^m geben die Anzahl der Combinationen jeder Gattung an.

6. Der Quotient aus der Diviſion einer Reihe, wie vorher p iſt, durch eine andere, wie q, beſteht aus Combinationen nach einem beſtimmten Geſetze. (Buchſtabenrechnung. V.). Die Zerfällung der Multiplication in Factoren iſt zwar das Umgekehrte der Multiplication, aber doch in analytiſcher Betrachtung etwas ähnliches, ſo daß der polynomiſche Lehrſatz für gebrochene Exponenten eben dieſelbe Form hat, wie für ganze.

7. Es ſey die veränderliche Größe y durch eine nach den Potenzen der veränderlichen z geordneten Reihe gegeben: und eine dritte veränderliche x durch eine Reihe nach den Potenzen von y; man ſoll x durch eine Reihe nach den Potenzen von z ausdrücken. Die beiden Reihen ſeyn:

$$a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 \ldots = y$$

$$A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4 \ldots = x.$$

Man hat hier die Potenzen des Polynomium y zu machen, und dieſe in der Reihe für x zu ſubſtituiren. Die Coefficienten in der neuen Reihe für x werden aus den Coefficienten in den Polynomialpotenzen, die zu einer gegebenen Potenz von z gehören, zuſammengeſetzt, nachdem ſie mit den Coefficienten B, C, D, etc. der Folge nach multiplicirt ſind. Z. B. der Coefficient von z^3 iſt $= Bd + C(2ad + 2bc) + D(3a^2d + 6abc + b^3) + E(4a^3d + 12a^2bc + 4ab^3) + F(5a^4d + 20a^3bc + 10a^2b^3) + G(6a^5d + 30a^4bc + 20a^3b^3) +$ etc. S. Combination, 42.

8. Die beiden Reihen ſeyn.

$$az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + ez^4 + \text{etc.} = y,$$

$$Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + Ey^5 + \text{etc.} = x,$$

und es ſoll x durch eine nach z geordnete Reihe dargeſtellt werden. In den Potenzen von y ſind die Theile des Coefficienten von z^n Producte aus denen Coefficienten in der Reihe y, deren Stellen für den Zeiger $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5. \\ a & b & c & d & e. \end{pmatrix}$ die Summe n geben. In der Tafel (Combination, 41.) geben die Combinationen in einer horizontalen Abtheilung auch dieſelbe Localſumme, aber für einen andern Zeiger, worin b, c, d, e, etc. zu den Stellen 1, 2, 3, 4, etc. gehören. Setzt man daher für jeden Buchſtaben in der Tafel den nächſt vorhergehenden, ſo erhält man die Combinationen zu jeder Potenz in der neuen Reihe für x in den horizontalen Abtheilungen. Z. B. der Coefficient zu z^6 iſt

$Af + B(2ae + 2bd + c^2) + C(3a^2d + 6abc + b^3) + D(4a^3c + 3a^2b^2) + E.\ 5a^4b + Fa^6$, wo noch die Verſetzungszahlen den Combinationen beygefügt ſind. S. a. a. O. 42.

9. Die Umkehrung der Reihen iſt eine wichtige combinatoriſche Operation. Es ſey

$$z = A + By + Cy^2 + Dy^3 + \text{etc.}$$

Hieraus ſoll eine Reihe

$$y = a + bz + cz^2 + dz^3 + \text{etc.}$$

hergeleitet werden.

Man ſetze in der erſtern Reihe für die Potenzen von y ihre Werthe mittelſt der zweyten, auf die vorher gewieſene Art, ſo erhält man den Werth von z durch eine Reihe, die nach Potenzen von z fortſchreitet, und deren Coefficienten aus den Coefficienten beider Reihen zuſammengeſetzt ſind. Wenn nun gleich a, b, c, etc. nicht bekannt ſind, ſo ergeben ſich doch aus den Coefficienten in der umgewandelten Reihe eben ſo viele Gleichungen zur Beſtimmung der Coefficienten in der Reihe für y, (ſ. Umkehrung der Reihen.)

10. Iſt $z = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \text{etc.}$
und $y = az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \text{etc.}$
ſo findet man auf dieſelbe Art eine Reihe für z, die nach den Potenzen von z ſelbſt geordnet iſt, deren Coefficienten zur Beſtimmung der unbekannten a, b, c, etc. dienen.

11. Man kann eben ſo gut die Werthe von z (in 10, 11) in die Reihe für y ſetzen, wodurch eine Reihe für y durch y ſelbſt erhalten wird, aus deren Coefficienten die Größen a, b, c, etc. beſtimmt werden.

Dies letztere Verfahren giebt wie das erſtere recurrirende Ausdrücke für die unbekannten a, b, c, d . . . deren Entwickelung aber leichter iſt, als in dem erſten Falle. Die beyderley Formen dieſer Coefficienten, im Nov. Syſt. Perm. Comb. p. XXX, XXXI. Andere

combinatoriſche, nicht recurrirende Formeln für die a, b, c, d . . . in der Folge.

12. Durch eben dieſes Verfahren findet man eine Reihe für eine Potenz von y, als y^m, der Exponens ſey, was man wolle. Es kommt aber noch darauf an, das Geſetz der Formation der Reihe, es ſey für y oder y^m zu entdecken, (ſ. Umkehrung der Reihen.)

13. Iſt die Frage, irgend eine Function von y durch z mittelſt der für z gegebenen Reihe auszudrucken, ſo wird dieſes Geſchäft durch die combinatoriſche Analyſis und ihre Charakteriſtik ſehr erleichtert.

14. Bey dem Gebrauche des Taylorſchen Lehrſatzes, die Veränderung einer Function durch ihre ſucceſſiven Differentialquotienten, und durch die zu der Functionalgröße hinzugefügten, von ihr unabhängigen Größen auszudrucken, leiſtet die combinatoriſche Analyſis vortreffliche Dienſte, um die ganze Operation leicht und ſicher zu machen. Hier ſchließt ſich die Derivations-Rechnung an ſie an.

15. Bey Eliminationen, bey Transformationen und Interpolationen der Reihen, bey der Summirung der Potenzen irgend welcher Größen, bey Entwickelung continuirlicher Brüche, und cykliſchen Perioden, kommen Combinationen vor.

II. Charakteriſtik der combinatoriſchen Analyſis.

16. Um die Glieder, welche aus den Combinationen zuſammengeſetzter Größen oder unendlicher Reihen ententſtehen, da dieſe Glieder oft ſehr zuſammengeſetzt ſind, deutlich und kurz darzuſtellen, und das Geſetz der ganzen combinatoriſchen Anordnung offenbar zu machen, iſt eine neue Bezeichnungsart nöthig, welche man ſich geläufig machen muß, um in dieſem Geſchäft ohne Anſtoß fortzukommen. Hindenburg hat dieſe Charakteriſtik mit ſolcher

Geſchicklichkeit eingerichtet, daß man kaum etwas in einzelnen Bezeichnungen zu erinnern finden wird. Seine combinatoriſchen Ausdrücke ſtellen Formen von bekannter und faßlicher Structur dar, die man alſo mit der größten Klarheit ſogleich anwenden kann; welches bey Subſtitutionen, die bald auf dieſe, bald auf jene Art gemacht werden, nicht der Fall iſt.

17. Ganze Reihen, wie $a + b + c + d +$ etc. oder $az^{m} + bz^{m+1} + cz^{m+2} +$ etc. werden, wie es auch ſonſt üblich iſt, durch einzelne Buchſtaben als p, q; z, π; u. dgl. bezeichnet, um anzugeben, von welcher Reihe die Rede iſt.

18. Das mte Glied einer Reihe p wird bezeichnet durch $p \rceil m$; das mte Glied des Products der Reihen $p \rceil q$, durch $pq \rceil m$; des Products dreyer Reihen p, q, r durch $pqr\ m$; der nten Potenz der Reihe p durch $p^{n} \rceil m$; des Quotienten $\frac{p}{q}$, durch $\frac{p}{q} \rceil m$

19. Iſt die Reihe p nach den Potenzen einer veränderlichen Größe z geordnet, ſo wird der Coefficient des mten Gliedes bezeichnet durch $p \varkappa m$, des $(m+1)$ten durch $p \varkappa (m+1)$. Dieſe Bezeichnung iſt beſonders nützlich, wenn die Coefficienten aus den Gliedern mehrerer Reihen zuſammen genommen werden ſollen, um den unbeſtimmten Coefficienten in einer neuen Reihe zu bilden. Alſo iſt $p \varkappa m + q \varkappa (m-1) + r \varkappa (m-2) + s \varkappa (m-3)$ das Aggregat von dem mten der Reihe p; dem $(m-1)$ten der Reihe q; dem $(m-2)$ten in der Reihe r, dem $(m-3)$ten in der Reihe s, woraus der Coefficient zu einer gemeinſchaftlichen Potenz von z zuſammengeſetzt wird. — Dieſe Bezeichnungen der Glieder und Coefficienten heißen *Localzeichen*, und eine daraus zuſammengeſetzte Formel heißt eine *Localformel*. Z. B. die Localformel des polynomiſchen Lehrſatzes iſt

$$p^{n} = p^{n} \varkappa 1 + p^{n} \varkappa 2.z + p^{n} \varkappa 3.z^{2} + p^{n} \varkappa 4.z^{3} \ldots\ldots + p^{n} \varkappa (m+1).z^{m} + \ldots$$

wenn $p = a + bz + cz^2 + dz^3 +$ etc. iſt Man kann nach Rothe, noch die Scale der Coefficienten in jeder Reihe nebſt dem Zeichen der Reihe beyfügen, als hier p(a, b, c, d . . . .), welches wegen der Combinationen der Coefficienten nützlich iſt.

20. Die Coefficienten werden aber auch auf die gewöhnliche Art durch Buchſtaben bezeichnet, nämlich in den Functionen, die combinirt werden. Für jede Function oder Reihe müſſen Buchſtaben aus einem beſondern Alphabet genommen werden, wenn man ſie nach der Ordnung vom Anfange an nehmen will. Die unbekannten Coefficienten, welche noch erſt durch Vergleichung der Coefficienten in den gleichnamigen Potenzen einer neuen Reihe, oder auf andere Art gefunden werden ſollen, unterſcheidet Hindenburg durch darüber geſetzte Puncte, als $\dot{a}$, $\dot{A}$, $\dot{\mathfrak{A}}$. Doch ſcheint dieſes nicht nöthig zu ſeyn, wenn es einmahl angemerkt iſt, daß ſie noch zu finden ſind; welche Bemerkung dieſe Puncte erſparen ſollen. Bey den analytiſchen Operationen wird zwiſchen den gegebenen und geſuchten Größen weiter kein Unterſchied gemacht, als nur in ſo fern man bey den letztern zum Zweck hat, ſie unvermiſcht bloß durch gegebene darzuſtellen.

21 Zuweilen iſt es nützlich, einen Coefficienten durch ſeinen Abſtand von einem gegebenen anzudeuten. Es ſey z. E. dieſer letztere $= g$, die vorhergehenden, nach der Folge von g an ſeyn f, e, d, etc. die nachfolgenden, h, i, k, etc.

ſo iſt $f = \overset{-1}{g}$; $e = \overset{-2}{g}$; $d = \overset{-3}{g}$, etc.

und $h = \overset{+1}{g}$; $i = \overset{+2}{g}$; $k = \overset{+3}{g}$, etc. indem der Abſtand von dem gegebenen durch die über das Buchſtabenzeichen des gegebenen Gliedes geſetzte Zahl bemerkt wird, mit dem Vorzeichen — für die vorhergehenden Glieder, und dem Zeichen + für die folgenden. Dieſe Zahlen heißen Diſtanz-Exponenten.

Der Gebrauch dieſer Exponenten erſtreckt ſich nicht blos auf gemeine, ſondern auch auf Binomial- und Polynomialcoefficienten, auf Variations- und Combinationsclaſſen, auf Functionen aller Art; überhaupt, auf jede Reihe gleichartiger oder ſonſt zuſammengehöriger, oder ſo betrachteter Dinge, die eine gewiſſe Ordnung in ihrer Folge auf einander beobachten — um ſie durch einander, folgende durch vorhergehende, und umgekehrt, beſtimmte durch unbeſtimmte und wechſelsweiſe, auszudrucken. Durch dieſe Exponenten kann auch jedes Alphabet von einer gegebenen Anzahl Buchſtaben, vorwärts und rückwärts unbeſtimmt erweitert werden.

22. Die Binomial-Coefficienten, die in combinatoriſchen Rechnungen häufig vorkommen, werden durch die Buchſtaben des großen deutſchen Alphabets, mit dem Exponenten der Potenz oben auf der linken Seite, nach ihrer Folge bezeichnet, nämlich, wenn der Exponent der Binomialpotenz $= m$ iſt, ${}^m\mathfrak{A}$; ${}^m\mathfrak{B}$, ${}^m\mathfrak{C}$; ${}^m\mathfrak{D}$, u. ſ. f. ſo daß

$$ {}^m\mathfrak{A} = m;\ {}^m\mathfrak{B} = \frac{m.m-1.}{1.\ \ 2};\ {}^m\mathfrak{C} = \frac{m.m.-1m-2.}{1.\ 2.\ \ 3} $$

$$ {}^m\mathfrak{D} = \frac{m.\ m-1.\ m-2.\ m-3}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ 4.};\ \text{etc.} $$

23. Die Polynomial-Coefficienten, oder die Verſetzungszahlen, welche in der Formel des polynomiſchen Lehrſatzes die Combinationen begleiten, weil jede Combination ſo oft vorhanden iſt, als ſich derſelben Elemente verſetzen laſſen, werden durch die kleinen deutſchen Buchſtaben angedeutet, ſo daß die Stellenzahl des Buchſtaben mit der Anzahl der Elemente übereinkomme; nämlich aa; bab; cabc oder ca²b; dabcd oder da²b², u. ſ. f. Der Werth dieſer Buchſtabenzeichen wird durch die Beſchaffenheit der Combination beſtimmt. So iſt in dabcd der Werth von d $= 24$; in da²b² aber $= 6$.

24. Einen unbeſtimmten Binomial- oder Polynomial-Coefficienten bezeichnet Hindenburg durch einen

Buchſtaben aus der Mitte des Alphabets mit Schwabacher Schrift, damit man ihn nicht für einen beſtimmten, nach der Stellenzahl des Buchſtaben, nehme. Inzwiſchen wird dieſe Unterſcheidung, die in der Handſchrift beſchwerlich iſt, kaum nöthig ſeyn. In der Reihe mit andern zeigen die Trennungspuncte zwiſchen den Gliedern ſchon an, daß die zulezt hingeſetzten Glieder eine unbeſtimmte Stelle haben, und nur bloß die Form angeben. Man darf nur anzeigen, daß die Buchſtaben, M, N, etc. m, n, etc. allemahl unbeſtimmte Werthe haben, wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich erinnert wird. Das wird in dieſem Wörterbuche angenommen, und eben ſo in allen ähnlichen Fällen.

25 Die Combinationen der Elemente a, b, c, d ... oder der Zahlen 1, 2, 3, 4 ... werden nach der Folge der Claſſen mit Wiederholungen, durch 'A, 'B, 'C, 'D..., ohne Wiederholungen, durch, A', B', C', D', ... bezeichnet. Z. B. C' = abc + abd + acd + bcd, als die Ternionen ohne Wiederholung aus a, b, c, d. Für beiderley Combinationen werden ſowohl die Ordnung der Elemente in den einzelnen Complexionen, als auch die Folge der leztern in den einzelnen Claſſen nach beſtimmten Regeln feſtgeſezt. Sie heißen Claſſes complexionum (combinationum) ſimpliciter, im Gegenſatze gegen diejenigen, die eine beſtimmte Summe der Stellenzahlen haben.

26. Wenn die Combinationen in einer Claſſe, nach einer beſtimmten Regel geordnet ſind, ſo wird jede einzelne Combination (Complexion) durch eine rechter Hand zugefügte Zahl angezeigt, als 'C 4 bedeutet die vierte Complexion in der dritten Combinationsclaſſe, wo Wiederholungen verſtattet ſind.

27. Die Buchſtaben des deutſchen kleinen Alphabets mit den Claſſenzeichen verbunden zeigen an, daß jede Combination mit der zugehörigen Verſetzungszahl multiplicirt werden ſoll. Die Stelle des deutſchen Buchſtaben und des Claſſenzeichens ſind dieſelben. Z. B. wenn vier Elemente

a, b, c, d, je drey mit Wiederholungen verbunden werden, iſt die Summe der Variationen (der Combinationen mit den Verſetzungen).

$$c'C = aaa + 3aab \ldots\ldots + 6abc,$$

wo der Kürze wegen nur die verſchiedenen Arten der Combinationen angegeben ſind, worin c verſchiedene Werthe erhält.

28. Die Combinationen der Elemente a, b, c, d, etc. worin die Summe der Stellenzahlen, n, beſtimmt iſt, (Claſſes complexionum numeri propoſiti), werden nach der Folge der Claſſen durch ^nA, ^nB, ^nC, ^nD, etc. angezeigt. Die Stellen ſeyn, wie in dem Zeiger bemerkt iſt,

1	2	3	4	5 ...		ſo iſt, wenn n = 5 iſt,
a	b	c	d	e ...		

und Wiederholungen genommen werden $^5A = e$; $^5B = ad + bc$; $^5C = aac + abb$; $^5D = a^3b$; $^5E = aaaaa$.

29. Wenn dieſen Claſſenzeichen mit beſtimmten Summen die Zeichen der Verſetzungszahlen (Polynomial-Coefficienten) vorgeſetzt werden, ſo bedeutet dieſes, daß jede in der Claſſe enthaltene Combination mit der ihr zugehörigen Verſetzungszahl multiplicirt werden ſoll. Z. B. $a\,^5A = 1.e$; $b\,^5B = 2ad + 2bc$; $c\,^5C = 3aac + 3abb$; $d\,^5D = 4a^3b$; $e\,^5E = 1.aaaaa$. Die Verſetzungszahlen ſind oft in derſelben Claſſe verſchieden, wenn ſie gleich in dieſen Beyſpielen gleich groß ſind. Z. B. $e\,^7E = 5a^4c + 10a^3b^2$,

30. Hieraus folgen nachſtehende Relationen der Claſſen für Combinationen an ſich und ſolche zu beſtimmten Summen:

$'A = {}^1A + {}^2A + {}^3A + {}^4A \ldots$ (d. i. a + b + c + d ...)
$'B = \quad {}^2B + {}^3B + {}^4B \ldots$ (d. i. aa + ab + bb..)
$'C = \quad {}^3C + {}^4C \ldots$ (d. i. aaa + aab ...)
$'D = \quad {}^4D \ldots$ (d. i. aaaa + aab..)
etc. etc.

wenn nämlich das erſte Element a die Stelle 1, nicht etwa 0 hat.

31. Die Claſſen der Variationen ſchlechtweg (ſimpliciter) ohne Rückſicht auf die Summe der Stellenzahlen werden durch die Buchſtaben des großen lateiniſchen Alphabets aus der Curſivſchrift angedeutet, mit Strichlein oben, wie *'A*, *'B*, *'C*, etc. wenn Wiederholungen verſtattet ſind; *A'*, *B'*, *C'* . . . wenn keine verſtattet ſind. Anſtatt derſelben mag man auch die obigen Claſſenzeichen mit dem Zeichen der Verſetzungszahlen verbinden. Damit in der Handſchrift dieſe Unterſcheidung der Curſiv-Buchſtaben von den gewöhnlichen keine Mühe mache, oder zu Verwechſelungen Anlaß gebe, kann man jene von dieſen auf eine leichte, willkührliche, aber feſtgeſetzte Art, (Z. B. durch einen kleinen Strich unterwärts) unterſcheiden.

32. Die involutoriſchen Aggregate, (ſ. Combination, 10, 38, 39.) von andern combinatoriſchen Ausdrücken zu unterſcheiden, bezeichnet man ſie durch *J*, mit Beyfügung des Summenexponenten der Involution oben linker Hand, wie ${}^7J$, welches anzeigt, daß alle Combinationen aller Claſſen für die Lokalſumme 7 zuſammen genommen werden ſollen. Es iſt alſo

$${}^7J = {}^7A + {}^7B + {}^7C + {}^7D + {}^7E + {}^7F + {}^7G,$$

für den Zeiger

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ a & b & c & d & e & f & g \end{pmatrix}$$

Die einzelnen Combinationen ſind in dem Artikel, Combination, (38.) in der Aufſtellung nach Claſſen arithmographiſch angegeben, ſo daß $^7A = g$; $^7B = af + be + cd$ iſt, u. ſ. f.

Wenn die Involution Variationen enthält, ſo werden die Buchſtaben *J*; *A*, *B*, *C* . . . aus der Curſiv-Schrift genommen.

Die Abtheilungen der lexikographiſchen Involutionen nach den Anfangsbuchſtaben der Combinationen bezeichnet Hindenburg durch Buchſtaben aus einem verzierten Alphabet, ſ. Sammlung combin. analyt. Abh. Th. I. S. 177. Im Druck unterſcheiden ſich dieſe Buchſtaben ſehr auszeichnend von den andern; in der Handſchrift kann die Verzierung jedes andere ganz leichte Abzeichen (z. B. ein Strich durch den Buchſtaben) vertreten.

33. Wenn mehreren Reihen, wie

$$\begin{array}{l} a,\ b,\ c,\ d,\ e \ldots (p \\ A,\ B,\ C,\ D,\ E \ldots (q \\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon \ldots (r \end{array}$$

u. ſ. f.

gegeben ſind, ſo bedeutet $^1\overset{pq}{B}$ das Aggregat aller Combinationen aus den beiden Reihen p, q, indem aus jeder derſelben ein Element genommen wird. Gleichfalls iſt $^1\overset{pqr}{C}$ das Aggregat aller Combinationen aus den drey Reihen p, q, r, aus jeder Reihe ein Element genommen. So auch mit den Combinationen mehrerer Reihen.

34. Wenn Combinationen aus zwey oder mehreren Reihen eine beſtimmte Summe der Stellenzahlen ihrer Elemente haben, ſo wird dieſes mittelſt der beygefügten Summenzahl angedeutet, wie in $^m\overset{pq}{B}$; $^m\overset{pqr}{C}$, u. dgl. wo m die Summe der Stellenzahlen von den Elementen iſt.

Die Anfangsglieder der Reihen haben zur Stellenzahl Eins.

Dieſe neue combinatoriſche Charakteriſtik kann anfänglich weitläuftig und verwickelt, und daher ſchwierig ſcheinen; ein Vorwurf, den man ihr auch zuweilen wirklich gemacht hat. Aber die Sache verhält ſich ganz anders, wenn man zur wirklichen Anwendung fortſchreitet. Was von den Zeichen hier geſagt worden iſt, gilt auch von ihrer combinatoriſchen Auflöſung. Man wird ihre Vorſchriften durchaus leicht finden, wenn man die Regeln in der Anwendung anfänglich (wenigſtens für ein Paar Beyſpiele) nicht bloß mit den Augen, ſondern mit der Feder in der Hand, verfolgt. Die hier zunächſt (in III) folgenden Aufgaben mit den dortigen Exempeln können dazu Veranlaſſung geben, und ſo die Behauptung rechtfertigen.

III. Beyſpiele von der Anwendung der combinatoriſchen Analyſis.

35. Es ſey $a + bz + cz^2 + dz^3 + \text{etc.} = p$, ſo iſt, wenn die Combinationszeichen, A, B, C ... M ... ſich auf die Elemente a, b, c, etc. beziehen, oder

$$\text{für den Zeiger} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \ldots \\ a & b & c & d & e & f \ldots \end{pmatrix}$$

$$p = a({}^1A + {}^2Az + {}^3Az^2 + {}^4Az^3 + \text{etc.})$$
$$p^2 = b({}^2B + {}^3Bz + {}^4Bz^2 + {}^5Bz^3 + \text{etc.})$$
$$p^3 = c({}^3C + {}^4Cz + {}^5Cz^2 + {}^6Cz^3 + \text{etc.})$$

: : : : :

$$p^m = m({}^mM + {}^{m+1}Mz + {}^{m+2}Mz^2 + {}^{m+3}Mz^3 + \text{etc.}$$

Die Coefficienten dieſer Potenzen der Reihe p hängen alſo von der ganz leichten combinatoriſchen Anordnung und

Darſtellung der Complexionen zu beſtimmten Summen 1, 2, 3, 4, 5, 6, . . . m, m + 1, m + 2 etc. in Combinationsclaſſen A, B, C . . M, nach vorſtehendem Zeiger, mit Vorſetzung der zugehörigen Verſetzungszahlen, ab. Insbeſondere iſt hier M ein Aggregat von Producten aus m Factoren, die aus a, b, c, d, etc. mit und ohne Wiederholungen genommen werden, und deren Local-Summen ſind m; m + 1; m + 2; m + 3; etc. nach der Folge der Glieder.

Ein ſolches Product allgemein dargeſtellt iſt $a^\alpha\ b^\beta\ c^\gamma\ d^\delta$, wo die Summe der Exponenten = m iſt, und b, c, d . . irgend welche Coefficienten aus der Reihe p, auſſer a, bedeuten. Für ein ſolches Product iſt die Verſetzungszahl =

$$\frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}\ldots 3.2.1}{\alpha.\overline{\alpha-1}\ldots 1\times\beta.\overline{\beta-1}\ldots 1\times\gamma.\overline{\gamma-1}\ldots 1\times\delta.\overline{\delta-1}\ldots 1\times\text{etc.}}$$

$$=\frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}\ldots\overline{\alpha+2}.\overline{\alpha+1}}{\beta.\overline{\beta-1}\ldots 1\times\gamma.\overline{\gamma-1}\ldots 1\times\delta.\overline{\delta-1}\ldots\times\text{etc.}}$$

da die Factoren 1. 2 . . . α − 1. α im Nenner ſich gegen eben ſolche in Zähler aufheben. Man ſetze m = α + r, alſo α = m — r, und multiplicire Zähler und Nenner mit 1. 2. 3 . . . r — 1. r, ſo iſt die Verſetzungszahl =

$$\frac{m.\overline{m-1}\ldots\overline{m-r+1}}{1.2\ldots r}\times$$

$$\frac{r.\overline{r-1}\ldots 2.1}{\beta.\overline{\beta-1}\ldots 1\times\gamma.\overline{\gamma-1}\ldots 1\times\delta.\overline{\delta-1}\ldots 1\times\text{etc.}}$$

Hier iſt der erſtere Factor der rte Binomial-Coefficient in der mten Potenz, und der zweyte die Verſetzungszahl für die Factoren des Products $b^\beta\ c^\gamma\ d^\delta$ . . . ., deren Anzahl = r iſt. Darum ſondere man in den Aggregaten M von jedem Theile die darin enthaltene Potenz des Factors a ab, und bezeichne den übrig bleibenden Factor durch A, B, C, D. etc. je nachdem er aus einem, zwey, drey, vier Elementen, wie b, c, d, e, u. a. beſteht. Dieſe

Claſſenzeichen beziehen ſich nun auf

den Zeiger	1,	2	3	4	5	...
	b	c	d	e	f	...

Die Localſummen in p^m ſind jetzt nach der Folge der Glieder 0, 1, 2, 3, 4, 5, etc. weil die Stellenzahl jedes Elements, wie a, b, c, etc. um 1 vermindert iſt. Nämlich in ${}^mM$ iſt bloß der Factor a^m enthalten; in ${}^{m+1}M$ ſind enthalten a^{m-1} nebſt b; in ${}^{m+2}M$ ſind enthalten a^{m-1}, a^{m-2}, nebſt c und b^2; in ${}^{m+3}M$ ſind enthalten a^{m-1}; a^{m-2}; a^{m-3}, nebſt d; b c; b^3, u. ſ. f. So wie der Exponent von z um 1 wächſt, kommt ein folgender Factor aus der Reihe b, c, d, e, etc. hinzu, wogegen in der Combination mit dieſem ein Factor von a abgeht. Die Verſetzungszahlen jedes Theils jeder Claſſe bezeichne man gemeinſchaftlich durch den mit dem Buchſtabenzeichen der Claſſe gleich lautenden Buchſtaben des kleinen deutſchen Alphabets, und es erhält nun die mte Potenz, p^m, folgende combinatoriſche Form,

$$p^m = a^m + {}^m\mathfrak{A}\, a^{m-1}\, \mathfrak{a}^1 A z + \left.\begin{array}{l} {}^m\mathfrak{A}\, a^{m-1}\, \mathfrak{a}^2 A \\ + {}^m\mathfrak{B}\, a^{m-2}\, \mathfrak{b}^2 B \end{array}\right| z^2$$

$$+ \left.\begin{array}{l} {}^m\mathfrak{A}\, a^{m-1}\, \mathfrak{a}^3 A \\ + {}^m\mathfrak{B}\, a^{m-2}\, \mathfrak{b}^3 B \\ + {}^m\mathfrak{C}\, a^{m-8}\, \mathfrak{c}^3 C \\ \end{array}\right| z^3 + \left.\begin{array}{l} {}^m\mathfrak{A}\, a^{m-1}\, \mathfrak{a}^4 A \\ + {}^m\mathfrak{B}\, a^{m-2}\, \mathfrak{b}^4 B \\ + {}^m\mathfrak{C}\, a^{m-3}\, \mathfrak{c}^4 C \\ + {}^m\mathfrak{D}\, a^{m-4}\, \mathfrak{d}^4 D \end{array}\right| z$$

$$+ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$+ \left.\begin{array}{l} {}^m\mathfrak{A}\, a^{n-1}\, \mathfrak{a}^n A \\ + {}^m\mathfrak{B}\, a^{m-2}\, \mathfrak{b}^n B \\ + {}^m\mathfrak{C}\, a^{n-3}\, \mathfrak{c}^n C \\ \quad \vdots \\ \quad \vdots \\ \quad \vdots \\ + {}^m\mathfrak{N}\, a^{m-n}\, \mathfrak{n}^n N \end{array}\right| z^n + \text{etc.}$$

Die combinatoriſche Anordnung der Claſſen zu beſtimmten Summen, wie hier vorkommen, läßt ſich involutoriſch ausführen. Auch liefert die Tafel (Combination, 41.) die Claſſen A, B, C, etc. In der erſten Verticalreihe iſt die Claſſe A, in der zweyten die Claſſe B, in der dritten die Claſſe C, u. ſ. f. mit zunehmender Localſumme in jedem Abſchnitte enthalten.

Exempel. Für $m = 3$ und $n = 7$, iſt der Coefficient von $z^7 = 3a^2h + 3a(2bg + 2cf + 2de) + 1.\ a^0(3b^2f + \ bce + 3bd^2 + 3c^2d)$. Der vierte Binomial-Coefficient nebſt den folgenden iſt $= 0$ für $m = 3$.

Für $m = 8$ und $n = 6$ iſt der Coefficient von

$$z^6 = 8a^7g + 28a^6(2bf + 2ce + d^2)$$

$$+ 56a^5(3b^2e + 6bcd + c^3) + 70a^4(4b^3d + 6b^2e^2)$$

$$+ 56a^3.5b^4c + 28a^2b^6.$$

36. Es ſeyn zwey, drey, oder mehrere Reihen:

$$a + bz + cz^2 + dz^3 + \text{etc.} = p$$

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \text{etc.} = q$$

$$\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \text{etc.} = r$$

ſo iſt ihr Product combinatoriſch ausgedruckt, von zwey Reihen:

$$pq = \overset{pq}{{}^2B} + \overset{pq}{{}^3B}z + \overset{pq}{{}^4B}z^2 + \overset{pq}{{}^6B}z^3 + \text{etc.}$$

von drey Reihen:

$$pqr = \overset{pqr}{{}^3C} + \overset{pqr}{{}^4C}z + \overset{pqr}{{}^6C}z^2 + \overset{pqr}{{}^6C}z^3 + \text{etc.}$$

Die Binionen erhalten aus jeder der beiden Reihen p, q, einen Coefficienten; die Ternionen aus jeder der drey Reihen p, q, r, einen. Die Summe der Stellenzahlen der Elemente iſt den Claſſenzeichen beygefügt. Die Anfangsglieder der Reihen haben zur Stellenzahl Eins. Die wirkliche Entwickelung in dem Artikel, Multiplication der Reihen.

37. Es ſey die gebrochne Function,

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^5 + ez^4 + \text{etc.}}{1 - \beta z - \gamma z^2 - \delta z^3 - \varepsilon z^4 - \text{etc.}}$$

in eine nach den Potenzen von z geordnete Reihe Q zu verwandeln, und zwar mit combinatoriſchen Bezeichnungen.

Man ſetze $\beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \text{etc.} = y$, ſo iſt

$$\begin{aligned} Q = \; & a\,(1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + \text{etc.}) \\ & + bz\,(1 + y + y^2 + y^3 + \text{etc.}) \\ & + cz^2(1 + y + y^2 + \text{etc.} \\ & + dz^3(1 + y + \text{etc.}) \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

Nun iſt, zufolge (35.), wenn daſelbſt ſtatt a, b, c. etc. geſetzt wird β, γ, δ, etc. und die dortige Reihe p mit z multiplicirt wird, mit Zuziehung

des Zeigers $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \ldots \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} y &= \mathfrak{a}({}^1Az + {}^2Az^2 + {}^3Az^3 + \text{etc.}) \\ y^2 &= \mathfrak{b}({}^2Bz^2 + {}^3Bz^3 + {}^4Bz^4 + \text{etc.}) \\ y^3 &= \mathfrak{c}({}^3Cz^3 + {}^4Cz^4 + {}^5Cz^5 + \text{etc.}) \end{aligned}$$

u. ſ. f.

Durch die Subſtitution dieſer Werthe der Potenzen von y wird erhalten.

$$\begin{aligned} Q = \; & a \\ & + [b + a\mathfrak{a}^1A]\,z \\ & + [c + b\mathfrak{a}^1A + a(\mathfrak{a}^2A + \mathfrak{b}^2B)]\,z^2 \\ & + [d + c\mathfrak{a}^1A + b(\mathfrak{a}^2A + \mathfrak{b}^2B) + a(\mathfrak{a}^3A + \mathfrak{b}^3B + \mathfrak{c}^5C)]\,z^3 \\ & + [e + d\mathfrak{a}^1A + c(\mathfrak{a}^2A + \mathfrak{b}^2B) + b(\mathfrak{a}^3A + \mathfrak{b}^3B + \mathfrak{c}^5C) \\ & \qquad + a(\mathfrak{a}^4A + \mathfrak{b}^4B + \mathfrak{c}^4C + \mathfrak{d}^4D)]\,z^4 \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

Die Combinationen mit derſelben Localſumme findet man in der Tafel, (Combination, 41.) in den horizontalen Abſchnitten. wenn für die dortigen b, c, d, e, etc. hier β, γ, δ, ε, etc. geſetzt werden. So ſind die Combinationen in dem lezten Gliede des Coefficienten von z^4 folgende: ε; $\beta\delta + \gamma^2$; $\beta^2\gamma$; β^4. Der Coefficient ſelbſt iſt $= e + d\beta + c(\gamma + \beta^2) + b(\delta + 2\beta\gamma + \beta^3) + a(\varepsilon + 2\beta\delta + \gamma^2 + 3\beta^2\gamma + \beta^4)$.

Hiermit vergleiche man die Auflöſnng in dem Artikel, Buchſtabenrechnung, (27). Wenn das Anfangsglied des Diviſors nicht 1 ſondern α iſt, ſo hat man alle Coefficienten im Dividendus und Diviſor durch α zu dividiren. Haben β, γ, δ, etc. das Vorzeichen +, ſo werden die Combinationen derſelben, die eine ungerade Anzahl Elemente enthalten, negativ. Sind einige derſelben, oder unter den Coefficienten des Dividendus, negativ, (wohl zu verſtehen, in Rückſicht auf die hier gemachte Annahme der Vorzeichen), ſo werden die Combinationen negativ, worin eine ungerade Anzahl von Factoren oder Elementen vorhanden iſt. Die Vorzeichen von β, γ, δ, etc. ſind hier — genommen, damit in der entwickelten Formel alle Glieder daſſelbe Zeichen + erhalten. Subtractiv iſt hier nicht als negativ zu verſtehen.

38. Es ſeyn gegeben die beiden Reihen:

$$a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + \text{etc.} = y$$

$$\alpha + \beta y + \gamma y^2 + \varepsilon y^3 + \delta y^4 + \text{etc.} = x\,,$$

man ſoll x durch eine nach den Potenzen von z geordnete Reihe combinatoriſch darſtellen.

Mit Zuziehung des Zeigers $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \ldots \\ a & b & c & d & e \ldots \end{pmatrix}$.

iſt

$$
x = \begin{array}{l|l|l|l|l}
\alpha & \underline{|z} & \underline{|z^2} & \underline{|z^3} & \\
+\beta a^1 A & +\beta a^2 A & +\beta a^3 A & +\beta a^4 A & + \text{etc.} \\
+\gamma b^2 B & +\gamma b^3 B & +\gamma b^4 B & +\gamma b^5 B & \\
+\delta c^3 C & +\delta c^4 C & +\delta c^5 C & +\delta c^6 C & \\
+\varepsilon d^4 D & +\varepsilon d^5 D & +\varepsilon d^6 D & +\varepsilon d^7 D & \\
+ \text{etc.} & + \text{etc.} & + \text{etc.} & + \text{etc.} &
\end{array}
$$

Die Coefficienten werden auf die Art, wie in dem Artikel, Combination (42.) für das Polynomium $a + bz + cz^2 +$ etc. gewieſen iſt, entwickelt, und aus der Tafel daſelbſt (41.) genommen. Es iſt nämlich der Coefficient

von $z = \beta b + \gamma . 2ab + \delta . 3a^2 b + \varepsilon . 4a^3 b$
$+ \zeta . 5a^4 b +$ etc.

von $z^2 = \beta c + \gamma(2ac + b^2) + \delta(3a^2 c + 3ab^2)$
$+ \varepsilon(4a30 + 6a^2 b^2) + \zeta(5a^4 c + 1ca^3 b^2)$
$+$ etc.

von $z^3 = \beta d + \gamma(2ad + 2bc) + \delta(3a^2 d + 6abc + b^3)$
$+ \varepsilon(4a^3 d + 12a^2 bc + 4ab^3)$
$+ \zeta(5a^4 d + 20a^3 bc + 10a^2 b^3) +$ etc.

von $z^4 = \beta e + \gamma(2ae + 2bd + c^2)$
$+ \delta(3a^2 e + 6abd + 3ac^2 + 3b^2 c)$
$+ \varepsilon(4a^3 e + 12a^2 bd + 6a^2 c^2 + 12ab^2 c + b^4)$
$+ \zeta(5a^4 e + 20a^3 bd + 10a^3 c^2 + 30a^2 b^2 + 5ab^4)$
$+$ etc.

Die Combinationen zu z^5 ſind mit den Verſetzungszahlen, doch ohne die hier beyzufügenden β, γ, δ, etc. in dem A. Combination (42.) aufgeſtellt. Bey einiger Aufmerkſamkeit wird man ein Geſetz der Herleitung für die Coefficienten durch Vertauſchungen der Elemente, durch Multi-

plication mit den Exponenten des letzten Elements, und Diviſion mit dem Exponenten des letzten veränderten wahrnehmen, ſ. unten (45.).

Ein ganz leichtes Verfahren, wie man (wie hier erfordert wird) aus ${}^{n}A$ könne ${}^{n+1}B$, und daraus ${}^{n+3}C$, und daraus ferner ${}^{n+3}D$, u. ſ. w. involutoriſch ableiten, zeigt (Erſte Samml. c. a. Abh. S. 187) an ${}^{10}D$ als einem Beyſpiele.

39. Die beiden Reihen ſeyn:

$$az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + ez^5 + \text{etc.} = y,$$

$$\alpha y + \beta y^2 + \gamma y^3 + \delta y^4 + \varepsilon y^5 + \text{etc.} = x,$$

ſo iſt mit Zuziehung des Zeigers $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \ldots \\ a & b & c & d \ldots \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{l|l|l|l} \underline{z} \quad \underline{z^2} & \underline{z^3} & \underline{z^4} & \\ x = \alpha\mathfrak{a}\,{}^1A + \alpha\mathfrak{a}\,{}^2A & + \alpha\mathfrak{a}\,{}^3A & + \alpha\mathfrak{a}\,{}^4A & + \text{etc.} \\ \qquad\qquad\quad \beta\mathfrak{b}\,{}^2B & + \beta\mathfrak{b}\,{}^3B & + \beta\mathfrak{b}\,{}^4B & \\ & + \gamma\mathfrak{c}\,{}^3C & + \gamma\mathfrak{c}\,{}^4C & \\ & & + \delta\mathfrak{d}\,{}^4D & \end{array}$$

Dieſe Entwickelung iſt eben ſo einfach als die vorhergehende, nach der zuletzt angeführten involutoriſchen Regel. Die Combinationen haben hier in jedem Coefficienten dieſelbe Localſumme. Daher finden ſie ſich für jeden in einem horizontalen Abſchnitte der Tafel, Combination (41.) bey einander, wenn daſelbſt die Buchſtaben mit den nächſt vorhergehenden vertauſcht werden. Es iſt

$$x = \alpha a z + (\alpha b + \beta a^2) z^2 + (\alpha c + \beta . 2ab + \gamma . a^3) z^3$$
$$+ (\alpha d + \beta (2ac + b^2) + \gamma . 3a^2 b + \delta a^4) z^4$$
$$+ \text{etc.}$$

40. Exempel. Es ſey $x = \log. \text{nat} (1 + y)$, ſo iſt $x = y - \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{3} y^3 - \frac{1}{4} y^4 + \frac{1}{5} y^5 - \text{etc.}$
Ferner ſey $y = az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \text{etc.}$

ſo iſt

$$\log \text{nat.} (1 + az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \text{etc.})$$
$$= az + (b - \tfrac{1}{2}a^2) z^2 + (c - \tfrac{1}{2}.2ab + \tfrac{1}{3}a^3) z^3$$
$$+ (d - \tfrac{1}{2}(2ac + bb) + \tfrac{1}{3}.3a^2b - \tfrac{1}{4}a^4) z^4 + \text{etc.}$$

Mehr Exempel in der Hindenburgiſchen Abhandlung de infinitinomii dignitatibus exponentis indeterminati pag. 103 ſeqq; und in den beyden Sammlungen a. comb. Abhandl. Auch in dem folgenden Abſchnitte ſelbſt.

IV. Verbindung der combinatoriſchen und Differenzen-Rechnung.

41. Bey dem Gebrauch des Taylorſchen Lehrſatzes, die Veränderung einer Function zu finden, wird die combinatoriſche Rechnungsmethode ſehr brauchbar, um das Geſchäft kurz, einleuchtend und ſicher auszuführen.

42. Es ſey φu irgend eine Function der veränderlichen Größe u, z. B. ihr Logarithme, oder der Sinus, wenn u ein Winkel iſt, oder der Bogen, wenn u ein Sinus iſt. Das Zeichen φ zeigt die Art der Function, aber unbeſtimmter Weiſe, an. Man ſetze zu u die polynomiſche Größe, $az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + ez^5 + \text{etc.}$ worinn z eine von u ganz unabhängige willkührliche Größe iſt. Nun ſoll dieſelbe Function der zuſammengeſezten Größe, nämlich $\varphi(u + az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \text{etc.})$ durch φu, und eine nach den ganzen bejahten Potenzen von z geordnete Reihe dargeſtellt werden, ſo daß dieſe Reihe die Veränderung der Function φu, zufolge der Veränderung von u angebe.

43. In dem Artikel, Differenzenrechnung, wird gezeigt, daß die Veränderung einer Function ſich durch die Potenzen der Veränderung der Functionalgröße mit ganzen bejahten Exponenten ausdrucken läßt. Daſelbſt wird gelehrt, wie die Coefficienten dieſer Potenzen beſtimmt werden.

Dieſe giebt in der bequemſten Form der Taylorſche Lehrſatz. Es iſt nähmlich, wenn y die Veränderung der Functional-größe u iſt,

$$\varphi(u+y) = \varphi \ddot{u} + \frac{d\varphi \ddot{u}}{1.du} y + \frac{d^2\varphi \ddot{u}}{1.2.du^2} y^2 + \frac{d^3\varphi \ddot{u}}{1.2.3.du^3} y^3 + \frac{d^4\varphi \ddot{u}}{1..4du^4} y^4 + \text{etc.}$$

wo das Differential $d\ddot{u}$ unveränderlich iſt, ſo daß ü ſich gleichförmig verändert. Hier iſt $y = az + bz^2 + cz^3 + dz^4$ etc. Setzt man für y dieſe Reihe, ſo wird die Function, $\varphi(\ddot{u} + y)$, oder $\varphi(\ddot{u} + az + bz^2 + ez^3 + \text{etc.})$ durch $\varphi\ddot{u}$ und eine nach z geordnete Reihe erhalten.

Man ſetze der Kürze halber $\frac{d\varphi \ddot{u}}{1.du} = \alpha$; $\frac{d^2\varphi \ddot{u}}{1.2du^2} = \beta$;

$$\frac{d^3\varphi \ddot{u}}{1.2.3du^3} = \gamma; \quad \frac{d^4\varphi \ddot{u}}{1..4du^4} = \delta;$$

u. ſ. f. ſo daß

$$\varphi(\ddot{u} + y) = \varphi\ddot{u} + \alpha y + \beta y^2 + \gamma y^3 + \delta y^4 + \text{etc.}$$

und die ganze Rechnung iſt ſchon in (39.) gemacht, theils der Form nach, theils ſchon für die vier erſten Coefficienten entwickelt. Man bezeichne die Coefficienten der Reihe zur beſſern Unterſcheidung durch A, B, C, D, etc. ſo daß

$$\varphi(\ddot{u} + az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \text{etc.}) =$$
$$\varphi\ddot{u} + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \text{etc.}$$

wo man die Symbole A, B, C, etc. mit den Claſſenzeichen der Combinationen nicht wird verwechſeln können.

Es iſt

$$A = \alpha a$$

$$B = \alpha b + \beta a^2$$

$$C = \alpha c + \beta . 2ab + \gamma a^3$$

$$D = \alpha d + \beta(2ac + b^2) + \gamma . 3a^2 b + \delta a^4$$

$$E = \alpha e + \beta(2ad + 2bc) + \gamma(3a^2 c + 3ab^2) + \delta . 4a^3 b + \varepsilon a^5$$

$$F = \alpha f + \beta(2ae + 2bd + c^2) + \gamma(3a^2 d + 6abc + b^3) + \delta(4a^3 c + 6a^2 b^2) + \varepsilon . 5a^4 b + \zeta a^6$$

$$G = \alpha g + \beta(2af + 2be + 2cd) + \gamma(3a^2 e + 6abd + 3ac^2 + 3b^2 c) + \delta(4a^3 d + 12a^2 bc + 4ab^3) + \varepsilon(5a^4 c + 10a^3 b^2) + \zeta . 6a^5 b + \eta a^7$$

u. ſ. f.

44. Das Geſetz, wie dieſe Coefficienten unabhängig von einander gefunden werden, iſt offenbar. Der mte Coefficient enthält m Glieder, ſo fern die Quotienten α, β, γ, etc. unbeſtimmt gelaſſen, oder nicht null werden. Wenn der (m — n)te derſelben = o iſt, ſo hat der Coefficient nur m — n — 1 Glieder. Aus den m Größen, a, b, c, d, etc. werden alle Combinationen mit der Lokalſumme m für den Zeiger 1, 2, 3, 4, 5, etc, zu a, b, c, d, e, etc. gemacht, und die Claſſen derſelben nach der Folge von der erſten an, mit jenen α, β, γ, etc. verbunden, mit Beyfügung der Verſetzungszahlen.

45. Die Combinationen der a, b, c, d, etc. laſſen ſich auch aus denen in den nächſt vorhergehenden Coefficienten zugleich mit den numeriſchen Factoren folgendermaſſen herleiten. Wenn der letzte Buchſtab in einem Terminus einfach iſt, ſo wird dafür der im Alphabet nächſtfolgende geſetzt. Iſt der letzte Literalfactor eine Potenz, ſo multiplicirt man den Terminus mit dem Exponenten, ver-

mindert den Exponenten der Potenz um Eins, und ſetzt ſtatt des weggenommenen Factors den nächſtfolgenden Buchſtaben. Iſt der zweyte Literalfactor vom Ende der Buchſtab, welcher im Alphabet vor dem letzten vorhergeht, einfach oder eine Potenz, ſo verfährt man mit dieſem auf eine ähnliche Art, dividirt aber zugleich mit dem erhöhten Exponenten des letzten Literalfactors. Iſt der vorletzte Literalfactor nicht ein ſolcher, ſo wird keine Veränderung als die mit dem letzten vorgenommen. Der dritte Literalfactor vom Ende, wenn ein ſolcher vorhanden iſt, und noch entferntere bleiben unverändert. Das letzte Glied in dem Coefficienten muß noch für ſich hinzugefügt werden.

Der Grund dieſer Herleitung, was die Elemente der Combinationen betrifft, iſt in dem Artikel, Combination, §. 41. angegeben. Die Verwandlung der numeriſchen Factoren wird aus der Beſchaffenheit der Verſetzungszahlen leicht hergeleitet. Enthält ein Product ω einfache Factoren, ſo iſt die Verſetzungszahl das Product $1.\ 2.\ 3..\ \omega$, wenn ſie alle verſchieden ſind. Für α gleiche wird dieſes Product durch $1.\ 2..\ \alpha$ dividirt, für andre an der Zahl β unter ſich gleiche durch $1.\ 2..\ \beta$, u. ſ. f. Iſt nun der letzte Factor in einer Combination q^ν, ſo kommt für denſelben der Diviſor $1.2...\nu$; in der abgeleiteten, die ſich auf $q^{\nu-1}r$ endigt, aber der Diviſor $1.2...(\nu-1)$. Folglich wird die Verſetzungszahl der letztern durch die Multiplication mit ν erhalten. Endigt ſich die Combination auf $p^\mu q^\nu$, ſo iſt wegen dieſer Factoren des Product $1.\ 2.\ 3....\omega$ durch $1.2...\mu \times 1.2...\nu$ zu dividiren, dagegen in der einen der abgeleiteten, die ſich auf $p^{\mu-1} \times q^{\nu+1}$ endigt, daſſelbe durch $1.2...(\mu-1) \times 1.2..(\nu+1)$ zu dividiren iſt. Die Verſetzungszahl der letztern Combination wird alſo aus der für die erſtere durch die Multiplication mit μ und Diviſion durch $\nu+1$ erhalten.

46. Eine merkwürdige, vollſtändige Derivation jedes Coefficienten aus dem nächſt vorhergehenden geſchieht folgendergeſtalt. Für a, b, c, d, e, etc. wird folg-

weiſe geſetzt 2b, 3c, 4d, 5e, 6f, etc. für α, β, γ, δ, ε, etc. folgweiſe $2\beta a$, $3\gamma a$, $4\delta a$, $5\varepsilon a$, $6\zeta a$, etc. und für A, B, C, D, E, F, etc. folgweiſe 2B, 3C, 4D, 5E, 6F, etc. In den Producten und Potenzen wird dieſe Vertauſchung mit jedem einfachen Factor vorgenommen. Der Grund dieſer Herleitungen wird in dem Artikel, Derivations-Rechnung, ſich ergeben.

47. Exempel I. Es ſey $\varphi u = \log. \text{nat. } u$, ſo

iſt $\alpha = \frac{1}{u}$; $\beta = -\frac{1}{2u^2}$; $\gamma = +\frac{1}{3u^3}$;

$\delta = -\frac{1}{4u^4}$; $\varepsilon = +\frac{1}{5u^5}$; u. ſ. f.

Folglich ſind für $\log \text{nat.} (u + az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \text{etc.}) = \log \text{nat}\, u + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4$ etc. die Werthe der Coefficienten:

$$A = \frac{a}{u}$$

$$B = \frac{b}{u} - \frac{a^2}{2u^2}$$

$$C = \frac{c}{u} - \frac{2ab}{2u^2} + \frac{a^3}{3u^3}$$

$$D = \frac{d}{u} - \frac{2ac + b^2}{2u^2} + \frac{3a^2b}{3u^3} - \frac{a^4}{4u^4}$$

$$E = \frac{e}{u} - \frac{2ad + 2bc}{2u^2} + \frac{3a^2c + 3ab^2}{3u^3} - \frac{4a^3b}{4u^4} + \frac{a^5}{5u^5}:$$

u. ſ. f.

48. Die Relationen zwiſchen dieſen Coefficienten und allen vorhergehenden ſind in folgenden Gleichungen enthalten:

$$Au = a$$

$$2Bu + Aa = 2b$$

$$3Cu + 2Ba + Ab = 3c$$

$$4Du + 3Ca + 2Bb + Ac = 4d$$

$$5Eu + 4Da + 3Cb + 2Bc + Ad = 5e$$

$$6Fu + 5Ea + 4Db + 3Cc + 2Bd + Ae = 6f$$

u. ſ. f.

Jede dieſer Gleichungen entſteht aus der nächſt vorhergehenden, wenn die Größen der beiden Reihen A, B, C, D, etc. und a, b, c, d, etc. auf die in (46) angezeiget Art jede mit der folgenden vertauſcht werden, und zugleich für u die in der Functionalgröße darauf folgende a, ohne die veränderliche z, geſetzt wird. Es gehört nämlich u mit in die Reihe a, b, c, d, etc. vor a als Coefficient von z^0 oder von 1, und nach dem Geſetze der Vertauſchung für dieſe muß u mit a vertauſcht werden.

49. Exempel II. Es ſey $\varphi u = e^u$, wo e die Baſis der natürlichen Logarithmen iſt. Nun ſey . . .

$$\varphi(u + az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \text{etc.}) =$$
$$e^u + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \text{etc.}$$

wo $u + az + bz^2 + \text{etc.}$ der natürliche Logarithme der Zahl $e^u + Az + Bz^2 + \text{etc.}$ iſt. Da $\varphi u = e^u$, ſo iſt $d\varphi u = e^u du$; $d^2\varphi u = e^u du^2$; $d^3\varphi u = e^u du^3$; $d^4\varphi u = e^u du^4$; u. ſ. f. (ſ. Exponential-Rechnung). Daher $\alpha = \varphi u = e^u$; $\beta = \frac{1}{2}\alpha$; $\gamma = \frac{1}{6}\alpha$; $\delta = \frac{1}{24}\alpha$; u. ſ. f. Demnach iſt

$e^u = \alpha$

$A = \alpha a$

$B = \alpha b + \frac{\alpha}{2} \cdot a^2$

$C = \alpha c + \frac{\alpha}{2} \cdot 2ab + \frac{\alpha}{6} \cdot a^3$

$D = \alpha d + \frac{\alpha}{2} (2ac + b^2) + \frac{\alpha}{6} \cdot 3a^2 b + \frac{\alpha}{24} \cdot a^4$

$E = \alpha e + \frac{\alpha}{2} (2ad + 2bc) + \frac{\alpha}{6} (3a^2 c + 3ab^2)$

$+ \frac{\alpha}{24} \cdot 4a^3 b + \frac{\alpha}{120} \cdot \alpha^5$

u. ſ. f.

50. Die Coefficienten durch eine rücklaufende Reihe auszudrucken, mache man die in (46.) angewieſenen Vertauſchungen zwiſchen den Größen der Reihe a, b, c, d, etc. und der Reihe A, B, C, D, etc. Da e^u mit in die Reihe der A, B, C, D, etc. als Coefficient von z^0 gehört, ſo iſt e^u, wofür man bequemer α ſchreibt, mit A zu vertauſchen, nach dem Geſetze der Vertauſchung für A, B, C, etc. Aus der Gleichung $A = \alpha a$ werden nun alle folgenden hergeleitet.

Es iſt

$A = \alpha a$

$2B = Aa + 2\alpha b$

$3C = Ba + 2Ab + 3\alpha c$

$4D = Ca + 2Bb + 3Ac + 4\alpha d$

$5E = Da + 2Cb + 3Bc + 4Dd + 5\alpha e$

u. ſ. f.

51. Exempel III. Es ſey $\varphi u = \sin u$, ſo iſt $d\varphi u = \text{coſ.}\, u . du$; $d^2\varphi u = -\sin u . du^2$; $d^3\varphi u =$

$-\cos u . du^3$; $d^4 \varphi u = + \sin u . du^4$. u. ſ. f. Alſo iſt $\alpha = \cos u$; $\beta = -\frac{1}{2}\sin u$; $\gamma = -\frac{1}{6}\cos u$; $\delta = +\frac{1}{24}\sin u$; etc. Mittelſt dieſer Werthe werden die Coefficienten in der Reihe für

$$\sin(u + az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \text{etc.}) =$$
$$\sin u + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \text{etc.}$$

gefunden, wenn in den allgemeinen Werthen derſelben (43.) für α, β, γ, etc. die hier gefundenen Werthe geſetzt werden.

52. **Exempel IV.** Die Coefficienten in der entwickelten Potenz, $(u + az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \text{etc.})^m = u^m + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \text{etc.}$ können mittelſt des in (46.) angegebenen Derivations-Proceſſes ſehr leicht durch eine rücklaufende Reihe gefunden werden. Es iſt hier $\varphi u = u^m$, alſo $\alpha = m u^{m-1}$ woraus $Au = mu^m a$. In die Reihe a, b, c, d, etc. gehört auch vor a die Größe u, und in die Reihe A, B, C, D, etc. gehört auch vor A die Größe u^m. Nach dem Geſetze der Vertauſchung für jene Größen muß u mit a, und u^m mit A vertauſcht werden. Durch dieſe und die andern in (46.) angegebenen Vertauſchungen werden aus der erſten Grundgleichung alle folgende erhalten, nämlich

$$Au = mu^m a$$
$$2Bu = (m-1)Aa + 2mu^m b$$
$$3Cu = (m-2)Ba + (2m-1)Ab + 3mu^m c$$
$$4Du = (m-3)Ca + (2m-2)Bb + (3m-1)Ac + 4mu^m d$$
$$5Eu = (m-4)Da + (2m-3)Cb + (3m-2)Bc + (4m-1)Ad + 5mu^m e$$

u. ſ. f.

Summirung der Potenzen irgend welcher Größen durch die Combinationen derſelben.

53. Man formire das Product aus einer beſtimmten Anzahl binomiſcher Factoren,

$$(1+az)\,(1+bz)\,(1+cz)\,(1+dz)\ \text{etc.}$$

und ſetze es =

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + \text{etc.}$$

ſo iſt A die Summe aller Factoren, a, b, c, d, etc.; B die Summe der Producte je zweyer, wie ab, ac, bc; C die Summe der Producte je dreyer, wie abc, abd, bcd; D die Summe der Producte je vierer, wie abcd, abce, u. ſ. f.; ſämmtlich ohne Wiederholungen, (Buchſtabenrechnung, 19.). Nimmt man von dem Producte und von der Reihe die Logarithmen, ſo iſt

$$l(1+az) + l(1+bz) + l(1+cz) + l(1+dz) + \text{etc.}$$

$$= l(1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \text{etc.})$$

Jeder Logarithme werde in eine Reihe verwandelt, ſo iſt, bey Anwendung der natürlichen Logarithmen, der erſte Theil jener Gleichung =

$$+ az - \tfrac{1}{2}a^2z^2 + \tfrac{1}{3}a^3z^3 - \tfrac{1}{4}a^4z^4 + \text{etc.}$$
$$+ bz - \tfrac{1}{2}b^2z^2 + \tfrac{1}{3}b^3z^3 - \tfrac{1}{4}b^4z^4 + \text{etc.}$$
$$+ cz - \tfrac{1}{2}c^2z^2 + \tfrac{1}{3}c^3z^3 - \tfrac{1}{4}c^4z^4 + \text{etc.}$$
$$+ dz - \tfrac{1}{2}d^2z^2 + \tfrac{1}{3}d^3z^3 - \tfrac{1}{4}d^4z^4 + \text{etc.}$$
$$+ \text{etc.}$$

Der zweyte Theil der Gleichung, nämlich der Logarithmus von $1 + Az + Bz^2 + cz^3 + \text{etc.}$ werde in die Reihe,

$$Pz - \tfrac{1}{2}Qz^2 + \tfrac{1}{3}Rz^3 - \tfrac{1}{4}Sz^4 + \tfrac{1}{5}Tz^5 - \tfrac{1}{6}Vz^6 + \text{etc.}$$

verwandelt, ſo iſt aus (47), wenn daſelbſt $u = 1$ geſetzt

wird, wodurch $\log nat\, u = 1$ iſt, bey gehöriger Vertau-ſchung der Bezeichnungen,

$$P = A$$
$$\tfrac{1}{2}Q = \tfrac{1}{2}A^2 - \tfrac{1}{1}.B$$
$$\tfrac{1}{3}R = \tfrac{1}{3}A^3 - \tfrac{1}{2}.2AB + \tfrac{1}{1}C$$
$$\tfrac{1}{4}S = \tfrac{1}{4}A^4 - \tfrac{1}{3}.3A^2B + \tfrac{1}{2}(2AC + B^2) - \tfrac{1}{1}D$$
$$\tfrac{1}{5}T = \tfrac{1}{5}A^5 - \tfrac{1}{4}.4A^3B + \tfrac{1}{3}(3A^2C + 3AB^2) - \tfrac{1}{2}(2AD + 2BC) + \tfrac{1}{1}E$$
$$\tfrac{1}{6}V = \tfrac{1}{6}A^6 - \tfrac{1}{5}.5A^4B + \tfrac{1}{4}(4A^3C + 6A^2B^2) - \tfrac{1}{3}(3A^2D + 6ABC + B^3 + \tfrac{1}{2}(2AE + 2BD + C^2) - \tfrac{1}{1}F.$$

u. ſ. f.

Hier iſt P die Summe der a, b, c, d, etc. als Potenzen vom erſten Grade betrachtet, Q die Summe ihrer Quadrate, R der Cuborum, S der Biquadrate, u. ſ. f. Das Geſetz der Formation iſt ſehr klar. In der Summe der nten Potenzen ſind alle Claſſen der Combinationen von A, B, C, D, E, enthalten, deren Localſumme = n iſt, mit Aufnahme der Wiederholungen. Jede Combination iſt mit der Verſetzungszahl ihrer Elemente begleitet. Jede Claſſe wird durch die Anzahl ihrer Elemente dividirt. Die Vorzeichen der Claſſe wechſeln ab. Das Aggregat giebt den nten Theil der Summe der Potenzen von a, b, c, d, e, etc.

Die Form, welche Euler in den Comm. Petr. novis, T. XV. dieſen Summen giebt, iſt nicht ſo einleuchtend. Er ordnet die Haupttheile der Formeln nach der Anzahl der Elemente aus der Reihe A, B, C, D, E, F, etc. Dadurch wird das Geſetz der numeriſchen Coefficienten verwickelt.

54. Die rücklaufenden Formeln werden aus (48.) erhalten, wenn die gehörige Vertauſchung der Bezeichnungen gemacht wird,

nämlich für die dortigen	a, b, c, d, e, etc. A, B, C, D, E, etc.
hier	A, B, C, D, E, etc. $P, -\frac{1}{2}Q, \frac{1}{3}R, -\frac{1}{4}S, \frac{1}{5}T,$ etc.

Es iſt

$$P = A$$
$$Q = PA - 2B$$
$$R = QA - PB + 3C$$
$$S = RA - QB + PC - 4D$$
$$T = SA - RB + QC - PD + 5E$$
$$V = TA - SB + RC - QD + PE - 6F$$

u. ſ. f.

Dieſes ſind dieſelben Gleichungen, welche in dem Artikel, Combination, (43.) unmittelbar aus Vergleichung der Combinationen hergeleitet ſind.

Schriften über die Combinationslehre, die combinatoriſche Analyſis und ihre Anwendung.

Hindenburgii Infinitinomii dignitatum hiſtoria, leges ac formulae, 1779.

Der combinatoriſche Theil des Buchs enthält: die Aufſöſung der beiden wichtigen ſogenannten Discerptionsprobleme; ihre mannichfaltige Anwendung auf die Analyſis; einen Anhang combinatoriſcher Tafeln.

Ej. Novum ſyſtema permutationum, combinationum et variationum, 1781.

Die Grundbegriffe der Combinationslehre und ihre Zeichen. Die Operationen größtentheils arithmetiſch-combinatoriſch.

Eſchenbach de ſerierum reverſione, 1789.

Die combinatoriſche Umkehrung der Reihen, ohne Recurrenz der Glieder.

Fiſchers Theorie der Dimenſionszeichen, 2 Th. 1792. Die Charakteriſtik des Verf. iſt bey weitem nicht ſo bequem als die Hindenburgiſche. Mancherley brauchbare, oder zur Übung dienende Aufgaben, welche man ſuchen muß durch die Hindenburgiſche Methode aufzulöſen. Das wichtigſte iſt die Unterſuchung über die Umkehrung der Reihen, und Auflöſung der Gleichungen durch dieſes Mittel.

Rothe, formulae de ſerierum reverſione demonſtratio univerſalis, 1793.

Die combinatoriſche Rechnungsmethode iſt hier mit großer Geſchicklichkeit angewandt. Das ſchöne und merkwürdige, von dem Verfaſſer entdeckte Geſetz der Coefficienten in der umgekehrten Reihe, welches der la Grangiſchen Umwandlungsformel zur Seite geſtellt zu werden verdient, wird in dem Artikel, Umkehrung der Reihen, vorgetragen, und auf einem andern Wege anſchaulich gemacht werden.

Hindenburg, problema ſolutum maxime univerſale ad ſerierum reverſionem 1793.

Verbeſſerungen, Zuſätze, Erweiterung der Eſchenbach-Rothiſchen Reverſionsformel.

Töpfer, combinatoriſche Analytik und Theorie der Dimenſionszeichen in Parallel geſtellt, 1793. Gegen die hier gemachte Beſchuldigung vertheidigt ſich Fiſcher in der Schrift,

Über den Urſprung der Theorie der Dimenſionszeichen, und ihr Verhältniß gegen die combinatoriſche Analyſis des Hrn. Prof. Hindenburg 1794. womit zu vergleichen: Pfaffs Erklärung zur Rechtfertigung des Hrn. Prof. Hindenburg, ꝛc. im Intelligenzbl. der A. Litt. Zeit. 1802. nr. 169. und Hindenburgs Bemerkungen über dieſe Erklärung eb. daſ. nr. 192. Man muß es ſchon für unwahrſcheinlich halten, daß jemand, um die

Methode eines andern ſich zuzueignen, ſie unbequemer macht.

Burckhardt Methodus combinatorio-analytica evolvendis fractionum continuarum valoribus idonea, 1794.

Dieſes und andere combinatoriſche Verfahren, von Hindenburg, Rothe, Töpfer, im mathem. Arch. 1ſtem Band.

Hindenburg, terminorum ab infinitinomii dignitatibus coefficientes Moivreanos ſequi ordinem Lexicographicum, 1795.

Hier wird gezeigt, daß Moivre's Verfahren auf lexikographiſche Anordnung dieſer Coefficienten führt. Die von Hindenburg (Infin. Dign.) gegebene iſt arithmographiſch, nach Claſſen.

Mathematiſches Archiv, herausgegeben von Hindenburg, angefangen 1794.

Darin ſind viele hierher gehörige Abhandlungen enthalten. Mit dieſem iſt zu verbinden:

Sammlung combinatoriſch-analytiſcher Abhandlungen, herausgegeben von Hindenburg, erſte Samml. 1796; zweyte 1800. Die erſte kam unter dem Titel: der polynomiſche Lehrſatz, das wichtigſte Theorem der ganzen Analyſis, heraus. In dieſen Sammlungen werden vornehmlich rein-combinatoriſche Operationen, und die damit in Verbindung ſtehenden Involutionen gebraucht.

Rothe, theorema binomiale univerſaliter demonſtratum, 1796; vermittelſt Variationen und Combinationen.

De Praſſe uſus Logarithmorum infinitinomii in theoria aequationum, 1796.

Hierin eine deutliche Anleitung zu dem combinatoriſchen Calcül.

In Pfaffs Disquiſitionibus analyticis iſt in

dem tractatu de reverſione ſerierum ein Abſchnitt p. 260 — 321. de theoremate polynomiali combinatorie tractato, ejusque applicatione ad reverſionem ſerierum, ein ſehr lehrreicher Commentar über die Hindenburgiſche Combinationslehre.

Stahls Grundriß der Combinationslehre nebſt Anwendung derſelben auf die Analyſis, 1800. Mit Fleiß ausgearbeitet.

Deſſelben Einleitung in das Studium der Combinationslehre. 1801.

Weingärtners Lehrbuch der combinatoriſchen Analyſis, 2 Theile. 1800.

Im erſten, die Theorie der Hindenburgiſchen Combinationslehre; im zweyten, die Anwendung derſelben auf mehrere analytiſche Aufgaben. Der Vortrag deutlich.

Columnarzahl iſt das Product einer Polygonalzahl in ihre Seite, oder in ihre Stellenzahl. Die Namenzahl einer Polygonalzahl ſey $= n$ (für Trigonalzahlen $= 3$, für Tetragonalzahlen $= 4$, u. ſ. f.), die Seite $= m$, ſo iſt die Polygonalzahl $= \frac{1}{2} m ((m-1)(n-2)+2)$, und die Columnarzahl $= \frac{1}{2} m^2 ((m-1)(n-2)+2)$. Man hat dieſe Form, wie manche andere, jetzt bey Seite gelegt. S purgs Progreſſionalcalcul. S. 300 ff.

Commenſurabel wird von Größen geſagt, die ſich durch einen und denſelben Theil ohne Reſte meſſen oder theilen laſſen. Alle ganze Zahlen ſind commenſurabel durch die gemeinſchaftliche Einheit; doch nennt man insbeſondere Zahlen commenſurabel, die einen andern gemeinſchaftlichen Theiler als die Einheit haben. Alle Brüche, deren Zähler und Nenner ganze Zahlen ſind, oder darauf gebracht werden können, ſind commenſurabel. Bringt man ſie auf einen gemeinſchaftlichen Nenner n, ſo iſt der Bruch $\frac{1}{n}$ das gemeinſchaftliche Maaß, z. B. $\frac{3}{4}$ und $\frac{2}{7}$ haben das

gemeinſchaftliche Maaß $\frac{1}{28}$. Größen ſind noch commenſurabel, wenn ihr gemeinſchaftliches Maaß eine Irrationalzahl iſt, oder ſich mit der Einheit nicht vergleichen läßt, wie, $3\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$, $10\sqrt{2}$, wo $\sqrt{2}$ das gemeinſchaftliche Maaß iſt, daher ſich dieſe Zahlen wie 3, 5, 10 verhalten.

Commenſurabel in der Potenz nennt Euklides (X. 3. Erkl.) gerade Linien, deren Quadrate von einem und demſelben Flächenraume gemeſſen werden, z. B. Zahlen ſtatt der Linien genommen, die Zahlen $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, deren Quadrate, 3, 5, commenſurabel ſind. So auch $2\sqrt{3}$, $7\sqrt{5}$, deren Quadrate 12 und 245 ſind.

Complanation, Ebnung, iſt die Vergleichung des Inhalts einer krummen Fläche mit einer ebenen.

Die Alten haben nur die Oberflächen eines ſenkrechten Cylinders und Kegels, einer Kugel und eines Kugelabſchnittes mit Kreisflächen vergleichen können. S. Archimedes von Kugel und Cylinder. B. I. Satz 14. 15. 16. 30. 38. Huygens fand im J. 1657. die Ebnung des paraboliſchen Konoids, und in dem folgenden Jahre die Vergleichung der Oberfläche des hyperboliſchen Konoids und der Sphäroiden mit Kreisflächen. S. Horol oſcill. P. III. prop. 9. Er gab davon einigen Geometern Nachricht, unter andern auch Wallis, der ihm bald darauf ſeine Methode, dieſe Vergleichungen zu machen, mittheilte, (Operum T. I. p. 555; 562), und auch die hohle Oberfläche fand, welche eine Parabel durch die Umdrehung um die berührende am Scheitel beſchreibt, (a. a. O. S. 562.). Dieſe gründet ſich auf ſeine Arithmetik unendlicher Größen, und iſt beſchwerlich. Huygens hat nur die Conſtructionen, ohne Beweiſe, gegeben. Durch die neuere Infiniteſimal-Rechnung wird die Oberfläche derer Körper, die durch Umdrehung um eine Axe entſtehen, nach einem allgemeinen Verfahren gefunden.

Es iſt AZ (Fig. 74. Tab. V.) eine gerade Linie, die

bey der Umdrehung der Winkelfläche ZAX um die gerade AX eine Kegelfläche beſchreibe. Man ſetze $AP = x$; $PQ = \Delta x$; die auf AX ſenkrechten $MP = y$; $NQ = y + \Delta y$; die Seite des von AM beſchriebenen Kegels $AM = z$, und $MN = \Delta z$. Nun iſt die von AM beſchriebene Kegelfläche gleich einem Dreyecke, deſſen Grundlinie der von PM beſchriebene Kreisumfang, und Höhe AM iſt, alſo $= \pi y z$, wo $1 : \pi$ das Verhältniß des Durchmeſſers eines Kreiſes zum Umfange iſt. Die von AN beſchriebene Kegelfläche iſt $= \pi (y + \Delta y)(z + \Delta z)$ alſo die Fläche des von MN beſchriebenen Kegelſtücks $= \pi (z\Delta y + y\Delta z + \Delta y . \Delta z)$ $= 2\pi \Delta z (y + \frac{1}{2}\Delta y)$, weil $y : z = \Delta y : \Delta z$ iſt. Da $\Delta z^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$, ſo iſt die Fläche des Kegelſtücks $= \pi (y + \frac{1}{2}\Delta y) V(\Delta x^2 + \Delta y^2)$.

Es ſey nun AZ (Fig. 75) eine krumme Linie in der Ebene ZAX, welche ſich um die gerade AX drehet, wodurch AZ die Oberfläche eines runden Körpers beſchreibt. Man ziehe PM, QN ſenkrecht auf AX, und Mm parallel mit PQ, ferner die Chorde MN, und die berührende TM in M, welche QN in n ſchneidet. Iſt MN gegen AX concav, ſo fällt n in die Verlängerung von QN; iſt MN convex, ſo liegt n zwiſchen N und m. Es ſey $AP = x$; $PQ = \Delta x$; $MP = y$; $Nm = \Delta y$; und $mn = u\Delta x$, wo u eine Zahl iſt, der Exponens des Verhältniſſes $PT : PM$, wenn PT die Subtangente für den Punct M iſt. Die von der Chorde MN beſchriebene Fläche iſt $= 2\pi (y + \frac{1}{2}\Delta y) V(\Delta x^2 + \Delta y^2$; die von der Linie Mn beſchriebenen iſt $= 2\pi (y + \frac{1}{2}u\Delta x) V(\Delta x^2 + u^2\Delta x^2)$. Beide verhalten ſich wie

$$(y + \tfrac{1}{2}\Delta y) V(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} : (y + \tfrac{1}{2}u\Delta x) V(1 + u^2).$$

Die Gränze dieſes Verhältniſſes iſt das von $1 : 1$. Denn die Gränze von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ iſt $= u$, (berührende Linie, 12.), und die Gränze der Verhältniſſe, $y + \frac{1}{2}\Delta y : y$, und . .

$y + \frac{1}{2}u\Delta x : y$, iſt auch $= 1 : 1$, daher auch die von den vorangehenden Gliedern dieſer Verhältniſſe.

Die von dem Bogen AM beſchriebene Oberfläche ſey $= S$, die von dem Bogen MN beſchriebene $= \Delta S$. Da bey einem concaven Bogen ΔS zwiſchen die von der Chorde und von Mn beſchriebenen Oberflächen fällt, und dieſe ſich ohne Ende einander nähern, ſo iſt auch das Gränzverhältniß von ΔS und der von der Chorde MN beſchriebenen Kegelfläche das Verhältniß der Gleichheit. Bey einem convexen Bogen iſt die von demſelben beſchriebene Oberfläche größer als jede der von den beiden geraden Linien beſchriebenen. Dieſe können ſich aber nicht einander nähern, ohne zugleich jener ſich zu nähern, und zuletzt ihr gleich zu werden. Folglich iſt, die für Gränzverhältniſſe gehörigen Bezeichnungen gebraucht, $dS = 2\pi y \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, oder, weil $dx : \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = 1 : \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$ iſt, $\frac{dS}{dx} = 2\pi y \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$. Dividirt man auf beiden Seiten mit einer willkührlichen, aber beſtimmten Größe h, um das Differential der Oberfläche mit dem Differential einer Fläche zu vergleichen, ſo iſt $\frac{dS}{h\,dx} = \frac{2\pi y}{h} \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$. Doch braucht dieſe Größe h nur in Gedanken zugeſetzt zu werden.

Der Bogen AM ſey $= s$, ſo iſt $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, oder $\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$; alſo iſt $dS = 2\pi y\,ds$.

Die Oberfläche eines runden Körpers zu finden, hat man nun folgendergeſtalt zu verfahren. Aus der Gleichung zwiſchen den rechtwinklichten Coordinaten x, y, ſuche man den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx} = p$, ſo iſt . . $dS = 2\pi y\,dx \sqrt{(1 + p^2)}$. Wird in dieſer Function

y durch x ausgedruckt, ſo wird durch die Integration S erhalten.'

Oder man nenne $\frac{dx}{dy} = q$, ſo iſt . . . .

$dS = 2\pi y dy \sqrt{(1 + q^2)}$, worin alles durch y ausgedruckt werden muß.

Exempel. I. Es ſey AM ein Kreisbogen mit dem Halbmeſſer a beſchrieben. Die Gleichung für den Kreis iſt $2ax - xx = yy$; alſo $adx - xdx = ydy$,

und $p = \frac{a-x}{y}$; daher $1 + p^2 = \frac{yy + aa - 2ax + xx}{yy}$

$= \frac{a^2}{y^2}$. Alſo iſt $dS = 2\pi a dx$, und $S = 2\pi a x$,

wenn die Oberfläche mit x zugleich anfängt.

Der Abſchnitt der Kugelfläche von A bis M iſt dem Sinusverſus AP proportional; die Kugelzone zwiſchen zwey mit PM, QN in irgend einem Abſtande von einander beſchriebenen Kreiſen dem zugehörigen Unterſchiede der Sinusverſus AP und AQ.

Man ziehe die Chorde AM; ſo iſt (am Kreiſe) $2ax = AM^2$, alſo iſt der Kugelfläche Abſchnitt $S = \pi . AM^2$, das iſt dem Kreiſe mit dem Halbmeſſer AM. Die Oberfläche der Halbkugel iſt alſo $= 2\pi aa$; der ganzen Kugel $= 4\pi aa$.

Exempel. II. Die beſchreibende Linie ſey eine Parabel, die ſich um ihre Axe dreht. Die Gleichung iſt $ax = yy$, wenn a der Parameter iſt. Die Differentialgleichung iſt

$adx = 2ydy$, alſo $p = \frac{a}{2y}$; $1 + p^2 = \frac{4yy + aa}{4yy}$

$= \frac{4ax + aa}{4yy}$: alſo $dS = \pi dx \sqrt{(4ax + aa.)}$ Daraus iſt $S = \frac{\pi(4ax + aa)^{\frac{3}{2}}}{6a} +$ Conſt. (Integralfor-

meln, 4.). Das Integral ſey $= 0$; wenn $x = 0$ iſt. Der veränderliche Theil des Integrals iſt $= \frac{1}{6}\pi aa$, für $x = 0$, alſo iſt Conſt $= -\frac{1}{6}\pi aa$, und demnach die Oberfläche des paraboliſchen Konoids,

$$S = \frac{1}{6}\pi \left(\frac{(4ax + aa)^{\frac{2}{3}}}{a} - aa \right).$$

Exempel. III. Die beſchreibende Linie ſey wiederum eine Parabel, aber die Axe der Drehung ſey die Linie AY, welche die Parabel in dem Scheitel A berührt. Die Abſciſſe auf der Drehungs-Axe genommen iſt $AR = y$, die Ordinate $MR = x$. Daher iſt das Differential der von AM um AR beſchriebenen Oberfläche, $dS = 2\pi x \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = 2\pi x dx \sqrt{(1 + p^2)}$ $= \pi dx \sqrt{(4x^2 + ax)}$. Man ſetze $a = 8b$, ſo iſt $dS = 2\pi dx \sqrt{(2bx + x^2)}$. Die Integration giebt

$$S = \pi(b+x)\sqrt{(2bx+x^2)} - \pi b^2 \int \frac{dx}{\sqrt{(2bx+xx)}} + C.$$

(Integralformel. 37.). Es iſt $\int \frac{dx}{\sqrt{(2bx + xx)}}$

$$= \log nat \frac{b + x + \sqrt{(2bx + xx)}}{const.}.$$ (Integral-Form. 35.). Die Conſt. in dem logarithmiſchen Integral iſt $= b$. damit für $x = 0$ die Zahl zu dem Logarithmen $= 1$, und der Logarithme dadurch $= 0$ werde. Das algebraiſche Integral bedarf keiner Conſtans. Alſo iſt

$$S = \pi(b + x)\sqrt{(2bx + x^2)} \; \ldots \ldots$$
$$- \pi b^2 \log nat \frac{b + x + \sqrt{(2bx + x^2)}}{b}.$$

Man ſetze $b + x = \frac{b}{\cos\varphi}$, ſo iſt $\sqrt{(2bx + xx)}$

$= b \tan \varphi$, und $b + x + \sqrt{(2bx + xx)} =$
$\frac{b(1 + \sin \varphi)}{\cos \varphi} = b \tan (45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)$; auch . . .

$(b+x)\sqrt{(2bx + xx)} = \frac{bb \tan \varphi}{\cos \varphi}$

$= bb \tan \varphi . \sec \varphi$. Alſo iſt

$S = \pi b^2 (\tan \varphi . \sec \varphi - \log \text{nat.} \tan (45^\circ + \frac{1}{2}\varphi))$

oder auch

$S = \pi b^2 (\tan \varphi . \sec \varphi + \log \text{nat} \tan (45^\circ - \frac{1}{2}\varphi))$,

weil das Product der Tangenten von Winkeln, deren Summe 90 Grad ausmacht, die Einheit giebt, daher hier ihre Logarithmen gleich und entgegen geſetzt ſind.

Die Rechnung in Käſtners Analyſis des Unendlichen S. 696 ff. hat eine andre Form als die hier geführte. Zuletzt iſt ein Fehler begangen, und $\frac{1}{4}$ ſtatt $\frac{1}{2}$ geſetzt. Daher muß der logarithmiſche Theil das Vorzeichen + erhalten.

Exempel. IV. Die Linie AZ ſey eine Hyperbel, die ſich um ihre Axe AX drehet; es wird die Oberfläche des konoidiſchen Körpers geſucht.

Die halbe Haupt-Axe der Hyperbel ſey $= a$, die halbe conjugirte $= b$; die Abſciſſe von dem Mittelpuncte aus genommen ſey $= x$, die Ordinate $= y$; ſo iſt die Gleichung für beide, $a^2 y^2 = b^2 x^2 - a^2 b^2$.

Daraus folgt die Differentialgleichung $a^2 y dy = b^2 x dx$,

und $p = \frac{b^2 x}{a^2 y}$, alſo $1 + p^2 = \frac{a^4 y^2 + b^4 x^2}{a y^2}$

$= \frac{(a^2 + b^2) b^2 x^2 - a^4 b^2}{a^4 y^2}$.

Setzt man $a^2 + b^2 = e^2$, ſo iſt $1 + p^2 = \frac{b^2 (c^2 x^2 - a^4)}{a^4 y^2}$,

und $dS = \frac{2\pi b}{aa} dx \sqrt{(c^2 x^2 - a^4)}$.

Es iſt $\int dx \sqrt{(c^2 x^2 - a^4)} = \frac{1}{2} x \sqrt{(c^2 x^2 - a^4)}$
$- \frac{1}{2} a^4 \int \frac{dx}{\sqrt{(c^2 x^2 - a^4)}}$, und $\int \frac{dx}{\sqrt{(c^2 x^2 - a^4)}}$
$\int \frac{dx}{c\sqrt{(x^2 - a^4 : c^2)}} = \frac{1}{c} \text{log. nat.} \frac{x + \sqrt{(x^2 - a^4 : c^2)}}{\text{const}} =$
$\frac{1}{c} \text{log. nat.} \frac{cx + \sqrt{(c^2 x^2 - a^4)}}{c.\,\text{const}}$ (Integr Formel, 36.30)

Beide Integrale ſollen für $x = 0$ Null ſeyn, alſo iſt die Conſtans des algebraiſchen Integrals $= -\frac{1}{2} a \sqrt{(c^2 a^2 - a^4)} = -\frac{1}{2} a^2 b$. In dem logarithmiſchen Integral muß für $x = a$ die Zahl $= 1$ ſeyn, alſo iſt $\frac{ca + ab}{c} = \text{const}$. Folglich iſt

$$S = \frac{\pi b}{aa} (x \sqrt{(c^2 x^2 - a^4)} - a^2 b)$$
$$- \frac{\pi a^2 b}{c} \text{log nat.} \frac{cx + \sqrt{(c^2 x^2 - a^4)}}{a(b + c)} \; V$$

Man ſetze $\frac{cx}{aa} = \sec\varphi$, ſo iſt $\frac{c^2 x^2 - a^4}{a^4}$ $= \sec\varphi^2 - 1 = \tang\varphi^2$, und $cx + \sqrt{(c^2 x^2 - a^4)}$ $= aa\ (\sec\varphi + \tang\varphi) = aa\,\text{tg}(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)$, nach Goniometrie (43.). Alſo iſt

$$S = \frac{\pi b}{c} (a^2 \text{tg}\,\varphi \sec\varphi - bc) - \frac{\pi a^2 b}{c} \text{l. n.} \frac{a\,\text{tg}(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)}{b + c}$$

Man ſetze den Winkel der Aſymptoten mit der Axe $= \alpha$; ſo iſt $\frac{b}{a} = \tang\alpha$; $\frac{c}{a} = \sec\alpha$;

$\frac{bc}{aa}$ tang α. ſec α; $\frac{b+c}{a} =$ tang α + ſec α

$=$ tang $(45° + \frac{1}{2}\alpha)$; $\frac{b}{c} = \sin\alpha$. Daraus iſt nun

$$S = \pi a^2 \sin\alpha\, (\text{ſec}\,\varphi.\ \text{tang}\,\varphi - \text{ſec}\,\alpha.\ \text{tang}\,\alpha)$$

$$- \pi a^2 \sin\alpha.\ \log\text{nat}\ \frac{\text{tg}\,(45° + \frac{1}{2}\varphi)}{\text{tg}\,(45° + \frac{1}{2}\alpha)}.$$

Exempel V. Der hyperboliſche Bogen AM drehe ſich um AY, die berührende im Scheitel. Nun iſt $dS = 2\pi x \sqrt{}(dx^2 + dy^2) = 2\pi x\, dy \sqrt{}(1 + q^2)$, wo $q = \frac{dx}{dy}$ iſt. Es iſt $q = \frac{a^2 y}{b^2 x}$, und . . . .

$$1 + q^2 = \frac{a^4 y^2 + b^4 x^2}{b^4 x^2} = \frac{a^4 y^2 + a^2 b^2 y^2 + a^2 b^4}{b^4 x^2}$$

$= \frac{a^2 (c^2 y^2 + b^4)}{b^4 x^2}$. Demnach $dS = \frac{2\pi a\, dy}{b^2} \sqrt{}(c^2 y^2 + b^4)$.

Es iſt $dy\, (c^2 y^2 + b^4) = \frac{1}{2} y \sqrt{}(c^2 y^2 + b^4)$

$+ \frac{1}{2} b^4 \int \frac{dy}{\sqrt{}(c^2 y^2 + b^4)}$; und $\int \frac{dy}{\sqrt{}(c^2 y^2 + b^4)}$

$= \frac{1}{c} \log\text{nat}\ \frac{y + \sqrt{}(y^2 + b^4 : c^2)}{\text{conſt}}$ $\sqrt{}$

Alſo iſt

$$S = \frac{\pi a y}{b^2} \sqrt{}(c^2 y^2 + b^4) + \frac{\pi a b^2}{c}\ \text{l. n.}\ \frac{cy + \sqrt{}(c^2 y^2 + b^4)}{b^2}$$

wo die Conſt. in dem logarithmiſchen Integral gehörig beygefügt iſt.

Man ſetze $\frac{cy}{bb} =$ tang ω, ſo iſt $\frac{c^2 y^2 + b^4}{b^4}$ $=$ tang $\omega^2 + 1 =$ ſec ω^2; auch ſey wiederum der Winkel der Aſymptoten mit der Axe $= \alpha$, ſo

iſt $\frac{ay}{b^2} = \frac{a}{c}$ tang ω = coſ α. tang ω. Dadurch wird

$$S = \pi b^2 \operatorname{coſ} \alpha (\operatorname{tang} \omega . \operatorname{ſec} \omega + \operatorname{lognat} (\operatorname{tang} \omega + \operatorname{ſec} \omega))$$

oder

$$S = \pi b^2 \operatorname{coſ} \alpha (\operatorname{tang} \omega . \operatorname{ſec} \omega + \operatorname{lognat.tang} (45^\circ + \tfrac{1}{2}\omega)).$$

Von der Complanation eines Sphäroids, ſowohl des gedruckten als des geſtreckten, mit der Anwendung auf die Erde, in dem Artikel Sphäroid.

Man ziehe auf die berührende MT die ſenkrechte MN, welche die Abſciſſenlinie in N ſchneidet. Die Subnormale PN iſt $= \frac{y\,dy}{dx}$ (berührende Linie, 42.); alſo

$$MN = \sqrt{(y^2 + \frac{y^2\,dy^2}{dx^2})} = y\sqrt{(1 + p^2)}.$$ Man

ſetze MN = z, ſo iſt das Differential der von AM beſchriebenen runden Oberfläche $= 2\pi z\,dx$. Man verlängere jede Ordinate PM der krummen Linie AMZ, bis ſie der Normale MN gleich iſt, ſo entſteht aus den Endpuncten der auf die Abſciſſenlinie ſolchergeſtalt geſtellten MN eine zweyte krumme Linie, von deren Area das Differential = z dx iſt. Für dieſelbe Abſciſſe beider Curven verhält ſich die von AM beſchriebene Oberfläche zu der Area der zweyten Curve, wie $2\pi : 1$, oder wie der Umfang eines Kreiſes zu deſſen Halbmeſſer.

Dieſer Satz iſt für die Geſchichte der Mathematik merkwürdig. Leibnitz erzählt, daß derſelbe ihn auf die Differentialrechnung geleitet habe. Ganz in dem Anfange ſeines mathematiſchen Studiums, ſagt er, ſey ihm bey dem Anblick eines gewiſſen Beweiſes vom der Größe einer Kugelfläche plötzlich ein großes Licht aufgegangen. Er habe eingeſehen, daß überhaupt eine Figur, die von den Normalen einer Curve, wenn ſie auf die Axe ſenkrecht geſtellt werden, erzeugt wird, (wie am Kreiſe von den Halbmeſſern), der Oberfläche des runden, durch die Umdrehung

jener Figur um ihre Axe entſtandenen Körpers proportional ſey. Dieſer Satz habe ihm ſehr viel Vergnügen gemacht, und er habe ſogleich das charakteriſtiſche Dreyeck erdacht, deſſen Seiten indiviſibilia, oder genauer zu reden unendlich kleine, oder Differentialgrößen ſind, woraus er eine Menge Lehrſätze ohne Mühe hergeleitet habe. De Geometria recondita, cet. Acta Er. 1686. Opp. Tom. III. p. 193.

Complement, Ergänzung, iſt überhaupt, was einer Größe zugeſetzt werden muß, um ein gewiſſes Ganzes derſelben auszumachen.

Complement eines eigentlichen **Bruchs** iſt der Unterſchied deſſelben von der Einheit.

Arithmetiſches Complement eines Logarithmen iſt der Unterſchied deſſelben von 1 oder von 10. z. B. das Complement von log. 4,75 = 0,6766936 iſt 0,3233064. Das Complement von log. 475 = 2,6766936 iſt 7,3233064. Man mag auch das Complement eines Logarithmen, der größer als 1 iſt, in Beziehung auf die Einheit nehmen, wenn dieſer 10 geliehen werden, die man aber als ſubtractiv hinter dem Logarithmen anzeichnen, oder ſich als geliehen gedenken muß. So iſt das Complement des Logarithmen 2,6766936 dieſes; 7,3233064 — 10, oder ſchlechtweg 7,3233064. Der Logarithme eines eigentlichen Bruchs wird am bequemſten als das Complement des umgekehrten uneigentlichen angeſehen, und auf die angezeigte Art geſchrieben. So iſt $\log \frac{69}{8567} = 7{,}9060203-10$ da $\log \frac{8567}{69} = 2{,}0939797$ iſt. Die beiden Brüche mit einander multiplicirt geben zum Producte die Einheit; die Summe ihrer Logarithmen iſt = 0 = log. 1. Der Logarithme der Cotangente eines Winkels iſt das

Complement des Logarithmen der Tangente; ſo ſind auch die Logarithmen eines Sinus und einer Coſecante, eines Coſinus und einer Secante ſich gegenſeitig Complemente, in Beziehung auf die Einheit, wenn der Halbmeſſer = 1 geſetzt wird. Wird er zu 10000 Millionen genommen, ſo ſind ſie Complemente in Beziehung auf 20. Die Complemente der Logarithmen gewähren die Bequemlichkeit, daß man ſie zu andern Logarithmen addiren kann, wo die Logarithmen ſelbſt zu ſubtrahiren ſind, ſo daß man ſtatt zwey verſchiedener Operationen nur eine anwendet.

Complement in einem Parallelogramm ſind die beiden Parallelogrammen, welche mit den beiden, um die Diagonale an einem Puncte derſelben gelegten, Parallelogrammen das ganze Parallelogramm ausmachen. Sie ſind einander gleich. S. Euklids Elemente I. 43.

Complement eines Winkels oder Kreisbogens iſt der Unterſchied des rechten Winkels oder des Quadranten und jenes. z. B. von 40° ſind 50° das Complement. Das Complement eines Winkels zu 180° nennt man zur Unterſcheidung lieber Supplement, oder gewöhnlicher den Nebenwinkel

Complement kommt auch in der Aſtronomie, der Schifffahrt und der Befeſtigungskunſt vor.

Complex heißt in der Analyſis eine Größe, die aus mehreren, durch die Vorzeichen + und — verbundenen Theilen, zuſammen geſetzt iſt, wie $a + b - c$.

Complexion, iſt der Inbegriff mehrerer, auf irgend eine Art (in der Combinationslehre durch bloße Nebeneinanderſtellung) verbundenen Dinge ſie mögen nun alle verſchieden, oder einige derſelben einerley ſeyn. Der Ausdruck iſt ein Synonymum von Combination, welches letztere einen etwas weitern Umfang hat, da es zugleich den Nebenbegriff von Auswahl enthält, weswegen auch van Schooten und Jacob Bernoulli die Combinationen Electiones genannt haben, dagegen Complexion jedes einzelne Pro-

duct der Auswahl anzeigt. Leibnitz hat den Ausdruck, Complexion, aufgebracht in der Abhandlung de arte combinatoria, Lipſiae 1668. Er iſt etymologiſch richtiger als Combination, wiewohl er doch nicht die Unionen mit anzeigt. In dem Artickel, Combination, habe ich, wegen der nahen Beziehung auf die combinatoriſche Analyſis, bloß den Ausdruck, Combination, für die Verbindung mehrerer Dinge aus einer gegebenen Anzahl, mit Einſchluß der einzelnen und aller zuſammen, gebraucht. Die deutſchen neuern Analyſten gebrauchen häufig den Ausdruck, Complexion; die Ausländer nur, Combination, (ſ. Combination.).

Compoſitio iſt I. daſſelbe, was mit einem griechiſchen Worte Syntheſis heißt, ſ. Analyſis als Methode, und, Synthetiſche Methode. II. compoſitio motus, die Erzeugung einer Bewegung durch zwey oder mehrere beſondere Bewegungen, ſ. Bewegung. in der zweyten Abtheilung III. Compoſitio rationum, die Entſtehung eines Verhältniſſes aus zwey oder mehreren, gleichen oder ungleichen, Verhältniſſen, ſ. Verhältniß.

Concav und **Convex, hohl** und **erhaben,** ſind verbundene Begriffe, da was nach einer Gegend hin hohl iſt, nach der andern hin erhaben iſt. Ein Bogen einer krummen Linie iſt concav nach einer Gegend, wenn der Durchſchnitt der berührenden an den Endpuncten nach der entgegengeſetzten hin liegt, und dieſes für je zwey Puncte dieſes Bogens ſtatt findet. Der Bogen iſt convex, nach einer Gegend, wenn der Durchſchnitt der berührenden nach eben derſelben hin liegt.

Es ſey Mm (Fig. 76 und 77. Tab. V.) ein Bogen einer krummen Linie Ll, und AB die Abſciſſenlinie. Die berührende in M iſt Dd, in m iſt es Ee, ihr Durchſchnittspunct iſt F. In Fig. 76 iſt der Bogen Mm concav gegen AB, in Fig. 77. iſt Mm convex gegen AB.

2. Man ziehe auf die berührenden die Normalen MR, mR, welche ſich in R ſchneiden, ſo iſt der Bogen Mm nach AB hin concav, wenn der Durchſchnittspunct R nach derſelben Seite, wie AB, hin liegt; convex, wenn beide auf entgegengeſetzten Seiten des Bogens liegen.

3. Die Normalen ſchneiden die Abſciſſenlinie in Q und q. Werden die Abſciſſen von A her genommen, und folgt die größere Ordinate auf die kleinere, ſo iſt für einen concaven Bogen (Fig. 76.) der ſpitze Winkel AQM kleiner als Aqm. Nimmt man die Abſciſſen von B her, wobey die größere Ordinate vor der kleinern vorhergeht, ſo iſt ebenfalls der vorhergehende ſtumpfe Winkel Bqm kleiner als der nachfolgende BQM. Die Tangente des kleinern ſtumpfen Winkels iſt zwar, abſolut genommen, größer als die des größern ſtumpfen, allein da beide negativ ſind (Goniometrie, 8.), ſo wird tang Bqm als die kleinere, und tang BQM als die größere betrachtet (ſ. entgegengeſetzte Größen), daher auch hier die Tangente des vorhergehenden Winkels der Abſciſſenlinie mit der Normale, auf der Seite des Anfangspunctes der Abſciſſen, kleiner iſt als die Tangente des nachfolgenden Winkels, eben ſo wie für ſpitze Winkel.

Für einen convexen Bogen (Fig 77.) iſt hingegen die Tangente des vorhergehenden Winkels der Abſciſſenlinie mit der Normale, auf der Seite des Anfangspunctes der Abſciſſen, größer als die Tangente des nachfolgenden Winkels, in beiden Fällen, die Veränderungen der Coordinaten mögen gleichnamig oder ungleichnamig ſeyn.

4. Damit der mögliche Wechſel des Concaven und Convexen an einem endlichen Bogen nicht in die Frage komme, ſo muß der Bogen unendlich klein genommen werden. Die Frage, ob die krumme Linie in einem Puncte M concav oder convex ſey, zu beantworten, muß man unterſuchen, ob das Differential der Tangente des Winkels, welchen die Normale mit der Abſciſſenlinie, nach dem Anfangspuncte der Abſciſſen hin macht, poſitiv oder negativ iſt.

5. Es ſey AP = x; PM = y, und pm größer als PM, ſo iſt die Tangente des W. PMD = $\frac{dx}{dy}$ (ſ. berührende Linie, 14.); alſo auch tang PQM = $\frac{dx}{dy}$. Die krumme Linie iſt in M gegen die Abſciſſenlinie concav, wenn das Differential des Quotienten $\frac{dx}{dy}$ poſitiv iſt, und convex, wenn dieſes Differential negativ iſt. Iſt der Quotient $\frac{dx}{dy}$ negativ, d. i. wenn die Ordinaten abnehmen, indem die Abſciſſen wachſen, ſo bleibt dieſe Beſtimmung unverändert, wofern nur x und y bei poſitiv ſind, wie hier angenommen iſt.

6. Da für einen endlichen durchaus concaven oder convexen Bogen die Lage des Durchſchnittspunkts R in Abſicht auf Mm nicht von der Größe des Unterſchiedes Pp der beiden Abſciſſen, AP, Ap, abhängt, ſo kommt es auch bey einem unendlich kleinen Bogen nicht auf das Verhältniß der Differentiale der Abſciſſen gegen einander an. Es muß daher dx unveränderlich geſetzt werden, damit nicht die Veränderungen dieſes Differentials Einfluß auf die Qualität des Differentials $\frac{dx}{dy}$ haben mögen.

Es iſt nun $d.\frac{dx}{dy} = -\frac{dx\,d^2y}{dy^2}$, oder

$$d.\frac{dx}{dy} = -\frac{dx^2}{dy^2}.\frac{d^2y}{dx}.$$

7. Das Differential, $\frac{d^2y}{dx}$, zu finden, ſuche man aus der Gleichung zwiſchen x und y zuerſt den Quotienten $\frac{dy}{dx}$

und differentiire dieſen, worauf man in dem Werthe des Differentials, wenn dy darin vorhanden iſt, für dieſes ſeinen Werth durch dx ſetzt. Dadurch erhält $\frac{d^2y}{dx}$ die Form $P\,dx$, wo P eine Function x von und y, oder auch einer von beiden allein iſt.

8. Ob die Abſciſſe poſitiv oder negativ iſt, macht keinen Unterſchied bey der gegenwärtigen Unterſuchung. Die Folge der Abſciſſen wird darum nicht umgekehrt, weil ſie negativ werden. So wie bey poſitiven x auf $+x$ die Abſciſſe $+x+\Delta x$ folgt, ſo muß man bey negativen auf $-x$ die Abſciſſe $-x+\Delta x$ folgen laſſen. Die Differenz Δx, und ſo auch das Differential dx, ſind immer additiv.

9. Für negative y ſind die Winkel AQM und Aqm (oder Bqm, BQM) negativ, alſo auch ihre Tangenten, und der Unterſchied dieſer Tangenten, nämlich in Beziehung auf die Lage, die für poſitive Winkel Statt hätte. Dadurch wird das Differential von $\frac{dx}{dy}$, dem für poſitive Ordinaten entgegengeſetzt, und daher wird auch der Differentialquotient $\frac{d^2y}{dx}$, ſo wie $\frac{d^2y}{dx^2}$ oder P das Entgegengeſetzte von dem Werthe für dieſelben Ordinaten als poſitiv betrachtet.

Oder man lege eine neue Abſciſſenlinie der anfänglichen parallel in dem Abſtande c, größer als eine negative Ordinate y abſolut genommen, und ſetze die Ordinaten zu der neuen Abſciſſenlinie, $z = c + y$. Alsdann iſt z poſitiv, wo jene y negativ iſt, und $\frac{d^2z}{dx^2}$ zeigt eine entgegengeſetzte Lage des Bogens an als $\frac{d^2y}{dx^2}$ angiebt.

10. Für poſitive y iſt eine krumme Linie nach der Axe der Abſciſſen hin concav, wo $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ iſt, convex, wo dieſer Quotient poſitiv iſt. Denn in jenem Falle wächſt die Tangente $\frac{dx}{dy}$ des Winkels der Normale mit der Abſciſſenlinie, in dieſem nimmt ſie ab.

Für negative y iſt die krumme Linie nach der Abſciſſenlinie hin concav, wo $\frac{d^2y}{dx^2}$ poſitiv iſt, convex, wo dieſer Quotient negativ iſt. Denn hier werden die Winkel der Normalen mit der Abſciſſenlinie negativ, und ein negatives Differential zeigt daher eine abſolute Zunahme (Concavität), ſo wie ein poſitives eine abſolute Verminderung (Convexität) anzeigt.

11. Man kann beide Regeln zuſammenziehen in folgende: Wo die Ordinate und der Quotient $\frac{d^2y}{dx^2}$ gleichnamig ſind, da iſt die Curve gegen die Abſciſſenlinie convex; wo beide ungleichnamig ſind, da iſt ſie concav.

13. Exempel. I. Die krumme Linie ſey eine Parabel, deren Gleichung iſt $ax = yy$. Hieraus iſt die Differentialgleichung, $a\,dx = 2y\,dy$, und die vom zweyten Grade, $o = 2dy^2 + 2y\,d^2y$, oder $o = \frac{a^2dx^2}{4y^2} + yd^2y$, alſo $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a^2}{4y^3}$. Dieſer Quotient und die Ordinaten ſind ungleichnamig und daher iſt die ganze Linie gegen die Axe concav.

13. Exempel. II. Die krumme Linie ſey eine Hy-

perbel; die Abſciſſenlinie werde von dem Mittelpuncte aus auf der einen Aſymptote genommen; die Ordinaten ſeyn der andern Aſymptote parallel, ſo iſt die Gleichung, $xy = ab$. Weil die normalen Ordinaten den ſchief liegenden proportional ſind, ſo gilt die obige Regel auch für die letztern. Es iſt $ydx + xdy = 0$, und ferner $dydx + dxdy + xd^2y = 0$. Daraus iſt $\frac{d^2y}{dx^2} = + \frac{2y}{x^2}$. Die Hyperbel iſt gegen ihre Aſymptote durchaus convex.

14. Exempel III. Die allgemeinſte Gleichung für den Kreis mit rechtwinklichten Coordinaten iſt $(x - b)^2 + (y - c)^2 = a^2$, wo a der Halbmeſſer iſt. Hieraus wird erhalten, $(x - b)dx + (y - c)dy = 0$, und aus dieſer Gleichung die folgende,

$$dx^2 + dy^2 + (y - c)\, d^2y = 0.$$

Mittelſt der Subſtitution des Werthes von dy durch dx wird

$$\left(1 + \frac{(x - b)^2}{(y - c)^2}\right) dx^2 = -(y - c)\, d^2y.$$

Alſo iſt, mit Zuziehung der urſprünglichen Gleichung,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{a^2}{(y - c)^3}.$$

Die Linie c iſt der Abſtand des Mittelpunctes von der Abſciſſenlinie, auf der Seite der poſitiven Ordinaten. Liegt der ganze Kreis auf dieſer Seite der Abſciſſenlinie, ſo iſt der Bogen concav, wo $y > c$, und convex, wo $y < c$ iſt. Wird der Kreis von der Abſciſſenlinie geſchnitten, ſo iſt der Bogen concav, wo $y > c$; convex, wo y poſitiv und kleiner als c iſt; concav für negative y. Man ſieht hier ſehr gut, wie es gleichgültig iſt, ob die Abſciſſen poſitiv oder negativ genommen werden.

15. Exempel. IV. Es ſey $y = ax - bx^2 + cx^3$, ſo iſt $dy = adx - 2bxdx + 3cx^2dx$, und $d^2y = (-2b + 6cx)dx^2$, alſo $\frac{d^2y}{dx^2} = 6cx - 2b$.

Wo dieſer Quotient mit y gleichnamig iſt, da iſt die Curve gegen die Abſciſſenlinie convex; wo ſie ungleichnamig ſind, concav. Da für hinlänglich große poſitive (negative) x die Ordinate y poſitiv (negativ) bleibt, ſo ſind beide Schenkel der Curve gegen die Abſciſſenlinie zuletzt convex, und bleiben es. Wo $6cx - 2b = 0$ iſt, da iſt ein Wechſel des Convexen und Concaven, weil für zwey x, deren eines größer, das andere kleiner als $\frac{2b}{6c}$ oder $\frac{b}{3c}$ iſt, die Werthe des Quotienten entgegengeſetzt werden, vorausgeſetzt, daß y ſeine Beziehung nicht ändere.

Wenn die Curve ihre Abſciſſenlinie dreymahl ſchneidet, ſo wechſelt in den Durchſchnittspuncten Convex und Concav nur in Beziehung auf die Abſciſſenlinie; das Concave und Convexe nach derſelben Gegend hin bleibt. Aber in dem Puncte der Curve, für welchen $x = \frac{b}{3c}$ iſt, geſchieht ein Wechſel des Concaven und Convexen nach derſelben Gegend hin genommen.

16. Der Punct der Curve, wo der Wechſel des Concaven und Convexen geſchieht in Rückſicht auf eine und dieſelbe Gegend, bey fortſchreitender Folge der Ordinaten, heißt ein Wendungspunct (punctum flexus contrarii). Für denſelben iſt $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$. Zwey in der ſtetigen Reihe der berührenden einander nächſte fallen hier in eine gerade Linie. Denn für eine gerade Linie iſt $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$. Die Curve und ihre berührende haben hier drey unendlich nahe Ordinaten gemein. Die Curve liegt hier auf beiden Seiten der berührenden.

17. Wenn die Ordinaten aus einem gegebenen Puncte gezogen werden, ſo iſt zu beſtimmen, nach welcher Gegend

hin derjenige Punct liegt, dem ſich der Durchſchnitt zweyer Normalen immer mehr nähert, je näher ſie einander kommen, das iſt, nach welcher Gegend hin der Mittelpunct des Krümmungskreiſes liegt, ſ. Krümmungskreis.

Concentriſch oder **homocentriſch** ſind Kreiſe, die aus einem gemeinſchaftlichen Mittelpuncte beſchrieben ſind. Wenn die Durchmeſſer ſich verhalten wie 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : etc. ſo verhalten ſich die innerſte Kreisfläche und die Kreisringe wie 1 : 3 : 5 : 7 : 9 : etc. ſ. Armilla.

Conchoide des Nikomedes, **Muſchellinie**, iſt eine Linie vom vierten Grade, die eine Aſymptote mit zwey Paaren unendlicher Schenkel hat, auch einen Knoten ſchürzen, oder eine Spitze haben kann. Ihre Conſtruction iſt folgende:

Es ſey XAX (Fig. 78. Tab. V.) eine gerade Linie, und C ein gegebener Punct außer derſelben. Von C aus werde CAB auf dieſe ſenkrecht gezogen, und auf dieſer werden AB und AD einer gegebenen Linie gleich genommen. Durch C ziehe man irgend eine Linie CM, welche AX in R ſchneide, und nehme auf derſelben von R aus RM = AB, wie auch RN = AD = AB, ſo ſind M, N Puncte in der Conchoide. Auf dieſe Art kann man eine beliebige Anzahl Puncte der Linie beſtimmen, und dieſe aus freyer Hand durch einen Zug verbinden. Die Linie mBM heißt die obere Conchoide, die Linie nDN die untere; der Punct C heißt der Pol der Conchoide; die gerade XAX ihre Baſis.

Die Conchoide läßt ſich auch durch ſtetige Bewegung eines Stifts beſchreiben. Man ſetze zwey Liniale CA und XAX rechtwinklicht zuſammen. Das erſtere bekomme in C einen Stift, das andere eine Rinne. Man nehme noch ein Linial CM, welches über C hinaus reiche, und gebe dieſem nach beiden Enden hin einen Einſchnitt, damit es ſich bey der Drehung um den Stift C der Länge nach verſchieben könne. In M, N, R befeſtige man drey

Stifte, in den Entfernungen RM, RN, die der gegebenen Linie wie AB iſt, gleich ſind. Der Stift R iſt beſtimmt, ſich in der Rinne über XAX zu bewegen, und die Stifte in M, N dienen die krumme Linie zu beſchreiben. Nämlich indem das Linial CM von A nach M hin um C gedreht wird, verſchiebt es ſich zugleich nach CM hin, weil der Stift R genöthigt iſt auf AX zu bleiben. Folglich beſchreiben die Stifte M, N die Conchoide.

Nikomedes, ein griechiſcher Geometer, der in dem zweyten Jahrhundert vor Ch. Geb. gelebt haben mag, hat die Conchoide erdacht, um durch ihre Hülfe das berühmte Problem aufzulöſen, wie zwiſchen zwey gegebenen Linien zwey ſtetige Proportionalen zu finden ſeyn. Wie er ſie dazu angewandt hat, welches in der That künſtlich iſt, zeigt Pappus in Collect. mathem. L. III. prop. 5; und Eutocius in Comment. in Archimedem de ſphaera et cyl. L. II. Daraus Reimer in Hiſt. probl. de duplic cubi, p. 169. Nikomedes hat die Conchoide auch gebraucht, einen geradlinichten Winkel in drey gleiche Theile zu theilen. Sein Verfahren kennen wir nicht mehr, da ſeine Schrift über die Conchoide verloren gegangen iſt. Wie es geſchehen kann, ſ. in dem Artikel, Winkeltheilung. Die Alten haben von der Conchoide nur den obern Theil mBM betrachtet, welcher jenſeits der Aſymptote, von dem Pol C aus gerechnet, liegt.

Die Conchoide gebraucht Newton zur geometriſchen Aufloſung der Gleichungen vom dritten und vierten Grade, de aequationum conſtructione lineari, in Arithm. univ. p. 115. ff. Er wählt ſie, weil ſie in Abſicht der Conſtruction nach dem Kreiſe die einfachſte unter allen krummen Linien iſt, wenn ſie gleich, algebraiſch betrachtet, von einem höhern Grade iſt, als die Kegelſchnitte.

Vignola hat die Conchoide zur Verjüngung der Säulenſchäfte angewandt, wie es ſcheint, ohne zu wiſſen, daß die Alten ſie gekannt haben. Er zeichnet nur einzelne Puncte, die er durch einen freyen Zug verbindet. Blondel zeigte hernach, daß die Verjüngungs-Linie die Con-

choide der Alten ſey, und machte den Baumeiſtern das Inſtrument ſie zu zeichnen, welches Nikomedes erſonnen hatte, bekannt. Cours d'Architecture par d' Aviler, p. 116. edit. 1750.

Die Conchoide iſt zur Meſſung der Fäſſer angewandt. Müller, ein Ingenieur und Viſirer zu Gröningen nahm an, daß die Linie, nach welcher die Faßdauben gekrümmt ſind, der obern Conchoide MBm nahe komme, ſo daß ein Faß durch die Umdrehung des Theils MBm um den Theil Pp der Linie XAX erzeugt werde, wo AB den Halbmeſſer des Faſſes durch das Spuntloch, und PM = pm der Halbmeſſer der Böden iſt. Müllers Verſuch den Inhalt der Fäſſer durch Anwendung der Muſchellinie zu finden. Aus dem Holländ. Leipzig 1784. Erinnerungen wegen der fehlerhaften Rechnung hat Oberreit gemacht im Leipziger Magazin für die Mathematik, 1787. II. VII.

Die Gleichung für die Conchoide iſt leicht gefunden. Es ſey AB = a; CA = b; AP = x; PM = y, ſo daß die poſitiven Ordinaten y für die obere Conchoide MBm gelten. Man ziehe CM, ſo iſt CA : AR = PM : PR; und daraus CA + PM : AR + PR = PM : PR. Alſo iſt $PR = \frac{xy}{b+y}$ Da RM = a,

ſo iſt $\frac{x^2 y^2}{(b+y)^2} + y^2 = a^2$,

und die geordnete Gleichung für die Conchoide iſt

$$\begin{aligned} y^4 + 2by^3 + x^2y^2 &- 2a^2by - a^2b^2 = 0. \\ - a^2 &\,,, \\ + b^2 &\,,, \end{aligned}$$

Eine Ordinate an der untern Conchoide QN ſey = z, die Abſciſſe AQ = u; ſo iſt $QR = \frac{uz}{b-z}$, und $\frac{u^2 z^2}{(b-z)^2} + z^2 = a^2$. Die Gleichung zwiſchen u und

z iſt in der zwiſchen x und y begriffen, wenn y negativ genommen wird.

Für jede Abſciſſe hat die Ordinate y entweder zwey oder vier Werthe. Sie hat wenigſtens zwey Werthe, da die Linie CM ſich ſo lange drehen kann, bis daß ſie der AX parallel iſt. Alsdann iſt x unendlich groß, und $y = 0$. Die Abſciſſenlinie AX iſt die Aſymptote der obern und untern Conchoide. Dieſe nähern ſich immer mehr einer koniſchen gleichſeitigen Hyperbel. Denn die Gleichung, welcher ſich ihre Gleichung immer mehr nähert, iſt $x^2 y^2 = a^2 b^2$ oder $xy = ab$, das iſt die für eine Hyperbel, deren Abſciſſen auf einer ihrer Aſymptoten und die Ordinaten parallel mit der andern genommen werden. Dieſe macht alſo mit jener einen rechten Winkel. Die Hyperbel iſt daher eine gleichſeitige, an welcher das Quadrat der halben Axe $= 2ab$ iſt.

Die Gleichung für die Conchoide kann auch vier Ordinaten für dieſelbe x geben, nämlich, wenn a größer als b iſt. Dies iſt der Fall in der Conchoide (Fig. 79) wo AC kleiner als AB iſt. Hier reicht in dem Anfange der Abſciſſen die Ordinate in dem untern Theile der Conchoide über C hinaus bis D. In der Lage CF der ſich drehenden Linie iſt $EF = EC$. Für alle Lagen zwiſchen CB und CF fällt der Endpunct der die untere Conchoide beſchreibenden Linie über C hinaus, und beſchreibt daſelbſt den Bogen DGC, ſo wie bey entgegengeſetzter Drehung von B nach F ein gleicher Bogen DHC beſchrieben wird. Bey fortgeſetzter Drehung über F hinaus beſchreibt der nach C hin liegende Punct den Zweig CN bis ins Unendliche; ſo wie auf der andern Seite der Zweig Cn beſchrieben wird. Die untere Conchoide ſchürzt bey C einen Knoten. Bey der Drehung nach der einen Seite wird der Theil DGCN, bey der Drehung nach der andern, der Theil DHCn beſchrieben. Es ſey KH die Ordinate, welche den Bogen DHC in H berührt, ſo ſind für eine Abſciſſe, die kleiner als AK iſt, vier Ordinaten vorhanden, die poſitive PM an der obern Conchoide;

und drey negative Pm, eine an dem Zweige CN, und zwey an der Ovale. Eben ſo auf der andern Seite von AD. Die Succeſſion der Vorzeichen in der Gleichung für y zeigt eine einzige poſitive Wurzel an, da nur ein Wechſel vorhanden iſt, das dritte Glied mag das Vorzeichen $+$ oder $-$ haben.

Der Punct C des Knotens iſt ein Doppelpunct, da er zu zwey Zweigen GCN und HCn gehört. Allein wenn auch AC größer iſt als AD, wie in Fig. 78. wodurch die Ovale mit dem Knoten wegfällt, ſo bleibt der Pol C doch ein doppelter, zu der Curve gehöriger (conjugirter) Punct. Denn die Gleichung für die Conchoide wird für $x = 0$ folgende, $y^4 + 2by^3 + (b^2 - a^2)y^2 - 2a^2by - a^2b^2 = 0$. Dieſe hat die Wurzeln, $+a$; $-a$; $-b$; $-b$. Alſo iſt AC eine zu der Abſciſſe $x = 0$ gehörige Ordinate, eben ſo gut, wie AB und AD.

Wenn $a = b$ genommen wird, ſo fällt die Ovale in einen Punct in eine Spitze, zuſammen, die ein **dreyfacher Punct** iſt. Denn die Gleichung iſt nun für $x = 0$ folgende, $y^4 + 2ay^3 - 2a^3y - a^4 = 0$. Dieſe hat eine poſitive Wurzel, $+a$, und drey negative, jede $= -a$. Sie iſt ein Product aus $y - a$ in $(y + a)^3$.

Aus der zuerſt gefundenen Form der Gleichung für die Conchoide folgt $x = + \frac{(b+y)\sqrt{(a^2 - y^2)}}{y}$. Die Conſtruction der Curve zeigt, daß die gerade BD ſie in zwey gleiche und ähnliche Theile theilt, daher zu einer Ordinate, poſitiven oder negativen, zwey gleiche entgegengeſetzte x gehören. Für poſitive y erfordert ein poſitives x das Vorzeichen $+$; für negative y in Fig. 78. und an dem Bogen CN in Fig. 79. das untere Vorzeichen; an der Ovale aber das obere, weil an dieſer die Ordinaten größer als b ſind.

Die Zeichnung giebt zu erkennen, daß die Conchoide Fig. 78.) in B und D, ſo wie die obere, in Fig. 79. bey

B gegen die Abſciſſenlinie concav iſt. Da aber dieſe Linie ſich einer Hyperbel nähert, je weiter ſie fortgeſetzt wird, ſo muß ſie gegen die Abſciſſenlinie convex werden. Es iſt die Frage, wo der Übergang vom Concaven zum Convexen geſchieht. In dem Artikel, Concav und Convex, (II.) iſt gezeigt, daß eine Curve gegen die Abſciſſenlinie convex oder concav iſt, nachdem der Quotient $\frac{d^2 y}{dx^2}$ mit der Ordinate gleichnamig oder ungleichnamig iſt, daher, wo dieſer $= 0$ wird, und ſeine Beziehung auf die Ordinaten wechſelt, der Übergang von dem einen zu dem andern geſchieht, (eb. daſ. 16.).

Aus der Gleichung $x = \frac{(b+y)\sqrt{(a^2 - y^2)}}{y}$

oder $x = (\frac{b}{y} + 1)\sqrt{(a^2 - y^2)}$ folgt $\frac{dx}{dy}$

$= - \frac{a^2 b + y^3}{y^2 \sqrt{(a^2 - y^2)}}$, oder $\frac{dy}{dx} = - \frac{y^2 \sqrt{(a^2 - y^2)}}{a^2 b + y^3}$

Die Differentiation dieſes Quotienten ſich zu erleichtern, ſetze man $y^2 \sqrt{(a^2 - y^2)} = t$, und $a^2 b + y^3 = u$,

ſo iſt $\frac{d^2 y}{dx} = - \frac{u dt - t du}{u^2}$, und $\frac{d^2 y}{dx^2} =$

$\frac{t}{u^2} \cdot \frac{dt}{dy} - \frac{t^2}{u^3} \cdot \frac{du}{dy}$; oder $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{t}{u^2}(\frac{dt}{dy} \quad \frac{t}{u} \cdot \frac{du}{dy})$

Nun iſt $\frac{dt}{dy} = \frac{2a^2 y - 3y^3}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}$, und $\frac{du}{dy} = 3y^2$,

alſo $\frac{dt}{dy} - \frac{t}{u} \cdot \frac{du}{dy} = \frac{2a^2 y - 3y^3}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}$

$- \frac{3y^4 \sqrt{(a^2 - y^2)}}{a^2 b + y^3} = \frac{a^2 y (2a^2 b - 3by^2 - y^3)}{(a^2 b + y^3)\sqrt{(a^2 - y^2)}}$

und $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{a^2 y^3 (2a^2 b - 3by^2 - y^3)}{(a^2 b + y^3)^3}$.

In B, wo $y = + a$ iſt, iſt dieſer Quotient $= - \frac{a}{(a+b)^2}$; in D, wo $y = - a$, iſt derſelbe $= + \frac{a}{(b-a)^2}$ oder $= + \frac{a}{(a-b)^2}$ In beiden Puncten iſt daher die krumme Linie concav gegen die Baſis. In dem Knoten, wo $y = - b$, iſt jener Quotient $= - \frac{2a^2 b}{(a^2 - b^2)^2}$, daher die krumme Linie hier convex iſt.

Es ſey $y^3 + 3by^2 - 2a^2 b = 0$, ſo ſind die Wurzeln dieſer Gleichung die Ordinaten in den Wendungspuncten. Denn die Werthe dieſer Gleichung werden ſich entgegengeſetzt, wenn y größer und kleiner als eine der Wurzeln genommen wird. Die Gleichung kann drey mögliche Wurzeln, oder nur eine haben. Wenn ſie drey mögliche Wurzeln hat, ſo ſind darum nicht drey Wendungspuncte auf derſelben Seite von der Axe CAB vorhanden. Denn die Wurzeln der Gleichung können keine Ordinaten an der Conchoide ſeyn, wenn ſie nicht kleiner als a ſind. Nun iſt das Product der drey Wurzeln $= 2a^2 b$, alſo größer als $2a^3$, und auch als a^3, wenn b größer als a iſt, wie in Fig. 78. In dieſem Falle iſt alſo eine Wurzel der Gleichung größer als a. Iſt $b < a$, wie in Fig. 79, ſo müßte $2a^2 b$ kleiner als a^3, alſo $2b < a$ ſeyn, wenn jede der drey Wurzeln kleiner als a iſt. Wir wollen ſehen, ob bey dieſer Bedingung drey mögliche Wurzeln vorhanden ſind.

Man ſetze $y = z - b$, das iſt, man lege die Abſciſſenlinie durch C parallel mit der anfänglichen, ſo verwandelt ſich die für y gefundene Gleichung in dieſe, $z^3 - 3b^2 z + 2b(b^2 - a^2) = 0$ Wenn dieſe Glei-

chung drey mögliche Wurzeln hat, ſo iſt $4(3b^2)^3$ größer oder ſo groß als $27(2b(b^2-a^2))^2$, (Gleichung III. 13.), das iſt, b^4 größer oder ſo groß als $(b^2-a^2)^2$, oder als $b^4-2a^2b^2+a^4$. Daher iſt $2a^2b^2>$ oder $=a^4$, das iſt $2b^2>$ oder $=a^2$. In dem Falle, da $b>a$ iſt, hat demnach die Gleichung immer drey mögliche Wurzeln, aber nur zwey derſelben ſind, wie ſchon bemerkt iſt, Ordinaten an der Conchoide. Sie muß drey mögliche Wurzeln haben, weil zwey Wendungspuncte auf jeder Seite von CB vorhanden ſind, alſo zwey Wurzeln möglich ſind, welches die dritte auch möglich macht. In dem Falle, $b<a$, muß, wenn jede der drey Wurzeln kleiner als a ſeyn ſoll, $2b<a$ ſeyn, alſo $2ab<a2$. Da aber bey drey möglichen Wurzeln $2b^2>$ oder $=a^2$, alſo noch mehr $2ab>$ oder $=a^2$ iſt, ſo widerſpricht die eine Bedingung der andern.

Man ſetze $y=z-a$, oder lege die Abſciſſenlinie durch D parallel mit der anfänglichen. Die Gleichung y verwandelt ſich in dieſe,

$$z^3-3(a-b)z^2+3a(a-2b)z-a^2(a-b)=0.$$

Iſt b größer als a, ſo ſind alle drey Wurzeln möglich, und wegen der Succeſſion der Vorzeichen $+\ +\ -\ +$ in dieſem Falle ſind zwey Wurzeln poſitiv, und eine iſt negativ, (Gleichung, III. 9.). Die letztere iſt keine Ordinate. In dem Falle, $b<a$, giebt die allgemeine Bedingung für drey mögliche Wurzeln, $2b^2>$ oder $=a^2$, daß $2ab>a^2$ oder $2b>a$ ſey. Die Succeſſion der Vorzeichen in der Gleichung iſt $+---$; daher hat die Gleichung nur eine poſitive Wurzel als Ordinate an dem einzigen Wendungspuncte auf einer Seite von DB. Die beiden negativen Wurzeln ſind keine Ordinaten.

Der Grund, daß die zwey Wendungspuncte durch eine Gleichung vom dritten Grade angezeigt werden, liegt darin, daß ſowohl zwey Wendungspuncte als einer an derſelben Seite von CB möglich ſind, daher konnten die zu-

gehörigen Ordinaten nicht durch eine quadratiſche Gleichung gefunden werden, da dieſe entweder zwey oder gar keinen Wendungspunct geben würde. Cramer in der Anal. des lignes courbes p. 516. ſagt aus Übereilung, daß die drey Wurzeln der Gleichung $y^3 + 3by^2 - 2a^2 b = 0$ die Ordinaten zu den Wendungspuncten geben.

Wenn $a^2 b + y^3 = 0$, oder wenn $y = -\sqrt[3]{a^2 b}$ iſt ſo iſt der Quotient $\frac{d^2 y}{dx^2}$ unendlich groß. Dieſes findet nur Statt, wenn b kleiner als a iſt, weil y. nicht größer als a ſeyn kann. Für eben dieſen Werth von y iſt der Quotient $\frac{dx}{dy} = 0$, das iſt, die Tangente des Winkels der berührenden oder der Curve mit der Ordinate iſt Null, oder dieſer Winkel iſt Null. Das geſchieht (Fig. 79.) in H und G, wo die Ordinate zugleich berührende iſt. In dieſen Puncten ſchließt ſich der convexe Bogen an den concaven, wie in den Falle, da $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$ iſt, aber beide liegen an derſelben Seite der berührenden. Daher ſind H und G nicht als Wendungspuncte zu betrachten. Beide Bogen gehören nicht zu derſelben Folge der Ordinaten, ſondern zu zwey verſchiedenen.

Aufgabe. Die obere Conchoide drehe ſich um die Aſymptote als Axe, es wird der Inhalt des runden Körpers geſucht, der zwiſchen dem von AB und PM beſchriebenen Kreisflächen liegt.

Der Inhalt ſey = Z, ſo iſt $dZ = \pi y^2 dx$; (ſ. Cubirung). Da $dx = -\frac{(a^2 b + y^3)\,dy}{y^2 \sqrt{(a^2 - y^2)}}$ iſt,

ſo iſt $dZ = -\frac{\pi(a^2 b + y^3)\,dy)}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}$.

Es iſt $\int \frac{dy}{\sqrt{(a^2 - y)^2}} = \text{Ang. sin} \frac{y}{a}$, und $\int \frac{y^3 dy}{\sqrt{(a^2 - y^2)}} = -\frac{1}{3}(2a^2 + y^2)\sqrt{(a^2 - y^2)}$. (Integralformel, 28. 40.)

alſo

$$Z = \text{Conſt.} - \pi a^2 b \text{ Ang sin } \frac{y}{a} + \frac{1}{3}\pi(2a^2 + y^2)\sqrt{(a^2 - y^2)}$$

Da $Z = 0$ für $y = a$, ſo iſt $\text{Conſt} = \frac{1}{2}\pi^2 a^2 b$, und

$$Z = \pi a^2 b\left(\frac{1}{2}\pi - \text{Ang. sin} \frac{y}{a}\right) + \frac{1}{3}\pi(2a^2 + y^2)\sqrt{(a^2 - y^2)}$$

oder

$$Z = \pi a^2 b \text{ Ang. coſ} \frac{y}{a} + \frac{\pi(2a^2 + y^2)xy}{3(b + y)}.$$

Der Inhalt des ganzen ins Unendliche ausgeſtreckten conchoidiſchen Körpers, auf der einen Seite der von AB beſchriebenen Kreisfläche, iſt $= \pi a^2 (\frac{1}{2}\pi b + \frac{2}{3} a)$.

Müllers Verfahren, den Inhalt eines conchoidiſchen Faſſes zu finden, iſt ſehr unbequem und zugleich fehlerhaft. Er weiß die Integration nicht zu bewerkſtelligen, und nimmt deswegen Guldins Regel vom Schwerpuncte zu Hülfe. Er erlaubt ſich $b = a$ zu ſetzen, da doch b durch die beiden Durchmeſſer und die Länge des Faſſes beſtimmt iſt. Oberreits Methode der Integration im Leipz. Magaz. 1787 iſt auch unbequem, da er ſich ganz unnöthiger Weiſe der Reihen bedient, wodurch ſeine Rechnung faſt vier Seiten anfüllt, ohne ein vollſtändiges Reſultat zu geben.

Exempel. Von einem conchoidiſchen Faſſe ſey der Halbmeſſer des Bauches, $a = 15$ Zoll, des Bodens $= y = 13$ Zoll. Die halbe Länge des Faſſes, $x = 21,875$ Zoll. Da $b + y = \frac{xy}{\sqrt{(a^2 - y^2)^2}}$ ſo iſt $b + y = 38,001$, und $b = 25,001$. Ferner

iſt Ang. $\cos\frac{y}{a} = 29^\circ\ 5'\ 5\frac{1}{2}$ in Graden, daraus in Theilen das Halbmeſſers als der Einheit $= 0,522229$. Auch iſt $\log \pi = 0,4971499$. Alſo iſt . . . .

πa^2 Ang. $\cos\frac{y}{a} = 9230$, und . . . .

$\frac{1}{3}\pi (2a^2 + y^2)\sqrt{(a^2 - y^2)} = 4851$, ſo daß $Z = 14081$ Cubikzoll, und der Inhalt des ganzen Faſſes $= 28162$ Czoll. Müller findet nach ſeiner Rechnung 26874 Czoll. mit einem hier ſehr unbrauchbaren Decimalbruche von 8 Ziffern. Dieſe ſind nach der Berechnung des Leipziger Überſetzers $= 511$ Leipziger Kannen, eine Kanne zu 52, 318 .. Cubz. Rheinl. gerechnet. Der mit Waſſer gemeſſene Inhalt des Gefäßes betrug 504 Kannen, das iſt 25368 Cubz. Die conchoidiſche Figur, richtig angewandt, giebt alſo beträchtlich zu viel, wenn gleich Müllers fehlerhafte Rechnung nur 7 Kannen zu viel giebt. Oberreit findet für den Inhalt dieſes Gefäßes 539 Kannen. Nach meiner Rechnung ſind es 538, 3 Kannen.

Man ſchiebe auf der geraden Linie AX (Fig. 80.) die große Axe EF einer Ellipſe EGFH fort, und ziehe in irgend einer Lage derſelben aus dem unveränderten Puncte C durch den Mittelpunct der Ellipſe K die gerade CKP, welche die Ellipſe in P und N ſchneidet, ſo ſind P und N Puncte einer elliptiſchen Conchoide. Sie wird, wie man ſieht, eben ſo durch die Ellipſe erzeugt, wie die alte Nikomediſche Conchoide durch einen Kreis. Wenn CA ſenkrecht auf AX iſt, und $AB = AD =$ der halben kleinen Axe der Ellipſe genommen werden, ſo ſind B und D Puncte dieſer Conchoide, die man ihre Scheitelpuncte nennen mag. Die Linie BD theilt ſo wohl die obere als untere Conchoide in zwey gleiche und ähnliche Hälften.

Die Axe einer Parabel werde auf einer Linie AX fortgeſchoben, und in irgend einer Lage derſelben werde aus

einem beſtimmten Puncte C durch einen gegebenen Punct der Axe eine gerade Linie gezogen, ſo ſind deren Durchſchnitte mit der Parabel Puncte einer paraboliſchen Conchoide,

Auf ähnliche Art entſteht eine hyperboliſche Conchoide. Man ſehe von dieſen conchoidiſchen Gattungen, Rabuel Commentarie ſur la Géométaire de Descartes, p. 123.

Anſtatt der geraden Linie XAX kann man zur Baſis jede krumme Linie nehmen, und die auf ähnliche Art, wie für eine geradlinichte Baſis, beſchriebene Linie iſt ebenfalls eine höhere Gattung von Conchoide. Zur Übung in der analytiſchen Geometrie diene eine Conchoide mit einer circularen Baſis.

Es iſt über dem Durchmeſſer CA (Fig. 81.) ein Kreis beſchrieben, der als Baſis dient; der Pol iſt in C, auf dem einen Endpuncte des Durchmeſſers CA; die gegebene Linie zur Beſchreibung der Conchoide ſey AB = AD. Man ziehe irgend eine Chorde des Kreiſes CP, und nehme auf derſelben und ihrer Verlängerung ſowohl PN als PM = AB, ſo iſt M ein Punct auf der äußern Conchoide, und N ein Punct auf der innern. Man kann hier den Bogen AP als Abſciſſenlinie, und PM, PN als conſtante Ordinaten an der Conchoide betrachten.

Es ſey CA = a; AB = AD = b; CM = y; der Winkel BCM = φ. Man nehme noch die Chorde CE = Ce = b, und ſetze CAE oder CAe = α, ſo iſt a sin α = b. Da CP = a coſ φ, ſo iſt y = a coſ φ + b. Aus dieſer Gleichung läßt ſich der ganze Zug der in einander verſchlungenen äußern und innern Conchoide herleiten. Für die Werthe des Winkels φ von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ (oder 90 Gr.) gehört der Bogen BMG von B bis in G auf der CF, die ſenkrecht auf AC iſt. Es iſt CG = b. Der Bogen CG wird beſchrieben, wenn die ſich um C drehende Ordinatenlinie zwiſchen CF und CH,

der Verlängerung von EC fällt, wie CQ. Es ſey BCQ $= \frac{1}{2}\pi + \omega$. ſo iſt $\cos\varphi = \cos BCQ = -\sin\omega$, und $y = b - a\sin\omega$. Man verlängere CQ rückwärts bis an den Kreis in q, ſo iſt $ACq = \pi - (\frac{1}{2}\pi + \omega) = \frac{1}{2}\pi - \omega$, und $Cq = a\cos(\frac{1}{2}\pi - \omega) = a\sin\omega$. Nimmt man $qO = b$, ſo iſt $CO = b - a\sin\omega$, alſo O ein Punct der Curve. Wenn bey fortgeſetzter Drehung CQ auf CH fällt, ſo iſt $\omega = \alpha$, alſo, da $EC = a\sin\alpha$ iſt, $y = b - a\sin\alpha = 0$. Nun iſt die halbe äußere Conchoide vollendet, und der beſchreibende Punct geht in die innere Conchoide über. Die Ordinatenlinie ſey in CR, und FCR $= \omega$, kleiner als ein Rechter. Es iſt nun $y = b - a\sin\omega$, eine negative Größe. Man verlängere CR rückwärts bis an den Kreis in p, und nehme $pn = b$, ſo iſt $Cp = a\sin\omega$, und $Cn = a\sin\omega - b$. Zugleich iſt $Cn = y$, ſowohl was die Quantität, als was die Lage betrifft. Die Negation von y zeigt an, daß die Richtung der Ordinate und der ſich drehenden Linie CR einander entgegengeſetzt ſind. Wenn die letztere in CI, die auf CF ſenkrechte fällt, ſo iſt $\omega = \frac{1}{2}\pi$, und $y = b - a, = -(a - b)$. Nun iſt $CD = a - b$, alſo als Ordinate iſt $CD = y$. Wenn ω zwiſchen $\frac{1}{2}\pi$ und $\pi - \alpha$ fällt, wie der W. FCr, ſo entſteht dieſelbe Folge der Ordinaten von A nach P bis c hin, wie auf der andern Seite von A nach p bis E. Iſt FCh $= \pi - \alpha$, ſo iſt $\varphi = \frac{2}{3}\pi - \alpha$, alſo $\cos\varphi = -\cos(\frac{3}{2}\pi - \alpha) = -\sin\alpha$, nnd $y = b - a\sin\alpha$, das iſt $y = 0$. Nun iſt die innere Conchoide vollendet. Wenn ω größer als $\pi - \alpha$ iſt, ſo iſt $\sin\omega$ kleiner als $\sin\alpha$, und $y = b + a\cos\varphi = b + a\cos(\frac{1}{2}\pi + \omega) = b - a\sin\omega$ iſt poſitiv. Nun fällt die Ordinate wieder in die Richtung der ſich drehenden Linie, und beſchreibt den Bogen Cg bis an g auf der Cf, die ſenkrecht auf CA iſt. Iſt ω größer als zwey Rechte, ſo wird $\sin\omega$ negativ, alſo $-a\sin\omega$ poſitiv, oder $a\cos\varphi$ iſt poſitiv, da φ über drey Rechte beträgt. Es wird nun, bis daß $\varphi =$ vier Rechten iſt, der Bogen gmB der äußern Conchoide be-

ſchireben, an welchem die Ordinaten, wie C m poſitiv ſind.

Die Quadratur dieſer Conchoide iſt leicht. Es ſey der Sector B C M = Z, ſo iſt $dZ = \frac{1}{2} yy\, d\varphi$ (ſ. Quadratur.), das iſt

$$dZ = (\tfrac{1}{2} b^2 + ab . \cos\varphi + \tfrac{1}{2} a^2 \cos\varphi^2)\, d\varphi$$
$$= (\tfrac{1}{4} a^2 + \tfrac{1}{2} b^2 + \tfrac{1}{4} a^2 \cos 2\varphi + ab \cos\varphi)\, d\varphi.$$

Daraus iſt

$$Z = (\tfrac{1}{4} a^2 + \tfrac{1}{2} b^2)\varphi + \tfrac{1}{8} a^2 \sin 2\varphi + ab \sin\varphi,$$

ohne eine Conſtans. Wenn die Ordinatenlinie aus der Lage C B in die C I gekommen iſt, ſo hat die Ordinate ſelbſt die halbe äußere Conchoide B M G C, und die halbe innere C n D beſchrieben. Die beiden Flächenräume B M G C B und C n D C zuſammen ſind $= (\frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{2} b^2)\pi$, das iſt der Fläche des Kreiſes C E A e C und des Doppelten des über dem Durchmeſſer b beſchriebenen Kreiſes.

Den Flächenraum der äußern halben Conchoide zu erhalten, ſetze man $\varphi = \frac{1}{2}\pi + \alpha$, wodurch y = o wird, weil $\cos(\frac{1}{2}\pi + \alpha) = - \sin\alpha$ iſt. Dieſe Area iſt

$$= (\tfrac{1}{4} a^2 + \tfrac{1}{2} b^2)(\tfrac{1}{2}\pi + \alpha) - \tfrac{1}{8} a^2 \sin 2\alpha + ab \cos\alpha.$$

Die Area der innern halben Conchoide D C N D zu finden betrachte man ihre Ordinaten nur abſolut für ſich, ſo iſt $y = a \cos . \varphi - b$, und für y = o iſt $\varphi = \frac{1}{2}\pi - \alpha$. Setzt man nun in der Formel für ein unbeſtimmtes Z, − b für b, und $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ für φ, ſo iſt dieſe Area

$$= (\tfrac{1}{4} a^2 + \tfrac{1}{2} b^2)(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha) + \tfrac{1}{8} a^2 \sin 2\alpha - ab \cos\alpha.$$

Die Summe der beiden Arearum iſt die vorher gefundene.

Roberval hat ſich ſchon mit dieſer Conchoide auf einer circularen Baſis beſchäftigt. Er nennt ſie le Limaçon de Paſcal. Er hat die Summe je zweyer Sectoren wie B C M und D C N gefunden, und daher die Summe der Räume B M C B, D N C D.

De la Hire hat eine weitläufige Abhandlung über die Conchoide auf irgend einer Baſis geliefert, in den Mem. de l' Acad. des Sc. 1708, worinn er ſie nach allen Prädicamenten unterſucht. Er mußte noch die Gründe ſeiner Methode beyfügen.

Wenn die gegebene Linie dem Durchmeſſer a gleich genommen wird, ſo iſt die Linie die in einem vorhergehenden Artikel ſchon betrachtete Cardioide. Die innere Conchoide fällt hier weg. Dieſe Linie iſt geometriſch rectificabel. Denn es ſey der Bogen vom Scheitel an $= s$, ſo iſt $ds^2 = y^2 d\varphi^2 + dy^2$. Es iſt $y = a\,(1 + \cos\varphi)$, alſo $dy = -a \sin\varphi\, d\varphi$. Daher $ds^2 = 2a^2 (1 + \cos\varphi) d\varphi^2 = 4a^2 \cos \tfrac{1}{2}\varphi^2 . d\varphi^2$, und $ds = 2a \cos \tfrac{1}{2}\varphi . d\varphi$, daher $s = 4a \sin \tfrac{1}{2}\varphi$, ohne eine Conſtans. Die Länge der einen Hälfte von dem Scheitel (B in Fig. 81.) bis zu dem Pol iſt $= 4a$, da der Winkel φ für dieſen Bogen $= \pi$ oder zwey Rechten gleich iſt. De la Hire meint, daß ſie nur aus dieſer Hälfte allein beſtehe.

Concrete Zahl iſt einerley mit einer benannten Zahl wie 4 Thaler.

Congruenz, Deckung, iſt die völlige Übereinſtimmung zweyer Figuren, ſo daß ihre Gränzen, wenn ſie gehörig auf einander gelegt werden, zuſammen fallen. Dieſes Aufeinanderlegen (applicatio) iſt eine intellectuelle Vergleichung nach Art des Aufeinanderlegens zweyer materiellen Figuren, wodurch man prüft, ob ſie gleich oder ungleich ſind. S. Euklides I. 4. 8.

Coniſche Linie, ſ. Kegelſchnitte.

Conjugirt, verbunden, heißen in der Geometrie der krummen Linien, gewiſſe zuſammen gehörige gerade oder krumme Linien.

I. Conjugirte Durchmeſſer in der Ellipſe und Hyperbel ſind diejenigen beiden, deren jeder parallel iſt mit den Chorden, die der andere halbirt. Die Durchmeſſer in dieſen Linien gehen alle durch ihren Mittelpunct.

Conjugirte Axe iſt in der Ellipſe die kleine Axe, welche der kleinſte aller Durchmeſſer iſt. Sie iſt die mittlere geometriſche Proportionale zwiſchen der großen Axe (der Queraxe, axis transverſus) und dem Parameter. In der Hyperbel heißt die mittlere Proportionale zwiſchen der Queraxe (zwiſchen den Scheitelpuncten der Hyperbel) und dem Parameter auch die conjugirte Axe. Sie kann größer ſeyn als jene. Als Ordinate betrachtet hat ſie keinen möglichen Werth, weil ſie die Hyperbel nicht ſchneidet, wenn ſie ſenkrecht auf die Queraxe oder Hauptaxe durch den Mittelpunct geſetzt wird.

II. Conjugirte Ovale iſt ein ganz abgeſonderter Theil einer krummen Linie, welchen eine in ſich zurückkehrende krumme Linie bildet. Dergleichen kommt nur bey krummen Linien des zweyten und höherer Grade vor. Die conjugirten Ovalen gehören, ihrer Abſonderung ungeachtet, zu der krummen Linie, weil ihre Ordinaten mit den Ordinaten der übrigen Zweige durch eine gemeinſchaftliche Gleichung beſtimmt werden. Bey den höhern krummen Linien ſind für eine Abſciſſe mehr als zwey Ordinaten möglich. Sind zwey ſtetige Folgen von Ordinaten zwiſchen denſelben Endordinaten enthalten, ſo bilden dieſe beiden Folgen eine abgeſonderte Ovale. Nämlich es ſey für $x = p$ die gemeinſchaftliche Ordinate zweyer ſtetigen Folgen $= P$, für $x = q$ ſeyn die Ordinaten verſchieden, aber für $x = r$ ſeyn ſie wieder gleich, und $= R$, ſo entſteht eine Ovale, wofern die Ordinaten in beiden Folgen ſich auf entgegengeſetzte Art verändern. Die Ovale mag auch einen Zweig der krummen Linie berühren, wenn aus einer andern Folge eine einzige Ordinate mit einer jener beiden Folgen übereinkommt. In dem Artikel, Linien der dritten Ordnung, kommen Beyſpiele von Ovalen vor. Man ſehe auch die Abbildungen bey Newtons Enumeratio linearum tertii ordinis.

III. Conjugirter Punct iſt ein abgeſonderter zu einer krummen Linie gehöriger Punct. Wenn in den beiden Folgen von Ordinaten, welche eine Ovale bilden, durch die Verän=

derung ihrer Relation gegen die Abſciſſen, die äußerſten ſich immer näher kommen, ſo zieht ſich die Ovale immer mehr zuſammen, und wird ein Punct, wenn die beiden äußerſten Ordinaten zuſammen fallen. Die Ordinate an einem conjugirten Puncte iſt ein möglicher Werth der Ordinate y für eine Abſciſſe x, ohne daß ſich eine ſtetige Folge von mehreren Ordinaten für größere oder kleinere x daran anſchließt.

IV. Conjugirte Hyperbeln ſind zwey verbundene Hyperbeln, deren jede zwiſchen den Aſymptoten der andern beſchrieben iſt, und die einerley conjugirte Axen, aber in umgekehrter Ordnung haben, ſo daß die Hauptaxe der einen (die durch die Scheitelpuncte der beiden entgegengeſetzten Hyperbeln gehende) die conjugirte der andern iſt. Es ſey a die halbe Hauptaxe der einen, b die halbe conjugirte, x die Abſciſſe von dem Mittelpuncte aus auf der Hauptaxe genommen, y die Ordinate, ſo iſt für dieſe die Gleichung, $a^2 y^2 = b^2 x^2 - a^2 b^2$. Für die andere iſt b die halbe Hauptaxe, und a die halbe conjugirte. Die Abſciſſe auf jener ſey t, die Ordinate u, ſo iſt ihre Gleichung $b^2 u^2 = a^2 t^2 - b^2 a^2$. Setzt man in der letztern x anſtatt u, und y ſtatt t, ſo erhält man die Gleichung $b^2 x^2 = a^2 y^2 - a^2 b^2$, oder $a^2 y^2 = b^2 x^2 + a^2 b^2$, in welcher die zweyte Hyperbel einerley Abſciſſenlinie mit der erſten hat. Multiplicirt man beide Gleichungen mit einander, ſo erhält man zwar eine einzelne Gleichung, $a^4 y^4 = b^4 x^4 - a^4 b^4$, in welcher die Werthe von y als Ordinaten theils zu der einen, theils zu der andern Hyperbel gehören. Beide machen aber doch nicht eine einzige krumme Linie aus, eben deswegen, weil die Gleichung ſich in zwey rationale zerlegen läßt.

Cono-Cuneus, ein Körper, deſſen Grundfläche ein Viertelkreis iſt, und der zwey ebene Seitenflächen hat, eine ein Rechteck, die andere ein Dreyeck, und nebſt dieſen noch eine gekrümmte Seitenfläche, wie es aus der Zeichnung (Fig, 82. Tab. V.) beſtimmter erhellen wird. Es iſt ACB der Quadrant eines Kreiſes. Auf

die Ebene deſſelben iſt das Rechteck ACED ſenkrecht geſtellt, deſſen Grundlinie der Halbmeſſer AC, die Höhe willkührlich iſt. Zieht man BE, ſo iſt das Dreyeck BCE die zweyte ebene Seitenfläche. Man ziehe irgend eine MP in dem Quadranten parallel mit CB, und PN parallel mit CE bis an N auf DE, dann MN, ſo iſt die Linie MN in der krummen Seitenfläche.

Der Körper unterſcheidet ſich von einem ſenkrechten Viertelkegel dadurch, daß die geraden Linien auf der krummen Seitenfläche, wie MN nicht nach einem und demſelben Puncte E, ſondern jede nach einem andern Puncte N der Linie DE laufen; von einem Keile dadurch, daß die Grundfläche nicht ein Rechteck, wie bey jenen, ſondern ein Viertelkreis iſt. Von der cylindriſchen Fläche iſt die krumme Seitenfläche dadurch verſchieden, daß die geraden Linien an derſelben ſich an einer geraden Linie endigen, und daß ſie gegen die Grundfläche verſchiedentlich geneigt ſind. Der Winkel, welchen MN mit der Grundfläche macht, iſt der Winkel NMP, deſſen Tangente $= \frac{NP}{MP}$ iſt. Es iſt zu bemerken, daß die Ebene des bey P rechtwinklichten Dreyecks NPM auf die Grundfläche ſenkrecht ſteht, weil MP mit BC, und NP mit EC parallel iſt, alſo die Ebene NPM mit der Ebene ECB parallel iſt, die ſenkrecht auf ACB ſteht.

Wallis hat dieſen Körper erdacht, und eine lange Abhandlung darüber geſchrieben, die in ſeinen Werken, vol. II. p. 683 — 699 befindlich iſt. Er betrachtet darin die Figur der Schnitte dieſes Körpers. Es ſcheint nicht, daß man weitern Gebrauch davon machen könne.

Conſequens terminus rationis, das zweyte Glied, oder das Hinterglied eines Verhältniſſes.

Conſtruction iſt in der Geometrie die Anwendung der Hülfsgrößen, um den Erweis eines Lehrſatzes zu

führen, oder die Auflöſung einer Aufgabe zu erhalten, als die Ziehung beſtimmter oder unbeſtimmter gerader Linien, Verlängerung der gegebenen, Beſchreibung einer krummen Linie, Legung einer Ebene in Beziehung auf eine andere Ebene, oder auf eine gerade Linie, Schneidung eines Körpers durch eine Ebene, Bewegung einer Linie, eines gegebenen Winkels, einer Figur, und was ſonſt von dergleichen Mittel angewandt werden mag. Wenn Größen verglichen werden ſollen, ſo iſt es gewöhnlich nöthig, Mittelgrößen einzuführen, z. B. bey dem pythagoräiſchen Lehrſatz. Bey Auflöſung der Aufgaben müſſen mit den gegebenen Größen andere verbunden werden, die zu den geſuchten führen. Man ſehe den Artikel: Analyſis als Methode, oder auch nur die Anfangslehren der Geometrie.

Eine geometriſche Conſtruction im engern Sinne genommen wendet nur die gerade Linie, den Kreis und die Kegelſchnitte nebſt der Ebene an. Im weitern Umfange dürfen ihr auch andere krumme Linien zugeſtanden werden, ſo fern dieſe durch eine Bewegung einer Linie oder Figur ſtetig beſchrieben werden können, wie z. B. bey der Verdoppelung des Würfels oder der Dreytheilung eines Winkels. Dergleichen Linien ſind die Ciſſoide und die Conchoide. Man nennt ſolche Conſtructionen auch mechaniſche. Man kann ſie aber mit Recht noch als geometriſch anſehen, wenn jeder Punct der beſchriebenen krummen Linie durch eine eigentliche geometriſche Conſtruction angegeben werden kann. Das iſt nicht der Fall bey der Quadratrix des Dinoſtratus, bey welcher man die Lage des ſich drehenden Halbmeſſers für jede Stelle des ſich bewegenden Punctes auf dem fixen Halbmeſſer nicht angeben kann.

Eine inſtrumentale Conſtruction, die gewöhnlich eine mechaniſche genannt wird, dient zu wirklichen Darſtellungen materieller Größen, z. B. bey Abzeichnungen von Feldern, Gegenden, Gebäuden, Maſchinen.

Dee Conſtruction algebraiſcher Gleichungen iſt die Darſtellung ihrer Wurzeln durch die zu den Durchſchnitten zweyer Linien gehörigen Ordinaten für eine

gemeinſchaftliche Abſciſſenlinie, oder durch die dazu gehörigen Abſciſſen. Dieſe geſchieht entweder zur leichtern Erfindung der Wurzeln, oder um der Methode ſelbſt willen, oder um die Relation und Succeſſion der Wurzeln deutlicher zu machen. S. Anwendung der Geometrie auf die Algebra.

Die Conſtruction analytiſcher Gleichungen, das iſt, der Gleichungen zwiſchen zwey oder drey veränderlichen Größen, iſt die geometriſche Darſtellung der zuſammen gehörigen Größen unter ihnen durch die Coordinaten an einer krummen Linie oder an zweyen, oder an einer Fläche. Jede Relation zwiſchen zwey veränderlichen x und y kann durch die Coordinaten einer krummen Linie in einer Ebene gleichſam abgebildet, und oft ſehr anſchaulich gemacht werden. Eine Relation zwiſchen drey veränderlichen x, y, z kann durch die Coordinaten zweyer krummen Linien in einer Ebene vorgeſtellt werden, wenn an dieſen für eine gemeinſchaftliche Abſciſſe x die Ordinaten der einen wie y, der andern, wie z ſich gegen x verhalten. Dieſes aber in dem Falle, wenn zwey Gleichungen zwiſchen dieſen verbundenen Größen gegeben ſind, ſo daß für eine derſelben, wie x, ſowohl y als z gefunden werden kann. Iſt die Gleichung zwiſchen x, y, z nur eine einzige, ſo iſt es eine krumme Fläche, welche durch ihre Coordinaten die Relation darſtellt. Die Conſtruction analytiſcher Gleichungen hat ihren Werth, wenn ſie durch die Verhältniſſe der Linien und Winkel, durch die Bewegung eines Punctes oder einer Linie nach einem gewiſſen Geſetze die Entſtehung der Gleichung angiebt, und die Relation der veränderlichen Größen für alle Werthe derſelben ſinnlich macht. Wenn ſich dieſes aber auch ſo nicht zeigen läßt, ſo iſt es doch ſehr oft nützlich, die Coordinaten nach einem Maaßſtabe unter dem angenommenen Winkel derſelben zu zeichnen, da gewöhnlich aus einem Theile einer krummen Linie oder wenigen Puncten derſelben ihr ganzer Lauf zu erkennen iſt, wodurch denn auch die mannichfaltigen Verhältniſſe der veränderlichen Größen in der abgebildeten Glei-

chung, beſonders die verſchiedenen Folgen der einen in Beziehung auf die andern, anſchaulich gemacht werden.

Die Conſtruction der Differentialgleichungen iſt eine Integration durch Hülfe krummer Linien. Es ſey $dz = X dx$, wo X eine Function von x iſt. Man conſtruire eine krumme Linie, deren Coordinaten x und X ſind, wobey man irgend eine Linie zur Einheit für die Längen, ihr Quadrat zur Einheit für die Flächen annimmt. Dann iſt z der Flächenraum zwiſchen den Coordinaten x und X und dem zugehörigen Bogen der Curve, mit Beyfügung der Conſtans, wo dieſe erforderlich iſt.

Allgemeiner ſey $X dx = Y dy$, wo X eine Function von x, und Y von y iſt. Man ſetze zwey gerade Linien unter einem rechten oder andern Winkel zuſammen, nehme von dem Durchſchnitte an, auf der einen die Abſciſſen x, auf der andern die Abſciſſen y, und conſtruire zwey krumme Linien, eine mit den Ordinaten X zu den Abſciſſen x, die andere mit den Ordinaten Y zu den Abſciſſen y. Nimmt man an beiden Curven zwey gleiche Flächenräume, ſo ſind die Abſciſſen zu denſelben zwey zuſammengehörige x und y in der Gleichung $V dx = Y dy$, weil wegen der gleichen Flächenräume auch ihre Differentiale gleich ſind. Vollendet man das Parallelogramm von den Abſciſſen x und y der Curven, ſo giebt der Durchſchnitt der mit ihnen parallelen Seiten einen Punct der Curve, deren Coordinaten x und y ſind. Durch dieſe wird nun die Differentialgleichung aufgelöſet oder conſtruirt. Exempel findet man in Jo. Bernoulli Lect. Hoſpit. X.

Die Conſtruction der Curve ſetzt voraus, daß man die beiden Curven, deren Ordinaten X und Y ſind, quadriren, und für jeden Flächenraum der einen die Abſciſſe zu einem eben ſo großen Flächenraum an der andern angeben könne. Kann man dieſes bewerkſtelligen, ſo kann man auch die Gleichung zwiſchen x und y analytiſch finden, und braucht der Curve mit den Coordinaten x und y nicht, es müßte denn ſich eine merkwürdige Art ihrer Entſtehung aus den beiden andern dadurch ergeben. Laſſen ſich dieſe nicht quadriren, ſo wird die Curve für x und y nur conſtruirt,

conceſſis quadraturis, welches bloß zeigt, was man müßte angeben können, um aus der Differentialgleichung die endliche Gleichung zwiſchen x und y zu finden. Dieſes Verfahren wird jetzt nicht gebraucht.

Joh. Bernoulli zeigte ſchon 1694 eine allgemeine Methode an, alle Differentialgleichungen vom erſten Grade zu conſtruiren, auch wenn die veränderlichen Größen ſich nicht von einander ſondern laſſen, wie wenn X und Y in der angeführten Gleichung Functionen von x und y zugleich ſind und bleiben. Allein es iſt dieſes nur ein Entwurf, der ſchwerlich auszuführen ſeyn möchte. S. Jo. Bernoulli Opp. T. I. nr. 20.

Ehedem pflegte man analytiſche Beweiſe und Auflöſungen in geometriſche Conſtructionen zu verwandeln, wie in Newtons Principien der Naturwiſſenſchaft durchgehends geſchehen iſt. Man fügte den analytiſchen Auflöſungen immer die geometriſche Conſtruction bey. Die geometriſche Methode ſah man als die vollkommenere an. Es iſt wahr, daß dieſe oft ungemein viel Scharfſinn erfordert, und vortrefflich zur Übung des mathematiſchen Faſſungsvermögens dient. Sie wird aber doch bey ſehr ſchweren Unterſuchungen unzulänglich, und iſt auch mehr in der abſtracten Speculation, als in der Anwendung brauchbar, wie es bey der Berechnung der gegenſeitigen Störungen der Weltkörper der Fall iſt. Gegenwärtig hat man die geometriſche Methode faſt ganz verlaſſen. In großen Werken, die die Bewegung betreffen, findet man nicht eine einzige Zeichnung.

Einige neue Philoſophen haben auch die analytiſche Zuſammenſetzung der Größen eine Conſtruction genannt. Man wird aber in der Mathematik ſich von den Philoſophen keine Neuerungen in den Begriffen machen laſſen.

Zur Conſtruction analytiſcher Zuſammenſetzungen von Größen muß man die Elemente derſelben geometriſch darzuſtellen wiſſen.

Wenn die einzelnen Buchſtaben Linien bedeuten, ſo iſt ab ein Rechteck von den Seiten a, b; alſo aa das Quadrat von der Seite a; ferner abc ein rechtwinklichtes

Parallelepipedum, deſſen Seiten a, b, c ſind, alſo a a a oder a^3 der Würfel von der Seite a.

Es iſt $\frac{bc}{a}$ die vierte Proportionallinie zu den drey Linien a, b, c. Man zeichne einen beliebigen Winkel, trage von dem Scheitel aus auf den einen Schenkel die Linien a, b, auf den andern die Linie c, ziehe durch die Endpuncte von a und c eine Linie, und mit dieſer durch den Endpunct von b eine Parallele, ſo ſchneidet dieſe auf dem andern Schenkel die vierte Proportionallinie ab.

Es iſt $\frac{bb}{a}$ die dritte Proportionallinie zu a und b. Sie wird auf dieſelbe Art wie die vierte zu drey verſchiedenen gefunden. Iſt b kleiner als a, ſo wird ſie gefunden, wenn man über a als Durchmeſſer einen Kreis beſchreibt, in dieſen die Chorde b von dem einen Endpuncte des Durchmeſſers trägt, und von dem zweyten Endpuncte der Chorde eine ſenkrechte auf den Durchmeſſer zieht. Dieſe ſchneidet auf dem Durchmeſſer von jenem Endpuncte an die verlangte Linie ab.

Wenn $aa + bb = cc$ iſt, ſo iſt c die Hypotenuſe des rechtwinklichten Dreyecks, worin a, b die Katheten ſind. Daher wird $c = \sqrt{(aa + bb)}$ gefunden.

Iſt $aa - bb = cc$, ſo wird c durch die Conſtruction eines rechtwinklichten Dreyecks gefunden, worin a die Hypotenuſe und b die eine der Katheten iſt. Oder man beſchreibe über dem Durchmeſſer a einen Halbkreis, trage von dem einem Endpuncte aus die Linie b an den Umfang, und ziehe durch den andern Endpunct von a an den Punct in dem Umfange, eine gerade Linie, ſo iſt dieſe die Linie, c. — Oder man beſchreibe über dem Durchmeſſer $a + b$ einen Halbkreis; trage auf denſelben von dem einen Endpuncte aus die Linie 2b, errichte durch deren Endpunct eine ſenkrechte, ſo iſt die Chorde des Bogens zwiſchen dem zweyten Endpuncte des Durchmeſſers

und dieſer ſenkrechten = c. — Oder man beſchreibe mit dem Halbmeſſer a einen Halbkreis, trage auf demſelben von dem Mittelpuncte aus die Linie b, errichte durch deren Endpunct eine ſenkrechte bis an den Umfang des Kreiſes, ſo iſt dieſe = c.

Es ſey $\frac{cde}{ab} = f$, ſo iſt das Verhältniß $e : f$ das zuſammengeſetzte aus den beiden $a : c$ und $b : d$, oder das Verhältniß der Rechtecke $ab ; cd$. Um es durch zwey Linien darzuſtellen, ſuche man zuerſt die vierte Proportionallinie zu a, c, e, welche E ſey; dann die vierte zu b, d; E, ſo iſt dieſe = f.

Es ſey $\frac{defg}{abc} = h$, ſo iſt das Verhältniß $g : h$ das zuſammengeſetzte aus $a : d$; $b : e$; $c : f$, oder das Verhältniß der rechtwinklichten Parallelepipeden $abc : def$. Oder man ſuche die vierte Proportionallinie zu a, d, g, welche ſey G; dann die zu b, e, G, welche ſey H; endlich die zu c, f, H, ſo iſt dieſe = h.

Es ſey $b^2 = ac$, ſo wird b auf zweyerley Weiſe durch bekannte Eigenſchaften des Kreiſes gefunden, ſ. Kreis.

Es ſey $b^3 = a^2 c$, man ſoll durch Conſtruction finden. Dieſes iſt die bey den Alten berühmte Aufgabe, zwiſchen zwey gegebenen Größen a, c die beiden mittlern geometriſch proportionalen zu finden. Denn b iſt die auf a zunächſt folgende. Die Progreſſion iſt $a : b : \frac{bb}{a} : \frac{bbb}{aa}$.

S. Deliſche Aufgabe.

Contiguum, an einander liegend. Winkel, die einen gemeinſchaftlichen Schenkel haben, heißen anguli contigui.

Continuum das ſtetige, oder unmittelbar verbundene. 1) Eine Größe heißt eine ſtetige, ein Continuum, wenn ihre Theile alle ſo zuſammenhängen, daß

wo der eine aufhört, gleich der andre anfängt. 2) Ein ſtetiger Bruch (fractio continua) iſt, deſſen Nenner einen Bruch wiederum mit einem Bruche in deſſelben Nenner u. ſ. w. enthält, es ſey, daß dieſes ohne Ende fortgeht, oder aufhört. S. Kettenbruch. 3) Eine proportio continua iſt, worin die beiden mittlern Glieder ſich gleich ſind. 4) Eine progreſſio continua, worin jedes Glied ſowohl das vorhergehende als nachfolgende Glied der gleichen Verhältniſſe unter zwey nächſten Gliedern iſt.

Contra-Diameter iſt eine Axe der Abſciſſen in einer krummen Linie von einer ſolchen Geſtalt, daß zu gleichen entgegengeſetzten Abſciſſen gleiche und entgegengeſetzte Ordinaten gehören. Sie theilt die krumme Linie in gleiche und ähnliche Theile, wie ein Diameter, aber mit dem Unterſchiede, daß die ähnlichen Theile entgegengeſetzte Lagen haben, da der Theil, der in dem Winkel der poſitiven Coordinaten liegt, dem in dem Winkel der negativen befindlichen gleich und ähnlich iſt. Eine ſolche Linie iſt die, deren Gleichung iſt $y^3 + axy^2 + bx^2y + cx^3 + dy + ex = 0$, oder folgende der vierten Ordnung mit der Gleichung, $y^4 + axy^3 + bx^2y^2 + cx^3y + dx^4 + ey^2 + fxy + gxx + h = 0$. Wenn man in dieſen Gleichungen $+x$ mit $-x$, und $+y$ mit $-y$ vertauſcht, ſo bleiben in der letztern alle Vorzeichen dieſelben, und in der erſtern werden ſie alle entgegengeſetzt, daher ſich alle Glieder eben ſo gegen einander aufheben, wie in jenen Gleichungen. Bragelongne hat die Benennung, Contre-Diamétre, aufgebracht. Mém. de l'Acad. des Sc. 1732. Cramer Anal. des lign. courb. §. 73.

Contra-geometriſche Proportion iſt die Relation zwiſchen drey Größen, a, b, c, da $a - b : b - c = c : b$, oder auch dieſe, da $a - b : b - c = b : a$ iſt. In der ſtetigen geometriſchen Proportion $a : b : c$ iſt $a - b : b - c = a : b = b : c$.

Contra-harmoniſche Proportion iſt die Relation zwiſchen drey Größen a, b, c, da $a-b:b-c=c:a$ iſt, z. B. 12, 10, 6. In einer harmoniſchen Proportion A, B, C, iſt $A-B:B-C=A:C$, z. B. 12, 8, 6. In jener iſt das mittlere Glied $b=\frac{aa+cc}{a+c}$ in dieſer iſt $B=\frac{2AC}{A+C}$.

Bey den alten Arithmetikern trifft man auch eine von ihnen ſo genannte contra-arithmetiſche Proportion an, nämlich, $a-b:a-c=c:b$; auch folgende, die ſie arithmetiſch-geometriſche Proportionen nannten. I. $a-b:a-c=c:a$; II. $b-c:a-c=c:a$; III. $b-c:a-c=c:b$. Dieſe Benennungen ſind veraltet und unnütz, wenn gleich die Relationen vorkommen können.

Convergirend, annähernd. 1) Gerade Linien, die ſich in einem Puncte ſchneiden, ſind nach der Gegend dieſes Punctes hin convergirend. 2) Eine Reihe iſt convergirend, wenn ihre Glieder in ihrer Folge nach einander immerfort kleiner werden. Die Summe der Glieder nähert ſich alsdann immer mehr dem Werthe der Größe, welche die Summe der ganzen ins Unendliche fortgeſetzten Reihe iſt. 3) Eine convergirende Hyperbel iſt eine Hyperbel des zweyten Grades, an welcher zwey Schenkel, die ſich ihre hohle Seite zukehren, eine gemeinſchaftliche Aſymptote haben. Dergleichen, iſt die krumme Linie, deren Gleichung iſt, $xyy+ay=b$. S. Newtoni enumer. lin. tertii ordinis, Fig. 68. 69.

Converſio rationis iſt, wenn in einem Verhältniſſe A : B das Vorderglied mit dem Überſchuſſe deſſelben über das Hinterglied verglichen wird, oder die Ableitung des Verhältniſſes A : A — B aus A : B. Lorenz überſetzt es: Das Verhältniß wird zurückkehrend.

Converſio eines Satzes iſt etwas logiſches, wenn eine Bedingung und Folge vertauſcht werden. Z. B. der Satz ſey dieſer: wenn zwey ſich ſchneidende gerade Linien von einer dritten geſchnitten werden, ſo iſt der äußere Winkel an der Seite, wo ſie ſich ſchneiden, größer als der innere entgegengeſetzte an derſelben Seite. Der umgekehrte, oder die converſa iſt, wenn zwey gerade Linien von einer dritten ſo geſchnitten werden, daß der äußere Winkel größer als der innere entgegengeſetzte an derſelben Seite jener Linie iſt, ſo ſchneiden ſich die beiden Linien an eben dieſer Seite.

Conus, ſ. Kegel.

Convex, ſ. Concav.

Coordinaten einer krummen Linie von einfacher Krümmung ſind zwey ſtetige Folgen gerader Linien, von welchen die eine Folge auf einer gegebenen geraden Linie in oder neben der krummen Linie von einem gegebenen Puncte an genommen, und die andere Folge mit jener unter einem unveränderlichen Winkel, rechten oder ſchiefen, verbunden wird. Die Relation dieſer Linien beſtimmt die Natur der krummen Linie. Für die Geometrie iſt die analytiſche Darſtellung des ganzen Zuges einer krummen Linie ſehr wichtig, weil aus den Eigenſchaften der Gleichung die Eigenſchaften der krummen Linie hergeleitet werden können, und bey der Verbindung zweyer oder mehrerer Linien die Lage derſelben gegen einander, ihre Durchſchnitts- und Berührungspuncte durch die Verbindung ihrer Gleichungen ſich beſtimmen laſſen.

Wenn die krumme Linie eine gedoppelte Krümmung hat, d. i. wenn ſie nicht in derſelben Ebene bleibt, desgleichen auch zur Beſtimmung der Geſtalt einer krummen Fläche, werden drey ſtetige Folgen von Coordinaten gebraucht. Man ſtelle ſich drey Ebenen vor, die ſich jede die andere ſchneiden. Mit den Durchſchnitten je zweyer werden die Linien der drey Folgen parallel gezogen. Der gemeinſchaftliche Durchſchnittspunct der drey Durchſchnittslinien iſt der Anfangspunct, von welchem an die Linien der einen

Folge auf der zugehörigen Durchſchnittslinie genommen werden.

Es ſeyn (Fig. 83. Tab. VI.) AX, AY, AZ, die drey Durchſchnittslinien der Ebenen XAY, ZAX, ZAY, und A ihr gemeinſchaftlicher Durchſchnittspunct. Dieſe drey Linien heißen die Axen der Coordinaten. Es ſey LMN eine krumme Linie von doppelter Krümmung oder eine Linie auf einer krummen Fläche, die kein Durchſchnitt derſelben mit einer Ebene iſt. Durch einem Punct derſelben M ziehe man mit der Axe AZ die parallele MQ, welche die Ebene XAY in Q treffe; durch Q ziehe man QP parallel mit der Axe AY bis an die Axe AX in P, ſo ſind MQ, QP, AP die zu M gehörigen Coordinaten. Für jeden Punct der krummen Linie oder Fläche ſtelle man ſich ſolche drey Coordinaten vor, ſo machen dieſe drey ſtetige Folgen aus. Die Linien der auf AX genommenen Folge nennt man die Abſciſſen, die Folgen der PQ und QM die zugehörigen Ordinaten. Wenn die Axen ſenkrecht auf einander ſtehen, ſo heißen die Coordinaten orthogonale, normale, rechtwinklichte Coordinaten. Die Relation der drey Coordinaten wird durch eine Gleichung zwiſchen drey veränderlichen Größen mit den erforderlichen unveränderlichen ausgedrückt.

Wenn die krumme Linie in derſelben Ebene liegt, ſo ſind (Fig, 84. Tab. VI.) nur zwey Axen der Coordinaten AX, AY, nöthig Von jedem Puncte M einer krummen Linie LMN wird eine Linie MP parallel mit der einen Axe AY bis an die andere AX in P gezogen. So ſind AP, PM jede eine Linie aus den beiden Folgen der Coordinaten. Zieht man MR parallel mit AX bis an AY in R, ſo ſind AR, RM ebenfalls ein Paar Coordinaten. Die Linie AP heißt die Abſciſſe, PM die Ordinate; oder auch, es iſt AR die Abſciſſe, und MR die Ordinate.

Es iſt oft nöthig, die Lage der Cordinaten zu ändern, entweder um die Gleichung einfacher zu machen, oder um Eigenſchaften der krummen Linie zu entdecken. Das Verfahren hierzu iſt folgendes.

Es ſey für eine einfach krumme Linie (Fig. 85.) AX die Axe der Abſciſſen, AY die Axe der Ordinaten; AP und PM ſeyn die Coordinaten für den Punct M. Aus der Gleichung zwiſchen dieſen ſoll eine Gleichung für die Coordinaten AQ, QM, deren Axen AT, AU ſind, gefunden werden. Der Anfang der Abſciſſen AQ bleibe in A.

Durch einen beliebigen Punct B auf AX ziehe man CB parallel mit AY, welche AT in C, und AU in D ſchneide. Die Verhältniſſe der Seiten in den beiden Dreyecken ABC, ABD ſind gegebene. Man ziehe QS parallel mit AX, und QR parallel mit AY. Es iſt . .
AC : AB = AQ : AR, und . . . .
AD : AB = QM : QS (= RP), wegen der gleichwinklichten Dreyecke BAD, SQM. Ferner iſt . . .
AC : CB = AQ : QR (= PS) und . . . . ,
AD : DB = QM : MS. Man ſetze die Verhältniſſe der Linien AC : AB : BC : AD : DB = m:n:p:q:r; ferner AP = x; PM = y; AQ = t; QM = u, ſo iſt

$$AR = \frac{n}{m}t \; ; \quad RP = \frac{nu}{q},$$

$$PS = \frac{pt}{m} \; ; \quad MS = \frac{ru}{q};$$

alſo $x = \frac{nt}{m} + \frac{nu}{q}$, und $y = \frac{pt}{m} - \frac{ru}{q}$.

Das Vorzeichen — vor dem zweyten Theil von y entſteht daher, daß BC und BD entgegengeſetzte Lage haben.

Die gefundenen Werthe von x und y ſetzt man in die Gleichung für dieſelben, ſo erhält man eine Gleichung zwiſchen t und u.

Wenn der Anfangspunct der Abſciſſen verändert wird, ſo werden die Coordinaten t, u jede um eine gegebene Linie verändert.

Exempel. Es ſey M ein Punct einer Hyperbel, AX liege in der großen Axe, und PM ſey eine normale Ordinate, A der Mittelpunct der Hyperbel. Die beiden Axen AT, AU ſeyn die Aſymptoten. In dieſem Falle

iſt $m = q$; $p = r$, alſo $x = \frac{n}{m}(t + u)$; . . .

$y = \frac{p}{m}(t - u)$. Man nehme B in dem Scheitel, ſo

iſt AB die halbe Haupt-Axe $= a$; und BC die halbe zugeordnete $= b$, ſo daß $n = a$; $p = b$; . . . $m = \sqrt{(aa + bb)}$ iſt. Die Gleichung der Hyperbel iſt $b^2(x^2 - a^2) = a^2 y^2$. Die Subſtitution giebt

$$b^2 . \frac{nn}{mm}(t+u)^2 - b^2 a^2 = a^2 . \frac{pp}{mm}(t-u)^2,$$

und nach der Diviſion mit $nn = aa$, und $bb = pp$, auch Multiplication mit m^2.

$$(t + u)^2 - m^2 = (t - u)^2.$$

das iſt,

$$4tu = m^2 = aa + bb.$$

Da eine krumme Linie mit einfacher Krümmung auch durch die Bewegung einer veränderlichen geraden Linie um einen feſten Punct beſchrieben werden kann, ſo ſind dieſe veränderliche Linie, und die zugehörigen Winkel von einer gegebenen Linie an genommen auch Coordinaten.

Die Gleichung für eine krumme Linie mit doppelter Krümmung kann auch zwey Winkel und eine veränderliche gerade Linie zu Coordinaten haben. Man ſetze in (Fig. 83.) daß die drey Richtungs-Ebenen auf einander ſenkrecht ſtehen, ſo daß die Ebene des Dreyecks MAQ, deſſen Seiten die Linie MA von dem Puncte M der Curve nach dem gegebenen Puncte A, die ſenkrechte MQ auf die Ebene XAY, und AQ, die Linie von A nach MQ in eben dieſer Ebene, ſind, ſenkrecht auf XAY ſey. Durch

den Winkel XAQ, den Winkel QAM und die Linie AM wird der Ort des Punctes M beſtimmt. Die Winkel XAQ, QAM, und die gerade AM ſind Coordinaten für die krumme Linie LMN oder eine krumme Fläche. In der Aſtronomie heißen ſie Länge, Breite und Abſtand eines Weltkörpers von A, wenn die Ebene XAY die Ebene der Ekliptik iſt, oder Rectaſcenſion, Declination und Abſtand, wenn XAY die Ebene des Äquators iſt.

Corollarium, Zuſatz, iſt eine unmittelbare oder leichte Folgerung (conſectarium) aus einem bewieſenen Satze, oder der Auflöſung einer Aufgabe; insbeſondere die Anwendung eines allgemeinen Satzes auf einen beſondern Fall.

Coſa, res, iſt bey den alten italieniſchen Algebraiſten, was wir Wurzel einer Gleichung nennen.

Coſecante, die Secante des Complements eines Winkels. Wenn $\frac{u}{a}$ die Secante eines Winkels φ iſt, ſo iſt $\frac{u}{\sqrt{(u^2 - a^2)}} = \text{coſec}\,\varphi$. Gunter, ein engliſcher Mathematiker (geſt. 1626), hat dieſe abgekürzte Benennung, ſo wie die ähnlichen, Coſinus, Cotangente, eingeführt, wie man aus dem Vorberichte zu ſeinem Canon triangulorum ſieht. In ſeinen Schriften gebraucht er zugleich die Ausdrücke, Sinus und Tangente des Complements. Von Co-Sinus bemerkt es Kepler. Tabul. Rudolph. praecepta. C. 8. In Cavalerii Trigonometria heißt die Coſecante Secans ſecunda.

Coſinus, der Sinus des Complements eines Winkels. Wenn $\frac{x}{a}$ der Sinus eines Winkels φ iſt, ſo

iſt $\frac{\sqrt{(aa - xx)}}{a} = \text{coſin}\,\varphi$. Im 16ten Jahrhundert gebrauchten einige für Coſinus die Benennung sinus rectus secundus. Rhäticus und Vieta nennen Coſinus Baſis, und den Sinus Perpendiculum, in Beziehung auf den Radius.

Coſs, Regel Coſs, hieß bey den deutſchen Arithmetikern lange Zeit die Algebra. Die Italiener, welche die Algebra in Europa einführten, hatten ſie regola oder arte de la coſa genannt. S. Coſa.

Coſiſche Zahlen ſind Potenzen und Wurzeln in der Sprache der alten Algebraiſten, die ſelbſt Coſſiſten hießen. Coſſiſche Zeichen ſind die Symbole dieſer Größen. Coſſiſcher Algorithmus, die Rechnung nach den vier Speciebus mit dieſen Größen wenn ſie numeriſche Factoren haben.

Co-ſinus verſus iſt der Sinus verſus des Complements eines Winkels.

Cotangente iſt die Tangente des Complements eines Winkels. Wenn $\frac{t}{a} = \text{tang}\,\varphi$, ſo iſt . . . $\frac{a}{t} = \text{cotang}\,\varphi$. Rhäticus und Vieta nennen die Cotangente Baſis und die Tangente Perpendiculum, in Beziehung auf die Secante. Cavaleri nennt ſie in ſeiner Trigonometrie Tangens ſecunda.

Coteſiſcher Lehrſatz iſt der von Cotes erfundene Satz, eine Eigenſchaft des Kreiſes betreffend, wodurch die Factoren der Binomien $r^n - a^n$ und $r^n + a^n$ geometriſch dargeſtellt werden.

Ein mit dem Halbmeſſer OA beſchriebener Kreis (Fig. 86 und 87 Tab. VI.) werde in eine gerade Anzahl

gleicher Theile getheilt. Aus einem Puncte P des Halbmeſſers werden an die Theilungspuncte gerade Linien gezogen. Die Anzahl der Theile in dem Umfange ſey $= 2n$, der Halbmeſſer $= r$, der Abſtand $OP = a$, ſo iſt $r^n - a^n = PA \times PC \times PE \times PG \times$ etc. bis zum nten Factor; und $r^n + a^n = PB \times PD \times PF \times PH \times$ etc. bis zum nten Factor. Der Satz gilt auch, wenn P außerhalb des Kreiſes auf der verlängerten OA liegt. Es iſt alsdann $a^n - r^n$ anſtatt $r^n - a^n$ zu ſetzen.

Der Beweis des Satzes beruht auf der analytiſchen Zerlegung der Formeln $r^n - a^n$, und $r^n + a^n$ in Doppelfactoren, jene mit dem einfachen $r - a$, dieſe mit dem einfachen $r + a$, wenn n ungerade iſt. In dem Artikel, Anwendung der Geometrie auf die Algebra (S 162.) iſt gefunden, daß die Formeln $r^n - a^n$, und $r^n + a^n$ Doppelfactoren von der Form $r^2 - 2ra\cos\varphi + a^2$, an der Zahl $\frac{1}{2}n$, oder $\frac{1}{2}(n-1)$, haben, wo φ die Form $\frac{2k\pi}{n}$ für die Formel $r^n - a^n$, und die Form . . $\frac{2k+1}{n}\pi$ für die Formel $r^n + a^n$ hat. Das dortige x iſt hier r. Man ziehe an jeden Theilungspunct den Halbmeſſer, wie CO an C, ſo iſt . . . . $PC^2 = OC^2 - 2OC \times OP.\cos COP + OP^2$, wo das zweyte Glied additiv iſt, wenn COP zwiſchen einem und drey Rechten iſt, wegen der negativen Beſchaffenheit des Coſinus in dieſem Falle. Man bezeichne jede der Linien, wie PC, durch z, und jeden Winkel, wie COP, durch φ, ſo iſt $z^2 = r^2 - 2ra\cos\varphi + a^2$. Dieſer Werth von z^2 iſt gleich einem der Doppelfactoren von $r^n - a^n$, wenn z eine der Linien PA, PC, PE, etc. bedeutet, die an Theilungspuncte mit einer ungeraden Stellenzahl gezogen ſind. Denn da der W. $AOB = \frac{\pi}{n}$ iſt, ſo iſt . $AOC = \frac{2\pi}{n}$; $AOE = \frac{4\pi}{n}$; $AOG = \frac{6\pi}{n}$; u. ſ. f.

ſo daß φ die Form $\frac{2k\pi}{n}$ hat, die für die Formel $r^n - a^n$ gehört. Nimmt man für z eine der Linien PB, PD, PF, etc. zu Theilungspuncten mit geraden Stellenzahlen, ſo iſt z^2 einer der Doppelfactoren der Formel $r^n + a^n$. Denn es iſt $AOB = \frac{\pi}{n}$; $AOD = \frac{3\pi}{n}$; $AOF = \frac{5\pi}{n}$, etc. welche Winkel die Form $\frac{2k+1}{n}\pi$ haben, die für die Formel $r^n + a^n$ gehört. Die Anzahl der Factoren z iſt n, wie in den beiden Formeln. Die Factoren ſind, auſſer den beiden $r - a$ und $r + a$, paarweiſe gleich groß vorhanden, indem jedem z^2 in der Zeichnung ein quadratiſcher Factor der Formel entſpricht. In der Gleichung $r^n - a^n = 0$, hat r ſowohl $+a$ als $-a$ zu Werthen, wenn n gerade iſt, alſo hat die Formel $r^n - a^n$ die Factoren $r - a$ und $r + a$. Eben dieſe ſind für z die Werthe PA und PG auf dem Durchmeſſer (Fig. 87.). Für ein ungerades n erhält in eben dieſer Gleichung r nicht den Werth $-a$, und die Formel nicht den Factor $r + a$, ſo wie auch für z kein zweyter Werth, auſſer $PA = r - a$, auf den Durchmeſſer ſelbſt fällt. Die Formel $r^n + a^n$ hat für ein gerades n keinen Factor $r - a$ oder $r + a$, ſo wie in dieſem Falle auch kein Werth von z auf dem Durchmeſſer durch A liegt. Für ein ungerades n iſt der Factor $r + a$ vorhanden, und z hat einen Werth, der auf dem Durchmeſſer genommen wird, wie PF (Fig. 86).

Der Punct P kann auch über A hinaus geſetzt werden. Es bleibt, wie vorher, $zz = rr - 2ra \cos\varphi + aa$. Die Formel $r^n + a^n$ hat dieſen Doppelfactor, ohne Unterſchied, ob r oder a das größere von beiden ſey.

Cotes war ein vorzüglicher Mathematiker in England, der im 34ſten Jahre ſeines Alters, 1716, ſtarb. Newton bedauerte ſeinen frühzeitigen Tod mit den Worten: Wenn Cotes länger gelebt hätte, würden wir noch

von ihm etwas gelernt haben. Smith, der Herausgeber einiger nachgelaſſenen Schriften von Cotes, unter dem Titel, Harmonia menſurarum, 1722, hat den Lehrſatz daſelbſt pag. 114. mitgetheilt, aber ohne Beweis. Pemberton hat in einer epiſtola ad amicum de Coteſii inventis, 1722 einen Beweis davon gegeben, der aber durch ſeine Weitläuftigkeit ermüdet. Walmessley, der jenes Werk neu bearbeitet unter dem Titel: Analyſe des meſures, des rapports et des angles, ou Reduction des Integrales aux logarithmes et aux Arcs de Cercle, 1753, herausgegeben hat, giebt daſelbſt pag. 82 ff. einen Beweis, in welchem aber noch manches zu ergänzen iſt. Joh. Bernoulli hat einen leichtern Beweis aufgeſetzt, der in ſeinen Werken T. IV. p. 67 zu finden iſt. Dieſen habe ich abgekürzt und zugleich allgemeiner gemacht, in meiner analytiſchen Trigonometrie S. 96. ff. vorgetragen. Der hier gegebene Beweis gründet ſich auf die analytiſche Zerlegung der Formeln $x^n - a^n$ und $x^n + a^n$, welche durch Hülfe der Rechnung mit unmöglichen Größen aus den Formeln für den Sinus und Coſinus des Vielfachen eines Winkels hergeleitet iſt. Dieſe Art der Rechnung gewährt immer beträchtliche Abkürzungen, wenn gleich darin Formen von Größen aufgenommen werden, die ihr eigenes Geſetz, von dem für die andern Größen geltenden Geſetze verſchiedenes, haben. Es iſt gut, merkwürdige Beyſpiele von dieſem Rechnungs-Verfahren zu erhalten.

Moivre erweiterte den Coteſiſchen Lehrſatz auf die dreytheiligen Functionen von der Form . . . . $r^{2n} - 2a^n r^n. \operatorname{coſ}.\alpha + a^{2n}$. Miſcellanea Analytica p. 22. 23. Eine Conſtruction dieſer Factoren iſt folgende.

Es werde mit dem Halbmeſſer $AO = r$ (Fig 88.) ein Kreis beſchrieben. Auf dieſem nehme man den Bogen

$AM = \alpha$, und $AB = \frac{1}{n}\alpha$, hier $\frac{1}{5}AM$. Von B

aus tragen man die Bogen BC, CD, DE, EF, etc. jede $\frac{2\pi}{n}$, oder theile den Umfang von B aus in n gleiche Theile. Auf OA (oder auf der Verlängerung über A hinaus) nehme man OP = a, und ziehe PB, PC, PD, PE, PF, etc. ſo iſt das Product $PB^2 \times PC^2 \times PD^2 \times PE^2 \times PF^2 \times \text{etc.} = r^{2n} - 2a^n r^n \cos\alpha + a^{2n}$, ſo daß die Anzahl jener Quadrate = n iſt.

Denn man ziehe an einen der Theilungspuncte, wie C, den Halbmeſſer OC, ſo iſt $PC = OC^2 - 2OC \times OP \times \cos COP + OP^2$, das iſt $PC^2 = r^2 - 2ar\cos\frac{2\pi+\alpha}{n} + a^2$, für den erſten Theilungspunct C nach B. Setzt man jede der Linien, wie PC iſt, z, ſo iſt . . . . .

$$z^2 = r^2 - 2ar\cos\frac{2k\pi+\alpha}{n} + a^2.$$

Es iſt in dem Artikel, Anwendung der Geometrie auf die Algebra, VII. S. 163. gezeigt, daß dieſes die Form der quadratiſchen Factoren der Function $r^{2n} - 2a^n r^n . \cos\alpha + a^{2n}$ iſt. Man ſondere nur den Factor a^{2n} ab, und ſetze $\frac{r}{a} = x$, um die dortige Formel zu erhalten. Alſo iſt z^2 ein Factor dieſer Function. Da der aus P gezogenen Linien Anzahl = n iſt, ſo iſt das Product ihrer Quadrate die Function, als welche auch n quadratiſche Factoren hat.

Man kann auch die Theilungspuncte des Umfanges von B aus abwechſelnd nach der einen und der andern Seite tragen. So wird F der zweyte, D der dritte, E der vierte Theilungspunct, in dem Falle der Figur. In dieſem erhält man dieſelbe Lage für die Linie PF, man mag von A über B hinaus den Bogen $\frac{8\pi+\alpha}{5}$, oder nach entgegengeſetzter Seite den Bogen $\frac{2\pi-\alpha}{5}$ tragen; gleich-

falls für PE dieſelbe Lage, man mag von A aus nach jener Seite hin den Bogen $\frac{6\pi+\alpha}{5}$, oder nach dieſer den Bogen $\frac{4\pi-\alpha}{5}$ tragen. Allgemein, der Bogen $\frac{2k\pi+\alpha}{n}$ von A über B hinaus genommen, und $\frac{2(n-k)\pi-\alpha}{n}$ nach der andern Seite hin, geben als gegenſeitige Complemente der ganzen Peripherie dieſelbe Lage für die aus P gezogene Linie.

Anſtatt die einfache Peripherie des Kreiſes in n gleiche Theile zu theilen, kann man auch jedes Vielfache derſelben in n gleiche Theile theilen. Es ſey $AM=\alpha$; BC, oder CD, oder DE u. ſ. f. $=\frac{2k\pi}{n}$, wo k eine ganze Zahl iſt, ſo iſt $AC=\frac{2k\pi+\alpha}{n}$; $AD=\frac{4k\pi+\alpha}{n}$; $AE=\frac{6k\pi+\alpha}{n}$, u. ſ. f. und die Werthe des

$\cos\frac{AM}{n}$ ſind $\cos AB$; $\cos AC$; $\cos AD$; $\cos AE$;

etc. da, wenn ein Winkel α, der durch ſeinen Coſinus gegeben wird, in n gleiche Theile zu theilen iſt, der Coſinus des nten Theils iſt $\cos.\frac{\alpha}{n}$; $\cos\frac{2\pi+\alpha}{n}$; $\cos\frac{4\pi+\alpha}{n}$, u. ſ. f. Aus allen dieſen Coſinus kann man die verſchiedenen, in welcher Ordnung man will, herausnehmen.

Um die Entſtehung der Formel $PB^2\times PC^2\times PD^2\times$ etc. $=r^{2n}-2a^nr^n\cos\alpha+a^r$ auch unabhängig

von der Rechnung des Unmöglichen einzuſehen, wollen wir ſie in zwey Beyſpielen, für ein ungerades und für ein gerades n, durch bloße goniometriſch-algebraiſche Rechnung herausbringen.

Es ſey erſtlich $n = 5$, und die Peripherie ſey in fünf gleiche Theile, BC, CD, DE, EF, FB, getheilt Nun iſt

$$PB^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\frac{\alpha}{n}$$

$$PC^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\frac{2\pi + \alpha}{n}$$

$$PD^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\frac{4\pi + \alpha}{n}$$

$$PE^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\frac{6\pi + \alpha}{n}$$

$$PF^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\frac{8\pi + \alpha}{u}$$

Das Aggregat dieſer Coſinus ſey $= A$; das Aggregat ihrer Binionen, Ternionen, Quaternionen, und das Product aller ſeyn B, C, D, E. Es iſt $PB^2 \times PC^2 \times PD^2 \times PE^2 \times PF^2 = (r^2 + a^2)^5 - (r^2 + a^2)^4 . 2arA + (r^2 + a^2)^3 . 4a^2r^2 . B - (r^2 + a^2)^2 . 8a^3r^3 . C \ldots + (r^2 + a^2) . 16a^4r^4 . D - 32a^5r^6 . E$. Ferner iſt wenn x einen jede dieſer Coſinus bedeutet, (Goniometrie, IV. 69.)

$$16x^5 - 20x^3 + 5x - \cos\alpha = 0.$$

Hier iſt das Aggregat der Wurzeln $x = 0$. Das Aggregat ihrer Binionen $= -\frac{20}{16}$; der Ternionen $= 0$; der Quaternionen $= + \frac{5}{16}$, das Product aller $= + c$… (Gleichung, VI. 6.). Folglich iſt $A = 0$; $B = - \frac{2}{16}$

$C = 0$; $D = +\frac{5}{16}$; $E = \frac{1}{16}\cos\alpha$. Demnach iſt das Product $PB^2 \times \ldots \times PF^2 = (r^2 + a^2)^5 - 5a^2r^2(r^2+a^2)^3 + 5a^4r^4(r^2+a^2) - 2a^5r^5\cos\alpha$, $= r^{10} + a^{10} - 2a^5r^5\cos\alpha$, wie nach der aufgeſtellten Formel.

Zweytens ſey $n = 6$, und die Peripherie ſey in ſechs gleiche Theile getheilt. Die Quadrate der aus einem Puncte P des Durchmeſſers wie vorher an die Theilungspuncte gezogenen Linien ſind I. $r^2 + a^2 - 2ar\cos\frac{\alpha}{6}$;

II. $r^2 + a^2 - 2ar\cos\frac{2\pi+\alpha}{6}$ . . . .

VI. $r^2 + a^2 - 2ar\cos\frac{10\pi+\alpha}{6}$. Die Gleichung für die Coſinus dieſer Winkel iſt

$$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - (1+\cos\alpha) = 0.$$

Die Summe der Unionen, der Ternionen und der Quinionen der Wurzeln dieſer Gleichung oder jener Coſinus iſt $= 0$. Die Summe der Binionen iſt $= -\frac{48}{32} = B$; der Quaternionen $= +\frac{18}{32} = D$; das Product aller ſechs $= -\frac{1+\cos\alpha}{32} = F$. Nun iſt das Product von den Quadraten der ſechs aus P an die Theilungspuncte gezogenen Linien $= (r^2+a^2)^6 + (r^2+a^2)^4 . 4a^2r^2 . B + (r^2+a^2)^2 . 16a^4r^4 . D + 64a^6r^6 . F$, und durch die gefundenen Werthe von B, D, F iſt dieſes Product $= (r^2 + {}^2)^6 - 6a^2r^2(r^2+a^2)^4 + 9a^4r^4(r^2+a^2)^2 - 2a^6r^6(1+\cos\alpha)$. Entwickelt iſt daſſelbe $= r^{12} - 2a^6r^6\cos\alpha + a^{12}$.

Da die Producte von den Quadraten der aus P an den Umfang gezogenen Linie nach einem und demſelben Geſetze gemacht werden, was auch die Zahl n für einen Werth habe, und da ferner die Coefficienten von x in der Gleichung für $\cos \alpha$, woraus die Combinationen in jenem Producte gebildet ſind, auch ein beſtimmtes Geſetz der Formation aus n beobachten, ſo darf man aus den beiden Entwickelungen des Products für $n = 5$ und $n = 6$ ſchließen, daß überhaupt die Quantität von n nur die Potenzen von r und a beſtimme, und daher alles bis auf die drey Glieder $r^{2n} - 2a^n r^n \cos \alpha + a^{2n}$ ſich aufhebe, ſo daß die gefundene Form des Products allgemein iſt. — Daß a noch größer als r ſeyn dürfe, ergiebt die geführte Rechnung durch die Formeln für PB^2, PC^2, etc.

Wenn $AM = 0$, alſo auch $AB = 0$ geſetzt wird, ſo iſt $\cos \alpha = + 1$, und das Product von den Quadraten der aus P gezogenen Linien iſt $= r^{2n} - 2a^n r^n + a^{2n} = (r^n - a^n)^2$, alſo iſt das Product jener Linien $= r^n - a^n$.

Setzt man $AM = \pi$, dem halben Umfange, alſo $AB = \frac{\pi}{n}$ ſo iſt $\cos \alpha = - 1$, und das Product der Quadrate, $PB^2 \times PC^2 \times$ etc. $= r^{2n} + 2a^n r^n + a^{2n} = (r^n + a^n)^2$, alſo das Product $PB \times PC \times$ etc. $= r^n + a^n$.

So erhält man die beiden zuerſt betrachteten Fälle, deren Unterſchied aus der beide begreifenden Anordnung einleuchtender wird.

Setzt man $AM = \frac{1}{2}\pi$, ſo iſt $AB = \frac{\pi}{2n}$, und $PB^2 \times PC^2 \times$ etc. $= r^{2n} + a^{2n}$.

Das hier angewandte Verfahren bey der Entwickelung des Products $PB^2 \times PC^2 \times$ etc. hat einiges ähnliche mit dem von Thomas Simpſon gebrauchten, in den Eſſays on ſeveral ſubjects in ſpeculative and mix'd Mathematicks. London 1740. pag. 113 ſeqq.

Die trigonometriſch-algebraiſche Rechnung daſelbſt iſt noch nicht genug geſchmeidig, wie es zu der Zeit, da das Buch geſchrieben ward, noch nicht anders ſeyn konnte.

Der Beweis, welchen Krafft in den Comm. Petrop. novis, Tom. I. pag. 134, vorgetragen, beruhet bloß auf Induction von drey Fällen bey der Eintheilung des Umfanges in 4, 6, 8 gleiche Theile, und iſt zur Erläuterung des Bernoulliſchen Beweiſes beſtimmt. Der hier zuletzt von mir gegebene iſt davon ganz verſchieden.

Cubatur, ſ. Cubirung.

Cubikcubiſche Wurzel, radix cubo-cubica, iſt die Wurzel vom ſechſten Grade aus einer Zahl, z. B. 2 aus 64; 3 aus 729. Sie wird bezeichnet durch $\sqrt[6]{a}$ oder $a^{\frac{1}{6}}$. Sie wird durch Hülfe des binomiſchen Lehrſatzes für gebrochne Exponenten, oder durch eine Annährungs-Methode gefunden. S. Wurzel.

Cubikcubiſche Zahl, Cubo-Cubus, iſt die ſechſte Potenz einer Zahl, oder das Product aus einem Cubus in ſich ſelbſt. Sie wird bezeichnet durch a^6, wenn a die Wurzel iſt.

Cubik-Einheit iſt der Cubus oder Würfel, womit in der praktiſchen Geometrie die Körper gemeſſen werden. Dieſe iſt der Würfel derjenigen Linie, womit die Längen gemeſſen werden. Iſt die Längen-Einheit ein Fuß, ein Zoll, eine Linie (der zehnte oder zwölfte Theil eines Zolles), oder eine Klafter, eine Ruthe, eine Meile, ſo iſt die Cubik-Einheit ein Cubikfuß, Cubik-(Zoll, Linie, Klafter, Ruthe, Meile). Die Cubik-Einheiten verhalten ſich wie die Cubikzahlen der Längen-Einheiten. Wird der Fuß in 10 Zolle, der Zoll in 10 Linien getheilt, ſo enthält ein Cubikfuß 1000 Cubikzoll, und der Cubikzoll 1000 Cubiklinien. Die Cubik-Einheiten von gleichnamigen Längen-Einheiten verhalten ſich ebenfalls wie die

Cubikzahlen der letztern. Z. B. Wenn der alte Pariſer Fuß und der Rheinländiſche ſich verhalten wie 80 : 29, ſo verhalten ſich der Pariſer und Rheinl. Cubikfuß wie 27000 : 24389. Wenn ſich die altfranzöſiſche Lieue und die geographiſche Meile verhalten wie 3 : 5, ſo verhalten ſich die Cubik-Einheiten wie 27 ; 125.

Cubik-Tafeln ſind Tafeln, worin die Cubi oder Würfelzahlen der ganzen Zahlen nach ihrer Folge angegeben werden. Dergleichen ſind, Joh. Pauli Buchneri tabula radicum, quadratorum et cuborum ad radicem 12000 extenſa. Norib. 1701. Sie ſind voller Fehler. Joh. Ludolfi Tetragonometria tabularia, Jenae 1712 enthält die Würfel der Zahlen bis 10000, die Quadrate bis zu der Wurzel 100000. In des mathematiſchen Lexici (des vermehrten Wolfiſchen) zweytem Theil, Leipzig 1742, ſind die Quadrate und Würfel aller Zahlen von 1 bis 10000 verzeichnet. Dieſe ſcheinen correct zu ſeyn. In Vega's logarithmiſchen und trigonometriſchen Tafeln, Band II. ſind ſie auch enthalten.

Die Richtigkeit der Angaben kann man bequem durch die Neunerprobe erfahren, vorausgeſetzt, daß nicht zwey entgegengeſetzte Druckfehler zugleich vorhanden ſind. Die Probezahl heiße der Überſchuß der Summe der Ziffern über ein Vielfaches von Neun. So gehören zuſammen:

Probezahl für die Wurzel	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8.
Probezahl für die Würfel	0,	1,	8,	0.	1,	8,	1,	0,	8,

Z. B. von der Zahl 2821 iſt der Würfel 22449 633661. Jene hat zur Probezahl 4, dieſe 1.

Die Verfertigung der Cubiktafeln geſchieht durch Addition der Glieder der Differenzreihen. Es iſt in der Buch-

ſtabenrechnung (21,) gezeigt, daß die dritten Unterſchiede der Würfel, deren Wurzeln eine arithmetiſche Progreſſion mit dem Unterſchiede d ausmachen, die beſtändige Zahl $6d^3$ ſind. In dem gegenwärtigen Falle ſind die dritten Unterſchiede = 6. Die zweyten Unterſchiede ſind daher, von Anfange an, die arithmetiſche Reihe 12, 18, 24, etc. Daraus und dem Anfangsgliede 7, entſteht die arithmetiſche Reihe der zweyten Ordnung 7, 19, 37, 61, etc. und daraus die Reihe der Würfel 1, 8, 27, 64, 125, etc. als eine arithmetiſche Reihe der dritten Ordnung.

Cubikwurzeln aus den erſten 1000 Zahlen bis auf Zehnmillionentheile berechnet, finden ſich in Schulzens und in Vega's Tafeln.

Die Cubiktafeln erleichtern die Ausziehung der Wurzeln, weil man durch ſie den erſten Theil der Wurzel in drey oder vier Ziffern findet. Z. B. von der Zahl 14907 iſt die Cubikwurzel 24, 61 . . . weil 14907 000000 zwiſchen die Würfel von 2461 und 2462 fällt, alſo jene Zahl zwiſchen die Würfel von 24, 61 und 24, 62.

Cubikwurzel aus einer Zahl iſt einer von den drey gleichen Factoren einer Zahl. Die gemeinſte Art, die Cubikwurzel aus einer Zahl zu ziehen, iſt folgende. 1) Die gegebene ganze Zahl wird in Claſſen getheilt, den Anfang mit der niedrigſten rechter Hand gemacht. In der höchſten Claſſe linker Hand mögen zwey oder nur eine Ziffer bleiben. Die Wurzel bekommt ſo viele Ziffern als Claſſen vorhanden ſind. 2) Man ſuche die einziffrige Zahl, deren Wurzel der Zahl in der höchſten Claſſe am nächſten kommt, und kleiner iſt, wenn ſie nicht etwa dieſelbe ſeyn ſollte. Diſe Zahl iſt der erſte Theil der Wurzel. Sie heiße A. Ihren Würfel ziehe man ab von der Zahl in der höchſten Claſſe. 3) Zu dem Reſte ſetze man die Ziffern der zweyten Claſſe, und dividire die Zahl, welche aus dem Reſte in der erſten Claſſe nebſt der höch-

ſten Ziffer der zweyten beſteht, durch das Dreyfache des Quadrats von A, oder 3 A A, der Quotient iſt der zweyte Theil der Wurzel, B, wenn ſich die gleich zu erwähnen, den beiden Theile an ihren Stellen noch abziehen laſſen. Sonſt iſt B um Eins kleiner als jener Quotient. 4) Das Product 3 A A B ſetze man mit der niedrigſten Ziffer unter die höchſte Ziffer der zweyten Claſſe, darauf die niedrigſte Ziffer des Products 3 A A B unter die mittelſte Ziffer derſelben Claſſe, und endlich den Würfel von B, oder B B B mit der niedrigſten Ziffer unter die letzte Ziffer eben dieſer Claſſe Alle drey Producte ziehe man von der in den beiden erſten Claſſen übrig gebliebenen Zahl ab. 5) Zu dem Reſte nehme man die drey Ziffern der dritten Claſſe von der linken Hand gerechnet. Nun verfährt man, um die dritte Ziffer der Wurzel, C, zu finden, eben ſo wie für B. Anſtatt A hat man nun $A + B$. Es wird alſo der Reſt der beiden erſten Claſſen nebſt der erſten Ziffer der dritten durch $3(A + B)^2$ dividirt; der Quotient iſt C, mit der Einſchränkung bey nr. 3. Die Producte $3(A + B)^2 C$; $3(A + B)C^2$ und C C C werden auf dieſelbe Art wie in nr. 4 hingeſetzt, und abgezogen. So wird fortgefahren, bis daß man zu der Claſſe der Einer kommt.

Exempel.	Zahl			Wurzel
	7 8	9 5 3	7 4 6	4 2 9
	6 4			
48)	1 4	9 5 3		
	9	6 . .		
		4 8 .		
		8		
5 2 9 2)	4	8 6 5	7 4 6	
	4	7 6 2	8 . .	
		1 0 2	0 6 .	
			7 2 9	
Reſt			1 5 7	

Die gegebene Zahl iſt um 157 größer als der Würfel von 429.

Die Probezahl von dem Cubus der gefundenen Wurzel plus der Probezahl des Reſtes iſt der Probezahl der vorgegebenen Zahl gleich, oder derſelben um 9 vergrößert. Hier iſt o + 4 = 4.

Dieſe Zerlegung einer Zahl in drey gleiche Factoren beruht auf der Zuſammenſetzung derſelben (Syntheſis) aus ihren gleichen Factoren. S. Cubus.

Um die Wurzel, wenn ſie ſich nicht unter den ganzen Zahlen findet, in Decimaltheilen zu erhalten, hängt man ſo viele Ternen von Nullen an, als man Decimalziffern ſuchen will, und verfährt ganz auf die vorher gewieſene Weiſe.

Denn ſo wie der Cubus eines Bruchs der Cubus des Zählers dividirt durch den des Nenners iſt, ſo iſt auch die Cubikwurzel aus einem Bruche die Cubikwurzel aus dem Zähler dividirt durch die aus dem Nenner. Die Anhängung

der Nullen iſt eine Multiplication mit 1000, oder 1000 000, u. ſ. f. Dagegen muß man ſich eben dieſe Multiplicatoren auch als Diviſoren des Products gedenken, und aus dieſen die Wurzel ziehen.

Exempel.

		7 8 9 5 3 7 4 6	‖ 4 2 9, 0 2	
$429^3 =$		7 8 9 5 3 5 8 9		
	1 5 7	0 0 0	0 0 0.	
5 5 2 1 2 3)	1 1 0	4 2 4	6 . .	
		5 1	4 8 .	
			8	
Reſt	4 6	5 2 3	9 1 2	

Aus dieſem Exempel erſieht man zugleich, wie man ſich durch Cubiktafeln die Arbeit abkürzen kann. Der Cubus von 429 iſt unmittelbar aus einer ſolchen Tafel genommen.

Die vorher angeführte Probe giebt $8 + 5 = 4 + 9$.

Wenn die Zahl, woraus die Cubikwurzel gezogen werden ſoll, Decimaltheile enthält, ſo muß die Abtheilung in Claſſen bey dem Komma, oder den Einern, angefangen, und nach beiden Seiten hin fortgeſetzt werden. Wenn in der letzten Claſſe der Decimaltheile zwey oder eine Ziffer fehlen, ſo werden dafür Nullen geſetzt. Z. B. in der Zahl 3879,7835, welche ſo abgetheilt und ergänzt wird: 3|879,|783|500. Die Zahl mit den Decimaltheilen iſt anzuſehen als der Zähler eines Bruchs, deſſen Nenner die Einheit mit dreymahl ſo viel Nullen iſt, als Claſſen rechter Hand des Komma ſind. Die Wurzel aus jener ganzen Zahl iſt durch die Wurzel aus dem Nenner zu dividiren. In dem Exempel iſt die Wurzel 15, 71 . . .

Das gemeine Verfahren wird aber bald beſchwerlich. Leichter iſt die Annäherungs-Methode, welche auch bey Auflöſung algebraiſcher Gleichungen gebraucht wird. Ein Beyſpiel wird ſie hinlänglich lehren.

Es ſey die Cubikwurzel aus 2 bis auf die zehnte Decimalſtelle zu finden. Die Tafeln zeigen, daß ſie ein weniges kleiner iſt als 1,26. Man ſetze $\sqrt[3]{2} = 1,26 - u$, ſo iſt

$$2 = 2,000376 - 4,7628\,u + 3,78\,u^2 - u^3,$$

alſo

$$4,7628\,u = 0,000376 + 3,78\,u^2 - u^3.$$

Das gegebene Glied durch den Factor von u dividirt giebt zum Quotienten 0,00007894515. Alſo iſt u nahe 0,00008, und $3,78\,u^2$ nahe $\overset{-9}{24}$, wo die -9 über 4 ihre Stelle nach dem Komma bezeichnet. Das zweyte Glied jener Gleichung hat alſo erſt auf die 8te Decimalſtelle von u Einfluß, ſo daß u bis auf die 7te Decimalſtelle richtig iſt, oder $u = 0,0000789$, alſo . . .

$3,78\,u^2 = \overset{-12}{23530}$, und die Ergänzung von . . .

$u = +\overset{-11}{494}$, ſo daß $u = 0,00007895009$, und

$\sqrt[3]{2} = 1,25992104991$, faſt übereinſtimmig mit dem in dem Artikel, Binomiſcher Lehrſatz, (16.) Exempel III. gefundenen Werthe.

Eine bequeme Näherungsformel iſt folgende, deren Beweis in dem Artikel, Wurzel, gegeben wird. Es ſey N die Zahl, woraus die Cubikwurzel gezogen werden ſoll, und a ein naher Werth der Wurzel, welchen man durch Hülfe der Logarithmen finden mag, oder durch die Cubiktafeln erhält. Wenn nun $N = a^3 + b$ iſt, ſo iſt nahe

$$\sqrt[3]{N} = a + \frac{b}{3a^3 + b}\,a + \frac{2}{81}\cdot\frac{b^3}{a^9}\,a.$$

Iſt a^3 größer als N; ſo iſt b negativ. Setzt man für a die nach dieſer Formel gefundene Wurzel, ſo weit man ſie für richtig hält, ſo wird b gegen a viel kleiner, und die Wurzel wird viel genauer gefunden.

Exempel. Die Cubikwurzel aus 2 zu finden. Man ſuche ſtatt dieſer die Cubikwurzel aus 2.64 oder aus 128. Hier iſt $a^3 = 125$, und $b = 3$; alſo der erſte Theil der Formel $= 5$; der zweyte $= 0{,}03968254 \ldots$; der dritte $= 0{,}00000171 \ldots$ und $\sqrt[3]{128} = 5{,}0396842 \ldots$, alſo $\sqrt[3]{2} = 1{,}2599210 \ldots$ übereinſtimmig mit der Rechnung. S. 336.

Lagny gab zur Ausziehung der Cubikwurzel die beiden Formeln an: $a + \frac{ab}{3a^3 + b}$, und . . . $\frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{b}{3a})}$. Man ſehe Halleys Abhandlung über die Annäherung zu den Wurzeln einer Gleichung bey Newtons Arithm. univerſ. ed. Graveſandi, p. 246.

Die Formel des binomiſchen Lehrſatzes für gebrochne Exponenten giebt den Werth der Wurzeln bis zu jeder verlangten Gränze, auch für den Quotienten der Einheit durch die Wurzel dividirt. Sie erfordert zur ſchnellern Convergenz oft einige Vorbereitung, die bey Näherungsformeln auch nöthig zu ſeyn pflegt.

Cubikwurzel aus dem Binomium $A + \sqrt{B}$ iſt einer der drey gleichen Factoren deſſelben von eben der Form, wofern es einen ſolchen giebt. Die Erfindung dieſer Wurzel hängt von der Auflöſung einer cubiſchen Gleichung ab.

Es ſey $\sqrt[3]{(A + \sqrt{B})} = (p + \sqrt{q}) \cdot \sqrt[3]{\alpha}$, ſo iſt $A = p^3\alpha + 3pq\alpha$, und $\sqrt{B} = (3p^2\sqrt{q} + q\sqrt{q})\alpha$, weil die Irrationale $\sqrt{B}$ nur einer Größe von derſelben

Form gleich ſeyn kann. Daher iſt auch . . . $A - \sqrt{B} = (p - \sqrt{q})^3 \alpha$, eben ſo wie $A + \sqrt{B} = (p + \sqrt{q})^3 \alpha$ iſt. Die Multiplication beider Gleichungen giebt $A^2 - B = (p^2 - q)^3 \alpha^2$. Folglich iſt $\frac{A^2 - B}{\alpha^2}$ ein Cubus mit einer rationalen Wurzel, wenn p und q rational ſind. Iſt $A^2 - B$ ein ſolcher Cubus, ſo ſetze man $\alpha = 1$; iſt jenes nicht, ſo hat man α ſo zu nehmen, daß $\frac{A^2 - B}{\alpha^2}$ eine rationale Cubikwurzel erhalte.

Man ſetze $\frac{A^2 - B}{\alpha^2} = n^3$, ſo iſt $n = p^2 - q$, und $q = p^2 - n$. Dieſen Werth von q ſetze man in dem Werthe von A, ſo wird erhalten

$$A = 4p^3\alpha - 3np\alpha.$$

Hat dieſe Gleichung eine rationale Wurzel, ſo läßt ſich die Cubikwurzel aus $A + \sqrt{B}$, worin A und B rational ſind, durch eine Größe von derſelben Form, $(p + \sqrt{q})\sqrt[3]{\alpha}$, die nur, wenn es nöthig iſt, die Cubikwurzel aus α enthält, darſtellen. Die Gleichung hat, wegen ihrer Coefficienten, nur eine mögliche Wurzel, wie es die Sache ſelbſt ergiebt.

Exempel. Die Cubikwurzel aus $2 \pm \sqrt{5}$ iſt $= \frac{1}{2}(\pm \sqrt{5})$. Die Cubikwurzel aus $5 \pm 3\sqrt{3}$ iſt $= (1 \pm \sqrt{3}. \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

Stifel giebt in ſeiner Ausgabe von der Coß Chriſtophs Rudolphs (S. 815.), zwey Regeln zur Ausziehung der Cubikwurzeln aus einem Binomium von obiger Form, und noch eine für den Fall, da beide Theile irrationale Quadratwurzeln ſind. Er hat ſie aus der Syntheſis eines Cubus, deſſen Wurzel eine ſolche Form hat, hergeleitet. Zum Beyſpiel, wie algebraiſche Regeln in jener Zeit vorgetragen wurden, ſetze ich die erſte mit

Stifels eigenen Worten her. Das gegebene Binomium iſt $45 + \sqrt{1682}$. „Subtrahir die quadrata der zweyer teyl von einander (als 1682 von 2025) und auſs dem reſiict extrahir radicem cubicam (als auſs 343 kompt 7) und zu der cubicwürtzel ſuch ein Zal, die zu ihr addiret gebe ein quadrat zal (als zu 7 addir 2. facit 9) doch alſo das die ſelbige addirete zal müge dividiren das quadrat deſs Surdiſchen teyls, das ein quadrat zal komme (als 2 dividiret 1682 alſo) ſo iſt denn radix quadrata deſs aggregats, der erſte teyl der cubic würtzel (als $\sqrt{9}$ das iſt 3) und radix quadrata der gefundnen zal iſt der kleyner teyl (als $\sqrt{2}$.) iſt alſo die gantze radix gefunden.“

Cubirung der Körper (Cubatio) iſt die Vergleichung ihres Inhalts mit einem gegebenen Körper, als mit einem Würfel, einem Cylinder, einer Kugel von beſtimmter Größe.

Prismen, Pyramiden, Cylinder und Kegel zu cubiren lehrt die Elementar-Geometrie. Das Verhältniß eines Prisma zu einem Würfel wird zuſammengeſetzt aus dem Verhältniſſe ihrer Grundflächen und Höhen. Eine Pyramide iſt der dritte Theil eines Prisma, deſſen Grundfläche ſo groß iſt als die Grundfläche jener, und das gleiche Höhe mit ihr hat. Cylinder laſſen ſich unmittelbar nur mit Cylindern vergleichen, doch auch mit Prismen oder einem Würfel, wenn man ſich die Kreisfläche in ein Dreyeck oder Quadrat, verwandelt gedenkt. Ein Kegel iſt der dritte Theil eines Cylinders mit derſelben Grundfläche und Höhe.

Archimedes war es, der die Kugel, das Sphäroid und das paraboliſche Konoid, auch ihre Abſchnitte zu cubiren lehrte. Sein ſcharfſinniges Verfahren zeigen ſeine beiden Bücher von der Kugel und dem Cylinder, und das Buch von den Konoiden und Sphäroiden. Vor der Erfindung der jetzigen Infiniteſimal-Rechnung wurden mancherley Körper cubirt, und zwar durch Summirungen von Reihen der Potenzen, wenn die parallelen Schnitte ſich wie Potenzen ihrer Abſtände von dem Scheitel verhielten, oder in Theile zerlegt werden konnten, die ſich wie Potenzen ver-

halten. So verfuhren Cavaleri und Wallis. Die neuere Infiniteſimal-Rechnung iſt auf dieſe Arten von Körpern nicht eingeſchränkt, und bedient ſich auch keiner Summirung.

In der Ebene der krummen Linie AMS (Fig. 89. Tab. VI.) iſt die gerade Linie AX gezogen. Eine unbeſtimmte Abſciſſe auf derſelben iſt $AP = x$, die zugehörige normale Ordinate $PM = y$. Indem ſich AS um AX dreht, beſchreibt die ebene Figur APM einen runden Körper, deſſen Inhalt aus der Gleichung zwiſchen den Coordinaten gefunden werden ſoll. Man nehme noch ein Paar Coordinaten AQ, QN, und ſetze $AQ = x + \Delta x$; $QN = y + \Delta y$. Der von APM durch eine volle Umdrehung beſchriebene Körper ſey $= Z$, der von AQN beſchriebene $= Z + \Delta Z$, die von PM und QN beſchriebenen Kreisflächen ſind πyy und $\pi(y + \Delta y)^2$, der zwiſchen beiden enthaltene Abſchnitt iſt ΔZ. Nun iſt $\Delta Z > \pi yy . \Delta x$, und $\Delta Z < \pi(y + \Delta y)^2 \Delta x$; wenn nämlich NQ größer als MP iſt, ſonſt umgekehrt. Oder: $\frac{\Delta Z}{\Delta x} > \pi yy$, und $\frac{\Delta Z}{\Delta x} < \pi(y + \Delta y)^2$. Der Differential-Quotient, der von den Veränderungen Δx, Δy, ΔZ, unabhängig iſt, iſt $\frac{dZ}{dx} = \pi yy$.

Demnach iſt das Differential eines runden Körpers $dZ = \pi yy dx$, und $Z = \pi \int yy dx$, wo das Integralzeichen keine Summe bedeutet. Es iſt alſo nur nöthig, yy durch x auszudrucken, oder auch dx durch dy mit einer Function von y verbunden.

I. Es ſey AM eine Parabel, deren Gleichung iſt $ax = yy$. Alſo iſt $dZ = \pi ax dx$, und $Z = \frac{1}{2}\pi xyy$. Die Conſt. iſt hier, wie allemahl, Null, wenn in allen Theilen des Integrals die Abſciſſe x enthalten iſt. Das Konoid iſt halb ſo groß als der Cylinder, deſſen Halbmeſſer die Ordinate PM, und Höhe die Abſciſſe AP iſt.

Es verhält ſich zu dem Kegel über derſelben Grundfläche von derſelben Höhe wie $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = 3 : 2$.

II. Es ſey wieder um AMS eine Parabel. Sie drehe ſich um die durch den Scheitel A auf AX ſenkrechte AR, wodurch ein kegelartiger Körper mit einer concaven Oberfläche entſteht, deſſen Grundfläche der von MR, einer mit AP parallelen Linie, als Halbmeſſer beſchriebene Kreis iſt. Hier iſt $dZ = \pi xx dy$, wenn die Ordinate MR durch x und die Abſciſſe AR durch y bezeichnet werden, um die Symbolen der Linien nicht zu ändern. Für x^2 der gehörige Werth geſetzt, iſt $dZ = \frac{\pi y^4}{aa} dy$; alſo $Z = \frac{\pi y^5}{5aa} = \frac{1}{5}\pi xxy$. Dieſes Konoid verhält ſich zu dem Kegel über derſelben Grundfläche und von derſelben Höhe wie 3 : 5.

Anders: es iſt $\sqrt{ax} = y$ oder $a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} = y$, alſo $\frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}dx = dy$, und $dZ = \frac{1}{2}\pi a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}dx$. Daher $Z = \frac{1}{5}\pi a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{5}\pi x^2 y$.

III. Es ſey AMS (Fig. 90.) eine Hyperbel, deren Scheitel A, Mittelpunct C iſt, die Abſciſſenlinie liegt in der Verlängerung von CA. Die halbe Hauptaxe ſey $= a$; die Nebenaxe $= b$; die Coordinaten AP $= x$, und PM $= y$. Die Gleichung für die Hyperbel iſt: $\frac{bb}{aa}$ 2ax + xx) = yy. Alſo iſt . . . . . .

$dZ = \frac{\pi bb}{aa}(2ax + xx)dx$; Folglich . . .

$Z = \frac{\pi bb}{aa}(ax^2 + \frac{1}{3}x^3) = \frac{\pi bbx}{3aa}(3ax + xx)$

$= \frac{\pi xy^2}{3} + \frac{\pi bbxx}{3a}$. Der erſte Theil iſt der von

dem Dreyecke APM beſchriebene Kegel, der zweyte Theil alſo der Körper, welchen das Segment AM beſchreibt.

Es verhält ſich der konoidaliſche Abſchnitt zu dem Kegel, wie $3a + x : 2a + x$. So vergleicht Archimedes beide Körper.

IV. Es ſey CR ſenkrecht auf AC, und MQ parallel mit AC. Die Hyperbel drehe ſich um CR. Es ſoll der Inhalt des von der Figur CAMQ beſchriebenen, cylinderartigen Körpers (Cylindroides) gefunden werden. Es ſey $QM = CP = u$, $CQ = MP = y$, ſo iſt $b^2 u^2 = a^2 y^2 + a^2 b^2$, und $dZ = \pi u^2 dy$ . . .

$$= \frac{\pi a a}{b b}(y^2 + b^2) dy, \text{ alſo iſt } Z = \frac{\pi a a}{b b}(\tfrac{1}{3} y^3 + b^2 y)$$

$$= \frac{\pi a a y}{3 b b}(y^2 + 3 b^2) = \tfrac{2}{3}\pi a^2 y + \tfrac{1}{3}\pi u^2 y.$$ Der erſte Theil iſt Zweydrittheil des Cylinders, welchen das Rechteck CALQ um CQ beſchreibt, der zweyte Theil gleich dem von dem Dreyeck CQM beſchriebenen Kegel.

Oder $Z = \pi a^2 y + \tfrac{1}{3}\pi y (u^2 - a^2)$, wo der erſte Theil der von dem Rechteck CALQ beſchriebene Cylinder iſt.

V. Es iſt AMS (Fig. 91.), eine Hyperbel, CT eine ihrer Aſymptoten, um welche ſich der Schenkel AS drehet. Man ſuche den Inhalt des von AEPM beſchriebenen Körpers, wo AE und MP ſenkrecht auf die Aſymptote ſtehen. Es ſey durch A auf AC, die ſenkrechte BAb, welche die Aſymptote CT in B, und die andere Aſymptote Ct in b ſchneide, ſo iſt $AB = b$. Die Linie CB ſey $= 2c = \sqrt{(a^2 + b^2)}$. Man ziehe AD parallel mit Ct, ſo iſt $CD = \tfrac{1}{2} CB = c$, und auch $AD = c$. Ferner ziehe man MQ parallel mit AD, ſo iſt aus der Natur der Hyperbel: $CD \times AD = CQ \times QM$. Der Winkel BCb ſey $= \alpha$, ſo iſt $QM = \frac{PM}{\sin\alpha} = \frac{y}{\sin\alpha}$;

Ferner $PQ = \frac{PM}{\text{tang}\,\alpha} = \frac{y}{\text{tang}\,\alpha}$. Jene Gleichung verwandelt ſich alſo in dieſe: $c^2 = (x - \frac{y}{\text{tang}\,\alpha})\frac{y}{\sin\alpha}$, oder, $c^2. \sin\alpha^2 = xy\sin\alpha - y^2\cos\alpha$. Es iſt $c. \sin.\alpha = AD. \sin ADE = AE$. Setzt man $AE = e$, ſo iſt

$$e^2 = xy\sin\alpha - y^2\cos\alpha;$$

$$\frac{e^2}{y\sin\alpha} + \frac{y\cos\alpha}{\sin\alpha} = x.$$

Das Differential des von AEPM beſchriebenen Körpers Z iſt $dZ = \pi y^2 dx$, alſo $dZ =$ . . . . $\pi\left(\frac{y^2\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{e^2}{\sin\alpha}\right)dy$. Folglich $Z = \text{Const.} - \frac{\pi y}{3\sin\alpha}(3e^2 - y^2\cos\alpha)$. Es iſt $Z = o$, wenn $y = AE = e$ iſt. Daher iſt . . . . .

$$\text{Const.} = \frac{\pi e^3(3 - \cos\alpha)}{3\sin\alpha}, \text{ und}$$

$$Z = \frac{\pi}{3\sin\alpha}((3 - \cos\alpha)e^3 - 3e^2y + y^3\cos\alpha).$$

Der ganze ins Unendliche fortgeſetzte Körper, deſſen Axe die Aſymptote von E an iſt, iſt $= \frac{\pi(3 - \cos\alpha)}{3\sin\alpha}e^3$, oder die Conſtans.

Für die gleichſeitige Hyperbel, an welcher $AB = AC$; $\alpha = 90°$, und $c = e$ iſt, iſt $Z = \pi c^2(c - y,)$ und der ganze Körper von E an iſt $= \pi c^3$.

Torricelli hat dieſen Körper ſchon betrachtet, und nennt ihn solidum hyperbolicum acutum. Eine ausführliche Unterſuchung deſſelben ſteht in ſeinen Operibus geometricis. Er vergleicht den Inhalt des

Stückes PMST mit einem Cylinder und einem Kegel.

Es iſt Solidum PMST $= \frac{\pi}{3 \sin \alpha}(3 e^2 y - y^3 \cos \alpha)$ $= \pi y^2 (x - y \cot \alpha) - \frac{1}{3} \pi y^2 . y \cot \alpha$. Der erſte Theil iſt ein Cylinder, der zweyte ein Kegel.

VI. Es ſey SAS (Fig. 92.) der Schnitt eines paraboliſchen Konoids durch die Axe AX, alſo eine Parabel; und MN der Durchſchnitt der Ebene SAS mit einer andern ſchneidenden Ebene, auf welche SAS ſenkrecht iſt. Der Durchſchnitt der durch MN gelegten Ebene mit der Oberfläche des Konoids iſt eine Ellipſe, deren große Axe $=$ MN, und kleine $=$ MP $+$ NQ iſt, wenn MP und NQ ſenkrechte auf AX ſind, (ſ. Konoid). Durch die Mitte O von MN ziehe man eine Parallele BZ mit der Axe AX, ſo halbirt dieſe alle mit MN parallele Chorden. Der Parameter zu dem Durchmeſſer BZ ſey $= b$; BO $= t$, OM $=$ ON $= u$, ſo iſt $bt = uu$, (ſ. Parabel). Die Fläche der Ellipſe verhält ſich zu der Fläche des Kreiſes mit dem Durchmeſſer MN, wie ihre kleine Axe zu der großen, alſo wie MP $+$ NQ : MN. Der Winkel BOM ſey $= \varphi$, ſo iſt dieſes Verhältniß $= \sin \varphi : 1$. Die Fläche der Ellipſe iſt alſo $\pi u^2 \sin \varphi$. Der Abſchnitt des Konoids, zwiſchen dem Scheitel des Durchmeſſers B und dem Schnitt durch MN, ſey Z, ſo iſt die Veränderung ΔZ deſto näher dem Parallelepipedum $\pi u^2 \sin \varphi . \sin \varphi \Delta t$, wo $\sin \varphi \Delta t$ die Höhe deſſelben iſt, je kleiner Δt genommen wird, und es iſt die Gränze des Quotienten $\frac{\Delta Z}{\sin \varphi \Delta t} = \pi u^2 \sin \varphi$, oder $dZ = \pi u^2 \sin \varphi^2 \, dt$.

Da $bt = u^2$ iſt, ſo iſt $dZ = \pi bt \sin \varphi^2 \, dt$, alſo $Z = \frac{1}{2} \pi bt^2 \sin \varphi^2$, oder $Z = \frac{1}{2} \pi t u^2 \sin \varphi^2$. Man bilde ſich über dem elliptiſchen Schnitte durch MN einen Cylinder und einen Kegel, deren Axen den Winkel BOM mit der Grundfläche machen, und gebe der Axe die Länge BO oder t, ſo iſt das ſchiefe Konoid

über jener Grundfläche die Hälfte des elliptiſchen Cylinders, und $\frac{2}{3}$ des elliptiſchen Kegels. Denn der Cylinder iſt $= \pi u^2 \sin\varphi \times t \sin\varphi$, wo der erſte Factor die Grundfläche, der zweyte die Höhe iſt. Der Kegel iſt $\frac{1}{3}$ des Cylinders.

VII. Es ſey SAS (Fig. 93.) der Schnitt eines hyperboliſchen Konoids durch die Axe, alſo eine Hyperbel, und MN der Durchſchnitt der Ebene SAS mit einer andern ſchneidenden Ebene, auf welche SAS ſenkrecht iſt. Der Durchſchnitt der durch MN gelegten Ebene mit der Oberfläche des Konoids iſt hier eine Ellipſe, da der Schnitt eine ringsum begränzte Figur iſt. (ſ. Konoid). Die große Axe derſelben iſt MN. Der Werth derſelben ſo wie der Werth der kleinern Axe werden durch die beiden Axen der Hyperbel, und durch AP, PM, und den Winkel MRA des Schnittes mit der Axe gegeben (ſ. e. daſ.). Das Verhältniß der beiden Axen iſt für alle parallele Schnitte daſſelbe. Nämlich, wenn die beiden Axen der Hyperbel ſind, 2a und 2b, und der Winkel MRA des Schnittes mit AX $= \varphi$, die große Axe des elliptiſchen Schnittes $= 2f$, die kleine $= 2g$, ſo iſt $\sin\varphi^2 - \frac{bb}{aa}\cos\varphi^2 = \frac{gg}{ff}$. Dieſen Quotienten bezeichne man durch m^2. Durch die Mitte O von MN, und durch den Mittelpunct der Hyperbel C ziehe man die Linie COZ, ſo iſt dieſe ein Durchmeſſer für alle mit MN parallele Chorden (ſ. Ellipſe), der Scheitelpunct iſt B. Die Gleichung zwiſchen den Coordinaten BO und OM oder ON iſt eine ganz ähnliche, wie die für Abſciſſen auf dem Hauptdurchmeſſer für normale Coordinaten. Es ſey CB $= \alpha$, der halbe conjugirte Durchmeſſer $= \beta$; BO $= t$, OM $= u$, ſo iſt $u^2 = \frac{2\beta\beta}{\alpha} t + \frac{\beta\beta}{\alpha\alpha} t^2$. Es iſt 2u die große Axe des elliptiſchen Schnittes in dem Konoid, und die kleine $= mu$, wo m den vorhergehenden angeführten Werth

hat. Die Fläche des elliptiſchen Schnittes iſt $\pi m u^2$, da πu^2 die Fläche des Kreiſes mit dem Halbmeſſer u iſt.

Nun ſey der Abſchnitt des Konoids zwiſchen B und der durch MN gelegten, auf SAS ſenkrechten Ebene $= Z$, und der Winkel BOM $= \omega$, ſo iſt $dZ = \pi m u^2 . \sin\omega . dt =$

$$\pi m \sin\omega \left(\frac{2\beta\beta}{\alpha} t + \frac{\beta\beta}{\alpha\alpha} t^2 \right) dt \text{ alſo}$$

$$Z = \pi m t \sin\omega \left(\frac{\beta\beta}{\alpha} t + \frac{\beta\beta}{3\alpha\alpha} t^2 \right).$$

$$\text{Da } \frac{\beta\beta}{\alpha\alpha} = \frac{u^2}{2\alpha t + t^2} \text{ iſt, ſo iſt}$$

$$Z = \tfrac{1}{3} \pi m u^2 t \sin\omega . \frac{3\alpha + t}{2\alpha + t}.$$

Der Inhalt eines Kegels, über dem elliptiſchen Schnitte als Grundfläche, mit der Axe BO, und dem Neigungswinkel BOM derſelben gegen die Grundfläche iſt $= \frac{1}{3} \pi m u^2 t \sin\omega$. Es verhält ſich alſo der ſchiefe Abſchnitt des hyperboliſchen Konoids zu dieſem Kegel wie $3\alpha + t : 2\alpha + t$. Archimedes hat ſchon eben dieſe Vergleichung gemacht, in dem Buche von Konoiden und Sphäroiden, 28. Satz. Die Vergleichung des ſchiefen Abſchnitts eines paraboliſchen Konoids mit einem Kegel, der dieſelbe Grundfläche und Höhe mit dem Abſchnitte hat, macht er daſ. im 24ſten Satze.

Die Cubirung der Kugel und der Sphäroiden und ihrer Abſchnitte, in den Artikeln: Kugel und Sphäroid.

VIII. Zur Übung diene noch die Cubirung der Ciſſoide. Die Ciſſoide AMDM (Fig. 71. Tab. V.) drehe ſich um den Durchmeſſer des Kreiſes AB als Axe. Man ſucht den von dem Trilineum APM beſchriebenen Körper.

Es iſt die Abſciſſe AP $= x$, die Ordinate

PM = y, und die Gleichung für dieſelben, $x^3 = (a-x)y^2$, alſo $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$. Dieſe gebrochne Function verwandle man (Integralformel. Anmerk. bey 7.) in dieſe, $\frac{a^3}{a-x} - x^2 - ax - a^2$, ſo daß $y^2 dx = \frac{a^3 dx}{a-x} - x^2 dx - ax dx - a^2 dx$. Nun iſt $\int y^2 dx = \text{Const.} - a^3 \log. \text{nat.} \frac{a-x}{\text{const.}} - \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} ax^2 - a^2 x$. Dieſes Integral iſt = o, wenn x = o iſt. Daher iſt die algebraiſche Const. = o, und in der Zahl zu dem Logarithmen iſt Const. = a. Alſo iſt der ciſſoidaliſche Körper, $Z = \int \pi y^2 dx =$

$$\pi \left(a^3 \log \frac{a}{a-x} - \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} a x^2 - a^2 x\right).$$

Wenn x = a geſetzt wird, ſo giebt die Formel den Inhalt des von der ins Unendliche ſich erſtreckenden Figur ABTm um AB beſchriebenen Körpers. Dieſer iſt unendlich, da $\log \frac{a}{o} = \log$ infin. eine unendlich große Größe iſt. Sie iſt unter allen Unendlichen die kleinſte.

IX. Den Körper zu cubiren, der durch die Umdrehung eines Kreisſegments um ſeine Chorde entſteht.

Es ſey AB eine Chorde in dem Kreiſe, der aus C mit dem Halbmeſſer CD beſchrieben iſt; dieſer ſey auf AB ſenkrecht, und ſchneide ſie in E, das kleinere Segment drehe ſich um AB. Man ziehe FCG parallel mit AB, und NPM ſenkrecht auf beide, Es ſey CD = a, CE = b; EB = c; EP = x, PM = y, ſo iſt $(b+y)^2 + x^2 = a^2$. Das Solidum

zwiſchen dem Kreiſe mit ED und dem unbeſtimmten mit PM ſey Z, ſo iſt $dZ = \pi yy dx$. Nun iſt $(b+y) dy = -x dx$, alſo iſt

$$dZ = -\frac{\pi (b+y) y^2 dy}{\sqrt{(a^2 - (b+y)^2)}}.$$

Man ſetze $b + y = z$, d. i. $NM = z$, ſo iſt $y^2 = z^2 - 2bz + b^2$, und

$$dZ = -\frac{\pi (z^3 - 2bz^2 + b^2 z) dz}{\sqrt{(a^2 - z^2)}}.$$

Es iſt (Integralformel 40, 39.)

$$\int \frac{z^3 dz}{\sqrt{(a^2 - z^2)}} = \text{Const.} - \tfrac{1}{3}(2a^2 + z^2)\sqrt{(aa^2 - z^2)};$$

$$\int \frac{z^2 dz}{\sqrt{(a^2 - z^2)}} = \text{Const.} + \tfrac{1}{2}a^2 \,\text{Ang sin}\, \frac{z}{a} \;.\;.\;.\;. - \tfrac{1}{2}z\sqrt{(a^2 - z^2)}$$

$$\int \frac{z dz}{\sqrt{(a^2 - z^2)}} = C - \sqrt{(a^2 - z^2)}.$$

Folglich iſt

$$Z = \text{Const.} + \pi(\tfrac{1}{3}z^2 - bz + \tfrac{2}{3}a^2 + b^2)\sqrt{(a^2 - z^2)} + \pi a^2 b \,\text{Ang sin}\, \frac{z}{a}.$$

Da $Z = 0$ für $z = a$, ſo iſt $\text{Const.} = -\tfrac{1}{2}\pi^2 a^2 b$. Den ganzen Körper M, der durch die Umdrehung von ADBA um AB entſteht, zu erhalten, ſetze man $z = b$ für $y = 0$, und multiplicire auf beiden Seiten mit 2, ſo iſt $M = \tfrac{2}{3}\pi(2aa + bb)c - 2\pi a^2 b \,\text{Ang.cos}\, \frac{b}{a}$.

Es iſt nämlich $a^2 - b^2 = c^2$, und $\tfrac{1}{2}\pi - \text{Ang. sin}\, \frac{b}{a} = \text{Ang. cos}\, \frac{b}{a}$.

X. Man kann daſſelbe noch bequemer folgendergeſtalt finden. Da $(b+y)^2 = b^2 + 2by + y^2$ iſt, ſo iſt $b^2 + 2by + y^2 + x^2 = a^2$, alſo $y^2 = a^2 - b^2 - x^2 - 2by$, und

$$y^2 dx = (a^2 - d^2)dx - x^2 dx - 2 dy dx;$$

$$\int y^2 dx = (a^2 - b^2)x - \tfrac{1}{3}x^3 - 2b\int y dx.$$

wo Const. = o, und $\int y dx$ die Area EPMD iſt. Für $x = c$ iſt der algebraiſche Theil des Integrals $= (a^2 - b^2)c - \frac{1}{3}c^3 = \frac{2}{3}c^3$. Für eben dieſen Werth von x iſt $\int y dx =$ Sect. BCD — △BCE

$= \frac{1}{2}a^2 \text{ Arc. cos } \frac{b}{a} - \frac{1}{2}bc$, wo Arc. cos. $\frac{b}{a}$ zu dem Halbmeſſer, der der Einheit gleich iſt, gehört. Demnach iſt, für $x = c$,

$$Z = \pi\left(\tfrac{2}{3}c^3 + b^2 c - a^2 b \text{ Arc. cos } \tfrac{b}{a}\right)$$

$$= \pi\left(\tfrac{2}{3}a^2 + \tfrac{1}{3}b^2\right)c - \pi a^2 b \text{ Arc. cos } \tfrac{b}{a},$$

und der ganze Körper

$$M = \tfrac{2}{3}\pi(2a^c + b^2)c - 2\pi a^2 b \text{ Arc. cos. } \tfrac{b}{a},$$

wie vorher. Die Ausdrücke Ang. cos $\frac{b}{a}$, und Arc. cos. $\frac{b}{a}$ ſind ganz gleichgültig.

Kepler hat ſchon den Inhalt dieſes Körpers gefunden in der Stereometria doliorum. Hernach hat Cavaleri auf eine andere Art denſelben herausgebracht, in der Geometria indiviſibilibus continuorum, pag. 100. Man ſehe Montucla hiſt. des Mathém. T. II. p. 30, 40. Die Diſſertation von Pfleiderer: Kepleri methodus ſolida quaedam ſua dimetiendi illuſtrata. Tubingae 1795.

Cavaleri vergleicht den Körper, welchen das Kreis-

Segment beſchreibt, mit dem Cylinder, deſſen Halbmeſſer ED und Höhe AB iſt. Der Inhalt dieſes Cylinders iſt $= 2\pi(a-b)^2 c$. Man nehme eine Linie f, ſo daß $(a-b)c$ area $EDB = b : f$, ſo verhält ſich jener Körper zu dem Cylinder, wie $2(a+b-3f):3(a-b)$. Dieſes iſt das Verhältniß, welches Cavaleri a. a. O. angiebt.

Die Cubirung der Conchoide ſ. in dem Artikel: Conchoide.

Cubiſch, was eine Beziehung auf einen Cubus oder eine Cubikwurzel hat.

Cubiſche Gleichung iſt, worin die unbekannte Größe bis auf die dritte Potenz ſteigt. Ihre Auflöſung in dem Artikel: Gleichung. III.

Cubiſche Hyperbel iſt eine Linie vom dritten Grade, deren Gleichung iſt $xy^2 = a^3$. Sie hat zwey Aſymptoten, parallel mit den Richtungen der Coordinaten, wie die gemeine Hyperbel, wenn dieſe durch die Gleichnng $xy = a^2$ dargeſtellt wird; aber beide Theile der cubiſchen Hyperbel liegen in den Nebenwinkeln der Aſymptoten, nicht in den Scheitelwinkeln. Die Ordinaten y nähern ſich der Aſypmtote auf der Abſciſſenlinie unendlich weniger als die Ordinaten an der gemeinen Hyperbel, da an jener iſt $y = \frac{a^3}{xy}$, an dieſer $y = \frac{a^2}{x}$. Nimmt man x für die Ordinate, ſo nähert ſich dieſe der mit den y parallelen Aſymptote unendlich mehr als die Ordinaten an der gemeinen Hyperbel ſich der Aſymptote auf der Abſciſſenlinie nähern. Die krumme Linie iſt die 65ſte Species bey Newton. Man gebraucht ſie, um einen geringern oder größern Grad der Annäherung einer krummen Linie an ihre Aſymptote, als die gemeine Hyperbel giebt, durch ſie darzuſtellen, indem man ſie ſelbſt als Aſymptote jener, welche ihr aber ſehr nahe kommt, betrachtet.

Cubiſche Parabel iſt eine Linie vom dritten Grade. Es ſind zwey Arten derſelben. Die Gleichung

für die erſte iſt $aax = y^3$, für die zwente $axx = y^3$. An jenen ſind für entgegengeſetzte gleiche Abſciſſen x die Ordinaten y gleich und entgegengeſetzt; an dieſer ſind ſie gleich und gleichnamig. Jene liegt theils über, theils unter der Abſciſſenlinie; dieſe mit beiden Schenkeln auf derſelben Seite der Abſciſſenlinie. Für die Apolloniſche Parabel iſt $ax = y^2$. Da an der erſtern Gattung der cubiſchen iſt $\frac{a}{y} \cdot ax = y^2$, ſo ſind ihre unendliche Ordinaten gegen die an der gemeinen Parabel unendlich klein. Da an der zweiten cubiſchen Parabel iſt $\frac{x}{y} \cdot ax = y^2$, und ein unendliches x gegen y unendlich groß iſt, ſo ſind die unendlichen Ordinaten gegen die an der gemeinen Parabel unendlich groß. Man kann dadurch in manchen Fällen die Beſchaffenheit der Schenkel einer krummen Linie für unendliche Coordinaten ausdrucken, wo es durch die gemeine Parabel nicht geſchehen kann. Wallis nennt die cubiſche Parabel der erſten Gattung Paraboloeides cubicalis, die von der zwenten, Paraboloeides semicubicalis. (Opp. Vol. 1. p. 350; 551.) Dieſe zweite heißt auch die Neiliſche Parabel. Sie iſt die erſte krumme Linie, deren Rectification gefunden iſt. Die erſtere hat Wallis ganz falſch vorgeſtellt, da er ihre beiden Schenkel an entgegengeſetzten Seiten der Abſciſſen nach derſelben Gegend hin ſich erſtrecken läßt. Von der zweiten hat er nur einen Schenkel gezeichnet.

Newton nennt die krumme Linie, deren Gleichung iſt, $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, eine cubiſche Parabel. Sie begreift die obige erſtere in ſich, wenn x und y vertauſcht werden. Newt. enum. lin. tert. ord. XXVIII.

Cubiſche Elliptois nennen einige die krumme Linie, deren Gleichung iſt $ay^3 = bx^2 (a - x)$. Dieſe aber weicht ganz von der Form einer Ellipſe ab, da ſie zwei unendliche Schenkel hat. Wolfii elementa Analys. Finit. §. 522.

Cubo-Cubus iſt der Cubus eines Cubus, oder die ſechste Potenz einer Zahl.

Cubus, Würfel, iſt erſtlich ein Körper, der zwiſchen ſechs gleichen Quadraten als Seitenflächen eingeſchloſſen iſt, die gewöhnliche Einheit zur Vergleichung und Meſſung der Körper. Zweitens iſt es ein Product aus drei gleichen Factoren. Ein ſolcher Factor ſey $= a$, ſo iſt der Cubus $= aaa$, oder a^3. Weil der geometriſche Cubus einen kleinern ſo oft enthält, als die Cubikzahl des Quotienten der Seiten die Einheit, ſo iſt daher das Product dreyer Factoren ein Cubus, ein Würfel, eine Würfelzahl genannt. Im Deutſchen möchte man Cubus für das arithmetiſche Product behalten, und den geometriſchen Körper Würfel nennen, da man Cubiren, Cubikwurzel, Cubiktafeln, im arithmetiſchen Verſtande nimmt. Nur iſt es ungewöhnlich im Plural die Cuben zu ſagen, und lateiniſch zu flectiren iſt unbequem.

Die Wurzel ſey zweytheilig, $= a + b$, ſo iſt $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Hierauf beruht die Syntheſis oder Zuſammenſetzung des Cubus einer Zahl aus ihren dekadiſchen Theilen. Soll z. B. der Cubus von 47862 gemacht werden, ſo nimmt man zuerſt den Cubus von 47, wo $a = 40$ und $b = 7$ iſt. Dann ſetzt man den Cubus von $470 + 8$ aus ſeinen Theilen zuſammen ($a = 470$; $b = 8$); dann den Cubus von $4780 + 6$, ferner den Cubus von $4786 + 2$, u. ſ. w. wenn noch mehr Ziffern vorhanden ſind. Jedesmahl werden zu dem gefundenen Cubus die Producte $3a^2b$; $3ab^2$; b^3 geſetzt, von welchen die niedrigſte Ziffer eine Stelle niedriger ſteht, als die niedrigſte der vorhergehenden, und ſo auch $3a^2b$ in Abſicht auf a^3, wenn nämlich die Zahl a als ſchlechte Einer, nicht als Zehner betrachtet wird. In eben der Ordnung, wie die Theile des Cubus zuſammengeſetzt ſind, werden ſie bey der Ausziehung der Wurzel wieder abgezogen.

Die Wurzel habe die Form, $a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 + gz^6 +$ etc. ſo iſt der Cubus =

$$a^3 + 3a^2bz + (3a^2c + 3ab^2)z^2$$
$$+ (3a^2d + 6abc + b^3)z^3$$
$$+ (3a^2e + 6abd + 3ac^2 + 3b^2c)z^4$$
$$+ (3a^2f + 6abe + 6acd + 3b^2d + 3bc^2)z^5$$
$$+ (3a^2g + 6abf + 6ace + 3ad^2 + 3b^2e + 6bcd + c^3)z^6$$
$$+ \text{etc.}$$

Die Combinationen in den Coefficienten von z ſtehen in der 2ten bis 4ten Spalte der Tafel, S. 461. Wenn $z = \frac{1}{10}$ iſt, und b, c, d, etc. ganze Zahlen unter 10 ſind, ſo iſt $a + bz + cz^2 +$ etc. eine ganze Zahl mit einem anhangenden Decimalbruche. S. Polynomiſcher Lehrſatz, und combinatoriſche Analyſis, 35.

Dieſer Formel kann man ſich bequem bedienen, die Cubikwurzel aus einer Zahl auszuziehen. Die Zahl ſey N; die der Cubikwurzel nächſte, kleinere, ganze Zahl ſey a. Iſt dieſe bekannt, ſo ſind die Coefficienten von z alle gegeben, daher die Coefficienten b, c, d etc. in der Wurzel nach einander gefunden werden. Der Cubus werde der Kürze wegen durch $a^3 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + Fz^6 +$ etc. bezeichnet.

Exempel. Die Cubikwürzel aus 128 zu ziehen. Der nächſt kleinere Cubus iſt $125 = 5^3$, alſo $a = 5$; $A = 30$; B, C, etc. $= 0$. oder $A = 0$; $B = 300$; $C = 0$, etc. Da $3a^2b$ oder $75b = 30$ iſt, ſo nehme man $A = 0$, und $b = 0$.. Nun iſt $3a^2c = 300$, alſo $c = +4$. Ferner iſt C oder $3a^2d = 0$, alſo, $d = 0$. Weiter iſt D oder $3a^2e + 3ac^2 = 0$, alſo e negativ, weil c zu groß genommen iſt. Man kann die negativen Coefficienten ſehr leicht in poſitive verwandeln. Da $75e = -15 \cdot 16 = -240$, ſo kann man e entweder -3 oder -4 nehmen. Das

letztere wähle man, um wieder einen poſitiven Werth für f zu erhalten. Zu dem Ende ſubtrahire man 60 von D, und addire dagegen 600 zu E, oder ſetze E = 600. Nun iſt, da b und d = 0 ſind, $3 a^2 f = + 600$, alſo f = + 8. Noch iſt F oder $3 a^2 g + 6 a c c + c^3 = 0$, das iſt, $75 g - 480 + 64 = 0$, daher g = + 5. Die Cubikwurzel aus 128 iſt = 5,040085 . .

$$\frac{-4}{= 5{,}039685 \ldots}$$, wie nach der

Rechnung S. 336, nur daß die ſechste Decimalziffer um Eins, aber nicht völlig, zu groß iſt. Dieſes Exempel wird dadurch ſehr leicht, daß b = 0 iſt. In allen Fällen iſt dieſe Methode leichter und kürzer als die, welche in den Lehrbüchern vorgetragen wird.

Man kann, nachdem einige Ziffern der Ergänzung der Wurzel gefunden ſind, dieſe zu der Zahl a ſetzen, und die nähere Wurzel ſtatt der erſtern a gebrauchen. Durch Multiplication oder Diviſion der vorgegebenen Zahl mit 1000 oder einer Potenz davon kann man in a ſo viele Ziffern, als man will, bringen.

Curva, ſ. krumme Linie.

Cykloide, Radlinie, (Trochoides, Roulette,) iſt eine transſcendente krumme Linie, welche von einem Puncte auf dem Umfange eines Kreiſes beſchrieben wird, indem der Kreis auf einer geraden Linie, in der Ebene durch dieſelbe und ſeinen Mittelpunct, mit einer wälzenden Bewegung geführt wird, ſo daß der Bogen zwiſchen jenem fixen Puncte, und dem veränderlichen Berührungspuncte mit der geraden Linie immer dem auf dieſer Linie zurückgelegten Wege gleich iſt. Ein ſinnliches Bild giebt ein Nagel eines Wagenrades, der eine Cykloide in der Luft beſchreibt. Der Kreis darf nicht vorwärts noch rückwärts gleiten, Nach einem Umlaufe des Kreiſes iſt der auf der geraden Linie zurückgelegte Weg dem Umfange des Kreiſes gleich.

Es iſt nämlich (Fig. 95, Tab. VI.) A a ein Kreis

mit dem Halbmeſſer K A, welcher die gerade Linie A B in A berührt. In der Ebene K A B werde der Kreis mit einer wälzenden Bewegung um den Mittelpunct auf A B fortgeführt, ſo daß der Weg K K, den der Mittelpunct K beſchreibt, indem der Kreis eine Drehung vollendet, dem Umfange deſſelben gleich ſey. Setzt man A B dem Umfange gleich, ſo hat der Kreis, wenn er auf B iſt, eine Umdrehung gemacht. Der Kreis ſey auf irgend einem Puncte N, ſein Mittelpunct in G. Setzt man den Bogen N M gleich der geraden A N, ſo iſt der beſchreibende Punct in M, und M ein Punct der Cykloide. Es ſey D die Mitte von A B, der Mittelpunct des Kreiſes in C, auf der ſenkrechten D C, ſo iſt der beſchreibende Punct in E auf dem Endpuncte des Durchmeſſers D C E. Der Punct E heißt der Scheitel der Cykloide, E D die Axe, A B die Baſis oder Grundlinie, E e D d der erzeugende Kreis, circulus generator.

Die Cykloide iſt eine der merkwürdigſten krummen Linien, wegen ihrer geometriſchen ſowohl, als wegen ihrer mechaniſchen Eigenſchaften. Sie hat in der Mitte des 17ten Jahrhunderts die Geometer ſehr beſchäftigt. Vor der Erfindung der neuen Infiniteſimal-Rechnung war es ſehr ſchwer, dieſe Eigenſchaften zu entdecken.

In einer Schrift des Cardinals de Cuſa (geſt. 1464.), worin er von der Quadratur des Kreiſes handelt, iſt eine Figur gezeichnet, die eine Cykloide vorſtellen kann, wenn eine Unrichtigkeit in derſelben, woran der Abſchreiber Schuld ſeyn kann, verbeſſert wird. S. Wallis in den Tranſactionen, Jun. 1697, und Opp. Tom. III. p. 676. Daſelbſt führt er auch aus einer Schrift des Carolus Bovillus (Charles de Bovelles) an, daß dieſer zum Behuf der Quadratur des Kreiſes einen Kreis auf einer Linie mit einer drehenden Bewegung um den Mittelpunct fortgeführt, und einen Punct des Umfanges eine krumme Linie habe beſchreiben laſſen. Montucla hat nichts dergleichen gefunden; Käſtner auch nicht. Geſchichte der Mathem. Th. I. S. 405.

Galilei iſt als der erſte anzuſehen, der die Cykloide geometriſch betrachtet hat. In einem Briefe an Torricelli vom J. 1639 ſagt er, daß er dieſe Linie ſeit 40 Jahren in Unterſuchung gezogen, und ſie, wegen ihrer gefälligen Geſtalt, zu Gewölbbogen unter Brücken für ſchicklich erachtet habe; er habe verſucht ihren Inhalt zu beſtimmen, ſey aber nicht damit zu Stande gekommen. Ein franzöſiſcher Geometer, Roberval, hat im Jahre 1634, nach dem Zeugniſſe des Merſenne, den Inhalt der Cykloide mit dem Inhalt des erzeugenden Kreiſes verglichen, und gefunden, daß jener das dreyfache des letztern iſt. Er war zu dieſer Unterſuchung durch Merſenne veranlaßt, der bey der Betrachtung eines rollenden Rades auf die Entſtehung der Cykloide gekommen war, aber jene Aufgabe nicht hatte auflöſen können. Roberval hatte Anfangs auch nicht damit fertig werden können. Als Merſenne Robervals Entdeckung dem Descartes meldete, legte dieſer eine Aufgabe vor, die berührenden an der Cykloide zu ziehen. Dieſe war für Roberval zu ſchwer, aber Fermat löſete ſie ſehr allgemein auf. Galilei erfuhr um das Jahr 1639 durch Merſenne, daß man ſich in Frankreich mit der Cykloide beſchäftige, und forderte den Cavaleri auf, den Inhalt der Cykloide zu finden, dem es aber nicht glückte. Nach dem Tode des Galilei (1642) nahmen ſeine beiden Schüler und Geſellſchafter in ſeinen letzten Jahren die Unterſuchung vor. Torricelli fand den Inhalt, Viviani die berührenden. In den geometriſchen Werken des erſtern (Florentiae 1644) iſt ein kleiner Anhang über die Cykloide enthalten, worin drey Beweiſe des Satzes von dem Inhalt der Cykloide vorgetragen werden Es wird darin auch der andern Gattungen von Cykloiden erwähnt, die ein Punct innerhalb oder außerhalb des ſich wälzenden Kreiſes beſchreibt; auch werden Sätze ihren Inhalt und ihre berührenden betreffend mitgetheilt. In Frankreich wollte man Torricelli nicht zugeſtehen, daß er dieſe Sätze ſelbſt erfunden hätte. Roberval zeigte ſich hierbei ſehr leiden-

ſchaftlich, und Paſcal in ſeiner Histoire de la Roulette zu partheyiſch für ſeinen Landsmann.

Roberval fand nachher den Inhalt der Körper, welche die Cykloide durch die Umdrehung um ihre Grundlinie und um ihre Axe beſchreibt. Den erſtern fand Torricelli auch, den zweyten aber nicht völlig genau.

Im J. 1658 ließ Paſcal unter dem Namen, Dettonville, ein Ausforderungs-Schreiben an die Geometer ergehen, worin er ihnen Aufgaben über die Cykloide vorlegte, und dabey zwey Preiſe ausſetzte, einen von 40 Piſtolen für denjenigen, der die Auflöſungen zuerſt einſenden, und 20 Piſtolen für denjenigen, der zunächſt nach jenem ſie einſchicken würde. Die Aufgaben waren: zu finden den Inhalt des Abſchnittes zwiſchen dem Scheitel und einer Parallelen mit der Grundlinie; den Schwerpunct dieſes Abſchnittes; den Inhalt der Körper, die durch die Umdrehung des Abſchnitts um die Grundlinie deſſelben (die Parallele mit der Grundlinie), und um das Segment der Axe von dem Scheitel bis zu dieſer Grundlinie entſtehen; auch ihre Schwerpuncte; endlich die Schwerpuncte der Theile, worin jene beiden Körper durch eine auf die Drehungsaxe ſenkrechte Ebene zerſchnitten werden. Es liefen nur zwey Preisſchriften ein; von dem Jeſuiten Lalouere (Lalovera), und dem berühmten Wallis. Die von dem erſtern ward für ganz unbefriedigend erklärt; die von Wallis erhielt den Preis auch nicht, weil einige Auflöſungen fehlerhaft waren. Die Abhandlung von Wallis über die Cykloide iſt in den erſten Theil ſeiner Werke eingerückt. Wie ſie von der Preisſchrift verſchieden ſey, finde ich nicht angezeigt.

Bey dieſer Gelegenheit erhielt Paſcal noch von einigen vorzüglichen Geometern ihre Entdeckungen über die Cykloide mitgetheilt. Der Ritter Wren in England hatte gefunden, daß die Länge des cykloidaliſchen Bogens EM von dem Scheitel E an genommen doppelt ſo groß iſt, als die Chorde ER des Bogens ER in dem erzeugenden Kreiſe ERDE, der von der mit AB parallelen

M Q abgeſchnitten wird. Er beſtimmte auch die Größe der Oberfläche an den Körpern, die durch Umdrehung der Cykloide um die Grundlinie und um die Axe erzeugt werden. Fermat leiſtete dieſes auch, und theilte zugleich eine allgemeine und ſchöne Methode zur Complanation der Oberflächen runder Körper mit. Huygens zeigte an, daß er gefunden habe, daß das Segment der Cykloide zwiſchen dem Scheitel und einer von dem Scheitel um den vierten Theil des Durchmeſſers entfernten Parallele mit der Grundlinie durch einen geradlinichten Flächenraum ſich darſtellen läßt. Dieſe Bemerkung hat, wie Wallis behauptet, auch Wren gemacht.

Pascal gab nun ſelbſt ſeine Auflöſungen der von ihm vorgelegten Aufgaben heraus, unter dem Titel: Lettres de A. Dettonville à Mr. de Carcavi, worin zugleich mehrere ſeine geometriſche Unterſuchungen vorkommen.

Huygens entdeckte hernach noch vortreffliche Eigenſchaften der Cykloide. Er fand, daß durch die Abwickelung dieſer Linie eine ihr gleiche entſteht, und daß ein ſchwerer Punct, der auf der umgekehrten Cykloide, mit ſenkrechter Axe, den Scheitel unterwärts, herabfällt, einerley Zeit bis zu dem unterſten Puncte, dem Scheitelpuncte, gebraucht, er mag von welchem Puncte es ſey, zu fallen anfangen. Wegen dieſer Eigenſchaft hat die Cykloide den Zunahmen, tautochrona, oder isochrona. Später fand Joh. Bernoulli, daß die Linie, auf welcher ein ſchwerer Punct von einem gegebenen Puncte zu einem andern gegebenen in einer andern Verticallinie als jener, in der kürzeſten Zeit fällt, ein Bogen der Cykloide iſt, auf welcher der zweyte Punct der zu unterſt gelegte Scheitelpunct iſt. Die Cykloide heißt daher brachystochrona. Er bemerkte auch, daß unzählig viele Segmente ſich in geradlinichte Figuren verwandeln laſſen. Beide Bernoulli (Jakob und Johann) fanden, daß die Brennlinie der Cy-

kloide für Parallelſtrahlen mit der Axe, eine Cykloide mit einem erzeugenden Kreiſe von einem halb ſo großen Durchmeſſer als jene iſt, (ſiehe Catacauſtica, 12.)

Ein Kreis wälze ſich, wie vorher feſtgeſetzt iſt, auf einer geraden Linie fort, ſo daß der zurückgelegte Weg dem Bogen zu dem Drehungswinkel gleich ſey, aber der Punct in ſeiner Ebene, der eine krumme Linie beſchreibt, ſey innerhalb oder außerhalb des Umfanges, ſo iſt die krumme Linie eine verwandte Gattung von der eigentlichen Cykloide. Liegt der beſchreibende Punct innerhalb des erſten Kreiſes, ſo iſt ſie, wie in Fig. 97. eine gedehnte oder geſchweifte Cykloide (cycloides prolata, inflexa). Es iſt DEF der Kreis, deſſen Umfang der Grundlinie AB gleich iſt, und e ein Punct innerhalb des Kreiſes. Dieſer beſchreibt bey einer Umdrehung des mit Ce beſchriebenen Kreiſes die Linie aeb, und bey fortgeſetzter Wälzung des Kreiſes DEF auf der verlängerten AB, nach einer wie der andern Gegend, gleiche und ähnliche Portionen einer ins Unendliche ſich erſtreckenden Linie.

Iſt der beſchreibende Punct e auſſerhalb des ſich wälzenden Kreiſes, DEF, wie in Fig. 98. ſo beſchreibt er eine verkürzte oder verſchlungene Cykloide (cycloides curtata, nodata). Auch dieſe beſteht aus unendlich vielen gleichen Theilen, wie aeb, die einen Doppelpunct G haben. In der Figur hat die Hälfte eb nicht ganz Platz gefunden.

Descartes hat ſchon dieſe verwandten Gattungen unterſucht, und gewieſen, wie die berührenden an ihnen gezogen werden, wie der Wendungspunct an der gedehnten Cykloide, und an der verkürzten der Punct, wo ſich die Linie einwärts zu krümmen anfängt, gefunden wird, Epistol. T. III. ep. 57.

Die Cykloide, die hier zuerſt beſchrieben iſt, deren Grundlinie dem Umfange des erzeugenden Kreiſes gleich iſt, heißt im Gegenſatze gegen ihre Verwandten Cycloides primaria; ſonſt ſchlechtweg Cykloide. Sie beſteht

ebenfalls aus unendlich vielen, ſich an einander ſchließenden gleichen Portionen.

Die Cykloiden ſind transſcendente Linien, da zu einer Abſciſſe, die auf der Axe E D genommen wird, unendlich viele Ordinaten, parallel mit der Grundlinie, gehören. Die Gleichung für die Coordinaten iſt alſo keine algebraiſche, die auf irgend einen beſtimmten Grad ſtiege.

In der gedehnten und verkürzten Cykloide wälzt ſich der erzeugende Kreis bey jeder ganzen Umdrehung über einer Linie a b, die in jener größer iſt, als ſein Umfang, in dieſer kleiner, obgleich alle Puncte des Kreiſes ſich nach einander auf a b legen. Beide concentriſche Kreiſe D E F und d e f bringen alle Puncte ihres Umfanges nach einander in dieſelbe gerade Linie. Hieraus folgt aber nicht, daß der größere Kreis dem kleinern gleich ſey, weil die Linien nicht aus Puncten zuſammengeſetzt werden müſſen. Das Wälzen allein giebt keinen Grund der Gleichheit. Darum ward es bey der eigentlichen Cykloide vorausgeſetzt, daß die Grundlinie dem Umfange des erzeugenden Kreiſes gleich ſeyn ſollte. Der Mittelpunct des wälzenden Kreiſes kann außer der Bewegung, die von dem Wälzen entſteht, noch eine Bewegung vor= oder rückwärts haben. In dem erſten Falle wird eine gedehnte, in dem andern eine verkürzte Cykloide von einem Puncte ſeines Umfanges beſchrieben. Man ſetze, daß in Fig. 95. anſtatt den Bogen N M der Linie A N gleich zu machen, der Bogen kleiner genommen würde, nur nach einem gegebenen Verhältniſſe, ſo wird von dem Puncte M des wälzenden Kreiſes eine gedehnte Cykloide beſchrieben. Würde aber N M größer als A N, wieder nach einem beſtimmten Verhältniſſe genommen, ſo entſteht eine verkürzte Cykloide. Die Schwierigkeit, welche man ſich hier machen kann, hat ſchon Ariſtoteles in ſeiner 24ſten mechaniſchen Frage bemerkt, und mehrere Mathematiker haben ſie nach ihm zu heben geſucht. Wie Galilei ſie gelöſet hat, findet man in Käſtners Analyſis endlicher Größe. §. 601.

Die Cykloide, welche man den Liebling der Mathe=

matiker in 17ten Jahrhundert nennen mag, verdient, daß ihre Eigenſchaften hier durch die neuere Infiniteſimal-Rechnung entwickelt werden. Sie hat freylich viel an Intereſſe dadurch verloren, daß dieſe ihre Unterſuchung ſo leicht macht.

I. In der eigentlichen Cykloide (Fig. 96) ſey der Halbmeſſer des erzeugenden Kreiſes $CD = a$; die halbe Grundlinie $AD = \pi a$, wenn π den halben Kreisumfang für den Halbmeſſer als Einheit bezeichnet. Für einen Punct M der krummen Linie ſeyn die normalen Coordinaten, $AP = x$; $PM = y$. Der Mittelpunct des Kreiſes, auf welchem der Punct M zugleich iſt, ſey in G, und N der Berührungspunct auf AB, ſo iſt der Bogen $MN = AN$, nach der Vorausſetzung von der Entſtehung der Cykloide. Der Winkel MGN ſey φ, oder zwey Rechte verhalten ſich zu MGN wie $\pi : \varphi$. Alſo $AN = a\varphi$. Man ziehe MF ſenkrecht auf GN, ſo iſt $MF = PN = a \sin \varphi$, und $MP = FN = a - a\cos\varphi$. Folglich iſt

$$x = a(\varphi - \sin\varphi),$$

$$y = a(1 - \cos\varphi).$$

Aus dieſen Gleichungen φ wegzuſchaffen, müßten $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ durch φ ausgedruckt werden, worauf man φ herauszuſchaffen hätte. Eine endliche Gleichung würde man aber doch nicht erhalten. Allein dieſe mühſelige Rechnung iſt nicht nöthig. Es iſt hier, wie mehrmahls der Fall, daß die Relation zweyer Größen mittelſt einer dritten, wie hier durch φ, deutlicher dargeſtellt wird, als durch eine Gleichung zwiſchen ihnen allein.

II. Man ziehe MQ ſenkrecht auf die Axe ED, und laſſe die Coordinaten $EQ = t$; $QM = u$ ſeyn, ſo iſt

$$t = a(1 + \cos\varphi)$$
$$u = a(\pi - \varphi + \sin\varphi);$$

oder, wenn $\pi - \varphi = \omega$ iſt,

$$t = a(1 - \cos\omega)$$
$$u = a(\omega + \sin\omega).$$

Es ſchneide MQ den erzeugenden Kreis ERDE in R, ſo iſt, MR $= a\omega =$ Kreisbogen ER.

III. Die Area APM iſt $= a^2 (\frac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi)$.

Es ſey APM $=$ Z, ſo iſt $dZ = y\,dx$, (ſ. Quadratur der krummen Linien). Nun iſt dx . . . . . $= a(1 - \cos\varphi)\,d\varphi$, alſo $dZ = a^2(1 - \cos\varphi)^2\,d\varphi =$

$$a^2(1 - 2\cos\varphi + \cos\varphi^2)\,d\varphi =$$

$$a^2(\tfrac{3}{2} - 2\cos\varphi + \tfrac{1}{2}\cos 2\varphi)\,d\varphi.$$

Daraus durch Integration $Z = a^2 (\frac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi)$, wo die Conſtans Null iſt, (ſ. Differential-Formeln, 31, woraus umgekehrt die Integrale fließen, und Goniometrie, 36.).

IV. Die Fläche der Cykloide iſt $= 3\pi a^2$, oder dreymahl ſo groß als der Inhalt des erzeugenden Kreiſes.

Denn wenn PM in DE geſetzt wird, ſo iſt $\varphi = \pi$, und $\sin\varphi = 0$, $\sin 2\varphi = 0$; alſo die Area ADE $= \frac{3}{2}\pi a^2$, und die Area AEB $= 3\pi a^2$.

V. Die Area EQM iſt $= a^2(\sin\omega\,(1 - \frac{1}{2}\cos\omega) + \omega(\frac{1}{2} - \cos\omega))$, oder EQM $=$ . . . . $a^2 (\sin\varphi\,(1 + \frac{1}{2}\cos\varphi) + (\pi - \varphi)(\frac{1}{2} + \cos\varphi))$.

Sie ſey Z, ſo iſt $dZ = u\,dt$. Da $dt = a\sin\omega . d\omega$. iſt, ſo iſt

$$dZ = a^2(\omega + \sin\omega)\sin\omega . d\omega.$$

Es iſt $\int \omega \sin\omega . d\omega = \sin\omega - \omega\cos\omega$, wie man ſich durch die Differentiation verſichern kann, und $\int \sin\omega .^2 d\omega = \int(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\omega)\,d\omega = \frac{1}{2}\omega - \frac{1}{4}\sin 2\omega = \frac{1}{2}\omega - \frac{1}{2}\sin\omega . \cos\omega$. Hieraus folgt die angegebene Formel. Der Werth der Area EQM wird auch erhalten, wenn man die Area APM und das Rechteck PMQD von der Area ADE abzieht. Das Rechteck iſt $= (\pi a - x)\,y$.

VI. Es werde EC von H halbirt, und die mit der Grundlinie parallele HI gezogen, ſo iſt die Area EHI $= \frac{3}{4} a^2 \sin\omega =$ dem geradlinichten Dreyeck DHh.

Denn da hier $t = \frac{1}{2} a$, ſo iſt $\cos\omega = \frac{1}{2}$, und der zweyte Theil der Area $= 0$, alſo Z $=$ . . .

$a^2 \sin\omega\,(1 - \frac{1}{2}\cos\omega) = \frac{3}{4}a^2 \sin\omega.$, wo $\omega = 60°$ iſt. Die HI ſchneide den erzeugenden Kreis über ED in h, ſo iſt das geradlinichte Dreyeck $DHh = \frac{3}{4}\,a^2 \sin\omega$, weil $DH = \frac{3}{2}a$ iſt.

VII. Es ſey durch den Mittelpunct C (Fig. 95.) die Parallele CL mit der Grundlinie bis an die Cykloide gezogen, und die Chorde EL, das Segment über EL iſt $= \frac{1}{2}a^2$.

Denn da hier $t = a$, ſo iſt $\cos\omega = 0$, $\sin\omega = 1$, und $\omega = \frac{1}{2}\pi$; alſo die Area $ECL = a^2(1 + \frac{1}{4}\pi)$. Wegen $CL = a(\frac{1}{2}\pi + 1)$, iſt das Dreyeck ECL $= \frac{1}{2}a^2(\frac{1}{2}\pi + 1)$; folglich das Segment $= \frac{1}{2}a^2$.

Leibnitz hat dieſen Satz gefunden, Huygens den Satz VI.

VIII. Es werde ES (Fig. 96.) ſenkrecht auf die Axe ED gezogen, und ſchneide die verlängerte PM in S, ſo iſt die äußere Area an der Cykloide, $ESM = \frac{1}{2}a^2(\omega - \sin\omega.\cos.\omega)$, oder $ESM = \ldots\ldots \frac{1}{2}a^2(\pi - \varphi + \sin\varphi.\cos\varphi)$.

Dieſes folgt daher, weil das Rechteck $EQMS = a^2(1 - \cos\omega)(\omega + \sin\omega) = a^2(\omega - \omega\cos\omega + \sin\omega - \sin\omega.\cos\omega)$ iſt. Zieht man davon die Area EQM ab, ſo erhält man den angegebenen Werth der äußern Area.

Sie iſt gleich der Summe des Kreisſectors ECR, und des Dreyecks RCQ, oder dem gemiſchtlinichten Raume RQER.

IX. Die Normale in M (die ſenkrechte auf die berührende TMt) geht durch den Punct N, wo der erzeugende Kreis die AB berührt, wenn der beſchreibende Punct in M iſt.

Denn die Subnormale iſt $\frac{y\,dy}{dx}$ (berühr. Linie, 42). Da $dx = a(1 - \cos\varphi)\,d\varphi$, und $dy = a\sin\varphi.\,d\varphi$ iſt, ſo iſt die Subnormale $= a\sin\varphi$. Es iſt aber $PN = MF = a\sin\varphi$, alſo iſt PN die Subnormale, und MN die Normale.

X. Man ziehe durch den Punct D der Axe, und den Punct R, wo die mit AB parallele MQ den Halbkreis ERD ſchneidet, die Linie RD, ſo iſt dieſe parallel mit der Normale, alſo ER parallel mit der berührenden TMt.

XI. Der Halbmeſſer des Krümmungs-Kreiſes in M iſt $= 4a \sin \frac{1}{2}\varphi$.

Es ſey $\frac{dy}{dx} = p$, der Halbmeſſer der Krümmung $= r$, ſo iſt $r = -(1+p^2)^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{dp}$. (Krümmungskreis, 2).

Da $p = \frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}$, ſo iſt $1+p^2 = \frac{2}{1-\cos\varphi}$ $= \frac{1}{\sin\frac{1}{2}\varphi^2}$, alſo $(1+p^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sin\frac{1}{2}\varphi^3}$.

Es iſt ferner $\frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi} = \cot\frac{1}{2}\varphi$ (Goniometrie, 38.), alſo $p = \cot\frac{1}{2}\varphi$, und $dp = -\frac{d\varphi}{2\sin\frac{1}{2}\varphi^2}$, und $\frac{dx}{dp} = -2a(1-\cos\varphi)\sin\frac{1}{2}\varphi^2 = -4a\sin\frac{1}{2}\varphi^4$, alſo $r = 4a\sin\frac{1}{2}\varphi$,

Es iſt $MN = 2a\sin\frac{1}{2}\varphi$, alſo der Halbmeſſer der Krümmung $= 2MN$.

XII. In dem Scheitel E iſt der Krümmungs-Halbmeſſer $= 4a = 2ED$. Er ändert ſich beym Scheitel viel weniger als der Winkel φ, da die Sinus der Winkel nahe an einem Quadranten ſich wenig ändern in Vergleichung mit den Veränderungen der Winkel. Daher weicht der cykloidaliſche Bogen auf beiden Seiten von E bis zu einer beträchtlichen Entfernung wenig von einem mit dem Halbmeſſer 4a oder 2DE beſchriebenen Kreisbogen ab, deſſen man ſich alſo zur Zeichnung des Bogens neben E bedienen kann, Daher iſt auch die Schwingungszeit eines Pendels von der Länge 2DE, das einen Kreisbogen von einiger Größe beſchreibt, ſehr wenig

von der Zeit in einer Cykloide verſchieden, und daher wird auch die ſtarke Annäherung zur Gleichzeitigkeit bey verſchiedenen Kreisbogen begreiflich, die auf dem cykloidaliſchen Bogen von jeder Größe vollkommen iſt.

In A iſt der Halbmeſſer der Krümmung $= 0$. Das heißt, jeder Kreisbogen, der durch A aus einem Mittelpuncte auf AB beſchrieben wird, liegt über AB hinaus, ſo klein auch deſſen Halbmeſſer genommen wird. Die berührende in A iſt ſenkrecht auf AB.

XIII. Der Bogen AM ſey $= s$. Es iſt $s = 4a(1 - \cos\frac{1}{2}\varphi)$, und das Complement EM $= 4a\cos\frac{1}{2}\varphi$.

Denn, $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, (Rectification). Da $dx = a(1 - \cos\varphi)\,d\varphi$, und $dy = a\sin\varphi.\,d\varphi$, ſo iſt $ds^2 = 2a^2(1 - \cos.\varphi)\,d\varphi^2 = 4a^2\,2\sin\frac{1}{2}\varphi.\,d\varphi^2$, alſo $ds = 2a\sin\frac{1}{2}\varphi.\,d\varphi$, und daher $s = \text{const} - 4a\cos\frac{1}{2}\varphi$. Wenn $\varphi = 0$ iſt, ſo iſt auch $\frac{1}{2}\varphi = 0$, und $\cos\frac{1}{2}\varphi = 1$, alſo $\text{Const} = 4a$, und daher $s = 4a(1 - \cos\frac{1}{2}\varphi)$.

Die halbe Cykloide AME iſt $= 4a$, da für dieſe $\varphi =$ zwey Rechten iſt. Alſo iſt der Bogen EM $= 4a\cos\frac{1}{2}\varphi$.

XIV. In dem Halbkreiſe DER iſt der W. DER $= \frac{1}{2}$DCR $= \frac{1}{2}\varphi$, und RE $=$ DR $\times$ cos DER $= 2a\cos\frac{1}{2}\varphi$. Alſo iſt der cykloidaliſche Bogen EM $= 2$ chord. circ. ER.

XV. Die Fläche APM drehe ſich um AP, ſo iſt der Inhalt des dadurch erzeugten runden Körpers $= \pi a^3(\frac{5}{2}\varphi - \frac{11}{3}\sin\varphi + \frac{3}{2}\sin\varphi\cos\varphi - \frac{1}{3}\sin\varphi\cos\varphi^2)$ $= \frac{1}{12}\pi a^3(30\varphi - 45\sin\varphi + 9\sin 2\varphi - \sin 3\varphi)$.

Das Solidum ſey $= Z$, ſo iſt $dZ = \pi y^2\,dx$, (ſ. Cubirung) das iſt $dZ = \pi a^3(1 - \cos\varphi)^3\,d\varphi$ $= \pi a^3(1 - 3\cos\varphi + 3\cos\varphi^2 - \cos\varphi^3)\,d\varphi$. Nun iſt, wie man ſich durch die Differentiation, verſichern kann,

$\int \cos \varphi . \, d\varphi = \sin \varphi$

$\int \cos \varphi^2 . \, d\varphi = \frac{1}{2} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{1}{2} \varphi$

$\int \cos \varphi^3 . \, d\varphi = \frac{1}{3} \sin \varphi \cos \varphi^2 + \frac{2}{3} \sin \varphi .$

Aus dieſen Integralen wird unmittelbar der erſte Werth des Integrals Z erhalten; der zweyte wird aus der Verwandlung von sin φ. cos φ, und sin 2 φ. cos φ (Goniometrie, 27.), hergeleitet.

XVI. Eben dieſes Solidum iſt auch $= \pi (\frac{5}{2} a^5$ Ang.

$$\sin \text{vers.} \frac{y}{a} - (\frac{5}{2} a^2 + \frac{5}{6} a y + \frac{1}{3} y^2) \sqrt{(2ay - y^2)}).$$

Man muß nämlich in der Differentialformel $dZ = \pi y^3 d\varphi$ das Differential des Winkels durch dy ausdrucken. Da $y = a(1 - \cos \varphi)$, ſo iſt $dy = a \sin \varphi . d\varphi$. Eben daher iſt $a - y = a \cos \varphi$, alſo $a^2 - 2ay + y^2 = a^2 \cos \varphi^2$, und $2ay - y^2 = a^2 \sin \varphi^2$, oder $\sqrt{(2ay - y^2)} = a \sin \varphi$. Jene Differentialgleichung durch dieſe Gleichung dividirt, giebt $\frac{dy}{\sqrt{(2ay - yy)}} = d\varphi$. Folglich iſt $dZ = \frac{\pi y^3 dy}{\sqrt{(2ay - yy)}}$.

Aus dem Artikel: Integralformel (45 und 34) iſt

$$\int \frac{y^3 dy}{\sqrt{(2ay - y^2)}} = -\frac{1}{3} y^2 \sqrt{(2ay - yy)} + \frac{5}{3} a \int \frac{y^2 dy}{\sqrt{(2ay - yy)}}$$

$$\int \frac{y^2 dy}{\sqrt{(2ay - yy)}} = -\frac{1}{2} y \sqrt{(2ay - yy)} + \frac{3}{2} a \int \frac{y dy}{\sqrt{(2ay - yy)}}$$

$$\int \frac{y dy}{\sqrt{(2ay - yy)}} = -\sqrt{(2ay - yy)} + a \int \frac{dy}{\sqrt{(2ay - yy)}}$$

Auch iſt

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(2ay - yy)}} = \text{Ang. sin vers. } \frac{y}{a}.$$

Daher iſt durch ſucceſſive Subſtitution,

$$\int \frac{y^3 dy}{\sqrt{(2ay - y^2)}} = \text{Const} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; - (\tfrac{1}{3}y^2 + \tfrac{5}{6}ay + \tfrac{5}{2}a^2) \times \sqrt{(2ay - yy)} + \tfrac{5}{2}a^3 \text{ Ang. sin vers } \frac{y}{a}.$$

Die Const. iſt hier $= 0$. Das Integral mit π multiplicirt giebt den Inhalt eines unbeſtimmten Abſchnittes von dem durch Umdrehung der Cykloide um die Grundlinie erzeugten Körper.

Da $y = a(1 - \cos\varphi)$, und $\sqrt{(2ay - yy)} = a \sin\varphi$ iſt, ſo läßt ſich jede der Formeln in XV. und XVI. aus der andern leicht herleiten.

XVII. Der ganze Körper, der durch Umdrehung der Cykloide um ihre Grundlinie entſteht, iſt $= 5\pi^2 a^3$. Der Cylinder, deſſen Höhe dieſe Grundlinie, $2\pi a$, und Halbmeſſer die Axe der Cykloide, $2a$, iſt, hat den Inhalt $8\pi^2 a^3$. Jener verhält ſich zu dieſem wie $5 : 8$.

XVIII. Ein unbeſtimmter Abſchnitt des Körpers, der durch die Umdrehung der Cykloide um ihre Axe entſteht, nämlich der durch die Umdrehung der Area EQM entſtandene, iſt $= \pi a^3 (\tfrac{1}{2}\omega^2 (1 - 2\cos\omega) + \tfrac{1}{2}\omega(4\sin\omega - \sin 2\omega) - \tfrac{1}{6}\sin\omega.\sin.2\omega + \tfrac{4}{3}\cos\omega - \tfrac{1}{4}\cos.2\omega - \tfrac{13}{12})$, wo ω das Complement des von dem Puncte auf dem wälzenden Kreiſe beſchriebenen Winkels φ iſt, nämlich $\omega = \pi - \varphi$.

Es iſt die Abſciſſe $EQ = t = a(1 - \cos\omega)$; die Ordinate $QM = u = a(\omega + \sin\omega)$; auch ſey der von EQM beſchriebene Körper $= Z$, ſo iſt $dZ = \pi u^2 dt$, das iſt $dZ = \pi a^3 (\omega^2 + 2\omega\sin\omega + \sin\omega^2)\sin\omega.d\omega$.

Nun iſt

$\int \omega^2 \sin \omega . d\omega = -\omega^2 \cos \omega + 2\int \omega \cos \omega . d\omega$

$\int \omega \cos \omega^2 d\omega = \omega \sin \omega + \cos \omega$

$2\int \omega \sin \omega^2 d\omega = \int \omega (1 - \cos 2\omega) d\omega$

$\int \omega \cos 2\omega . d\omega = \frac{1}{2} \omega \sin 2\omega + \frac{1}{4} \cos 2\omega$

$\int \sin \omega^3 . d\omega = -\frac{1}{3} \sin \omega^2 \cos \omega - \frac{2}{3} s\, \omega$,

wie aus der Differentiation dieſer Formeln erhellet. Die dritte enthält bloß eine goniometriſche Subſtitution.

Aus dieſen Integralen ergiebt ſich der angegebene Werth des Abſchnittes des cykloidaliſchen Körpers.

Die Conſtans $-\frac{11}{12}$ iſt zugeſetzt, damit das Integral $Z = 0$ ſey, wenn $\omega = 0$ iſt, wofür $\cos \omega$ und $\cos 2\omega$ jeder $= 1$ ſind.

XIX. Der Inhalt des ganzen, von der Cykloide durch die Drehung um die Axe beſchriebenen Körpers iſt $= \pi a^3 (\frac{3}{2}\pi^2 - \frac{8}{3})$. Der Inhalt des Cylinders über derſelben Grundfläche mit derſelben Höhe iſt $\pi . \pi^2 a^2 . 2a = \pi^3 a^3$. Es verhält ſich jener Körper zu dem Cylinder wie $\frac{3}{4}\pi^2 - \frac{4}{3} : \pi^2$. Dieſes Verhältniß hat ſchon Roberval gefunden. Torricelli gab es nicht ganz richtig an, da er es wie $11 : 18$ ſetzte.

XX. Die Oberfläche des cykloidaliſchen Konoids, das durch die Umdrehung des Raumes EQM um EQ entſteht, iſt

$= 4\pi a^2 (2\omega . \sin \frac{1}{2}\omega + 3 \cos \frac{1}{2}\omega - \frac{1}{3} \cos \frac{3}{2}\omega - \frac{8}{3})$.

Die Oberfläche eines unbeſtimmten Abſchnitts dieſer Fläche ſey $= s$, und $\frac{du}{dt} = p$, ſo iſt ds . . . $= 2\pi u\, dt \sqrt{(1 + p^2)}$, (ſ. Complanation). Es iſt $du = a(1 + \cos \omega) da$; $dt = a \sin \omega . d\omega$, alſo

$$p = \frac{1 + \cos \omega}{\sin \omega}, \text{ und } 1 + p^2 = + \frac{2 + 2\cos \omega}{\sin \omega^2}$$

$$= \frac{4 \cos \frac{1}{2}\omega^2,}{\sin \omega^2}, \text{ alſo } \sqrt{(1 + p^2)} = \frac{2 \cos \frac{1}{2}\omega}{\sin \omega}.$$

Daher iſt $dS = 4\pi a^2 (\omega + \sin\omega) \cos\frac{1}{2}\omega . d\omega$. Zu der Integration dieſer Formel ſind folgende Integralformeln erforderlich:

$$\int \omega \cos\tfrac{1}{2}\omega . d\omega = 2\omega \sin\tfrac{1}{2}\omega + 4\cos\tfrac{1}{2}\omega$$

$$\int \sin\omega . \cos\tfrac{1}{2}\omega . d\omega = \tfrac{1}{2}\int \sin\tfrac{3}{2}\omega . d\omega + \tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}\omega . d\omega$$

$$= -\tfrac{1}{3}\cos\tfrac{3}{2}\omega - \cos\tfrac{1}{2}\omega.$$

Daraus iſt $S = 4\pi a^2 (2\omega \sin\frac{1}{2}\omega + 3\cos\frac{1}{2}\omega - \frac{1}{3}\cos\frac{3}{2}\omega + \text{Const.})$. Für $S = 0$ iſt $\omega = 0$, $\sin\frac{1}{2}\omega = 0$, $\cos\frac{1}{2}\omega = 1$; $\cos\frac{3}{2}\omega = 1$, alſo $\text{Const} = -\frac{8}{3}$.

XXI. Die Oberfläche des ganzen cykloidaliſchen Konoids iſt $= 4\pi a^2 (2\pi - \frac{8}{3})$.

XXII. Joh. Bernoulli bemerkte, daß unzählig viele Segmente zwiſchen einem cykloidaliſchen Bogen und ſeiner Chorde, und auch unzählig viele Abſchnitte zwiſchen zwey der Grundlinie parallelen Chorden ſich finden laſſen, die, jene geometriſch, dieſe algebraiſch quadrirbar ſind, ohne von der Rectification eines Kreisbogens abzuhangen. Es ſeyn (Fig. 99. Tab. VII.) EQ, Eq zwey Abſciſſen auf der Axe vom Scheitel, QM, qm die zugehörigen Ordinaten. Man nehme den Unterſchied der zugehörigen Flächenräume EQM, Eqm aus V. und ſetze den Theil der Formel, welcher die zugehörigen Winkel enthält, $= 0$, ſo iſt der übrige Theil, der Abſchnitt QMmq, algebraiſch quadrirbar. Die zu den Kreis gehörigen Winkel ſeyn ω und $n\omega$, ſo muß ſeyn $\frac{1}{2} - \cos\omega = n(\frac{1}{2} - \cos n\omega)$. Iſt n eine ganze Zahl, ſo wird $\cos\omega$ durch eine algebraiſche Gleichung gefunden, (Goniometrie, IV.). Iſt n eine gebrochene Zahl, ſo iſt die Gleichung für $\cos\omega$ tranſſcendent, (eb. daſ.). Bernoulli läßt zwar n auch eine gebrochne Zahl bedeuten. Opp. T. III. p. 327.

Man ziehe durch den Scheitel E die berührende PEp, und nehme ſie zur Abſciſſenlinie, worauf die Ordinaten PM, pm ſenkrecht ſind. Wenn Ep mit EP auf derſelben Seite liegt, ſo ziehe man den Werth der kleinern Area Epm von dem der größern EPM ab, nach der Formel VIII, ſo hat man den Werth des Quadri-

Qq

lineum PMmp. Das geradlinichte Trapezium PMmp iſt $=\frac{1}{2}(PM+pm)Pp$: zieht man von dieſem das Quadrilineum ab, ſo bleibt das Segment Mm zwiſchen dem Bogen Mm und deſſen Chorde. In dem Werthe deſſelben ſetzt man den von den zugehörigen Winkeln abhängigen Theil $=0$, ſo iſt der übrige geometriſch quadrirbar. Wenn ω und ω' die zu den Segmenten gehörigen Winkel an dem erzeugenden Kreiſe ſind, ſo muß $\cos\omega+\cos\omega'=1$ ſeyn, damit der von den Winkeln abhängige Theil verſchwinde.

Fällt Ep auf die entgegengeſetzte Seite von E in Beziehung auf EP, ſo nimmt man die Summe der cykloidaliſchen Flächenräume EPM, Epm, und zieht ſie von dem Trapezium PMmp ab, und es bleibt das cykloidaliſche Segment MEmM übrig. Soll dieſes geometriſch quadrirbar ſeyn, ſo muß ebenfalls ſeyn $\cos\omega + \cos\omega'=1$.

XXIV. Die gedehnte und verkürzte Cykloide laſſen ſich auf eine ähnliche Art, wie die urſprüngliche behandeln. Man ſetze die Grundlinie AB nicht $=2\pi a$, ſondern $=2m\pi a$, ſo daß ſie länger oder kürzer als der Umfang des erzeugenden Kreiſes ſey, nachdem m größer oder kleiner als die Einheit iſt. Der Weg AN (Fig. 96.), den der Kreis bey der Wälzung auf der Grundlinie zurückgelegt hat, verhalte ſich zu dem Kreisbogen MN zwiſchen dem beſchreibenden Puncte und dem Berührungspuncte auf AB ebenfalls immer wie $m:1$, ſo beſchreibt M eine gedehnte oder verkürzte Cykloide. Es iſt nun $AP=x=a(m\varphi-\sin\varphi)$, und $PM=y=a(1-\cos\varphi)$; auch $EQ=t=a(1-\cos\omega)$, und $QM=u=a(m\omega+\sin\omega)$.

XXV. Der Halbmeſſer des erzeugenden Kreiſes Cd (Fig. 97 u. 98) ſey $=a$; der Halbmeſſer des Kreiſes DFE, deſſen Umfang der Grundlinie ab gleich iſt, ſey $=b$, die Abſciſſe aP, die Ordinate PM, ſo iſt die Tangente des Winkels der Normale MN mit der Ordinate PM, $\tang PMN=\frac{a\sin\varphi}{b-a\cos\varphi}$.

Die Tangente des Winkels der Normale mit der Ordinate iſt $= \frac{dy}{dx}$, da die Subnormale PN $= \frac{ydy}{dx}$ iſt, (berührende, 42.). Nun iſt $dx = a(m - \cos\varphi)d\varphi$; und $dy = a\sin\varphi . d\varphi$, alſo iſt $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\varphi}{m - \cos\varphi}$. Der Umfang des Kreiſes DFED iſt $= 2\pi b$. Da dieſer der Grundlinie gleich iſt, ſo iſt $2\pi b = 2m\pi a$, und daher $m = \frac{b}{a}$. Setzt man dieſen Werth für m, ſo iſt $\frac{dy}{dx} = \frac{a\sin\varphi}{b - a\cos\varphi}$.

XXVI. Hieraus ergiebt ſich folgende Conſtruction für die Normale. Man ziehe durch M mit der Grundlinie die parallele MQ bis an de, welche den erzeugenden Kreis in R ſchneide. Da $MP = a(1 - \cos\varphi)$ iſt, ſo iſt $dQ = a(1 - \cos\varphi)$, alſo $CQ = a\cos\varphi$, und der Winkel $dCR = \varphi$, ſpitz, wenn dQ kleiner als dC; ſtumpf, wenn dQ größer als dC iſt, als wodurch $\cos\varphi$ negativ iſt. Man ziehe durch D, den Berührungspunct des Kreiſes DFED mit AB, nach R die gerade DR, ſo iſt in dem Dreyecke DCR die tang CDR $= \frac{a\sin\varphi}{b - a\cos\varphi}$ (trigonom. Formeln), alſo W. RDC = PMN, und die Normale MN iſt parallel mit DR.

XXVII. In der gedehnten Cykloide (Fig. 97.) ſchneidet DR den Halbkreis dRe zweymahl, den Berührungsfall ausgenommen; alſo ſind an dem Theile der Cykloide von a bis e je zwey Normalen, folglich auch je zwey berührende, einander parallel. Man ziehe von D aus die berührende DH an den Halbkreis dRe, ſo iſt

nur eine Normale, welche dieſelbe Lage gegen ihre Ordinate, wie D H gegen D E hat. Zieht man durch den Berührungspunct H die parallele HK mit ab oder **AB**, ſo trifft dieſe die Cykloide in dem Wendungspuncte K. Denn von dem unterſten Puncte a bis K nimmt der Winkel der Normale mit der Abſciſſenlinie, von dem Anfange der Abſciſſen an, genommen, ab, und daher iſt der Bogen a K convex gegen dieſe; jenſeits K nimmt der Winkel der Normale mit der Abſciſſenlinie wieder zu, und der Bogen iſt concav gegen ad. (Concav und Convex. 3.).

XXVIII. Dieſes folgt auch aus der Regel (a. a. O. 11.), die wir hier zur Übung in ihrem Gebrauche anwenden wollen. Der Bogen einer Curve iſt convex gegen die Abſciſſenlinie, wo für poſitive Ordinaten, wie hier, der Quotient $\frac{d^2y}{dx^2}$ poſitiv iſt, concav, wo derſelbe negativ iſt. Dabey iſt dx unveränderlich. Da $dx = a(m - \cos\varphi)\,d\varphi$, und $d^2x = 0$, ſo iſt $0 = (m - \cos\varphi)\,d^2\varphi + \sin\varphi . d\varphi^2$, alſo $d^2\varphi = -\frac{\sin\varphi}{m - \cos\varphi}\,d\varphi^2$.

Aus der Gleichung $dy = a\sin\varphi . d\varphi$ folgt $d^2y = a\cos\varphi . d\varphi^2 + a\sin\varphi . d^2\varphi$, das iſt,

$$d^2y = a\cos\varphi . d\varphi^2 - \frac{a\sin\varphi^2}{m - \cos\varphi}\,d\varphi^2 =$$

$$= \frac{a(m\cos\varphi - 1)}{m - \cos\varphi}\,d\varphi^2 \;.\;.$$ Nunmehr iſt $\frac{d^2y}{dx^2}$ $= \frac{m\cos\varphi - 1}{a(m - \cos\varphi)^3}$, oder $= \frac{1 - m\cos\varphi}{a(\cos\varphi - m)^3}$.

An der gedehnten Cykloide (Fig. 97.) iſt $m > 1$, weil $b > a$ iſt, alſo iſt der Nenner, $m - \cos\varphi$, poſitiv. Der Zähler, $m\cos\varphi - 1$, iſt poſitiv, wenn $\cos\varphi > \frac{1}{m}$, oder wenn $\cos\varphi > \frac{a}{b}$ iſt; er iſt $= 0$, wenn $\cos\varphi = \frac{a}{b}$; negativ für $\cos\varphi < \frac{a}{b}$, und für einen

Winkel φ, der größer als ein Rechter iſt, unbedingt negativ. Nun iſt für den Punct K, $\cos\varphi = \frac{a}{b}$, weil für denſelben $\cos\varphi = \frac{CH}{CD}$ iſt. Für die Puncte zwiſchen a und K iſt $\cos\varphi > \frac{a}{b}$, und jenſeits K iſt $\cos\varphi < \frac{a}{b}$. Alſo iſt die Cykloide von a bis K gegen die Abſciſſenlinie convex, und von K bis e concav, ſo daß in K der Wendungspunct fällt.

An der verkürzten Cykloide (Fig. 98.) iſt m oder $\frac{b}{a}$ ein eigentlicher Bruch, alſo wird der Zähler des Quotienten, nämlich $1 - m\cos\varphi$ nie Null, aber hier kann der Nenner Null werden, wodurch der Quotient unendlich groß wird. Dieſes geſchieht in dem Puncte m der Ovale, wo ſie von der Ordinate pm berührt wird. An dieſer Cykloide ſind die Abſciſſen für den Bogen amG negativ. Denn es iſt $x = m\varphi - \sin\varphi$. Dieſer Werth iſt $= 0$, ſowohl wenn $\varphi = 0$, als wenn φ . . $= \frac{\sin\varphi}{m}$, welches hier möglich iſt, weil m ein eigentlicher Bruch iſt. Der erſte Winkel gehört zu dem Puncte a, der zweyte zu dem Puncte G, dem Durchſchnitte mit der nächſt angränzenden Cykloide.

Die größte Abſciſſe ap zu beſtimmen, ſetze man das Differential von $m\varphi - \sin\varphi$, oder von $\sin\varphi - m\varphi$ gleich Null, alſo $\cos\varphi . d\varphi - m d\varphi = 0$, ſo iſt $\cos\varphi = m$. Für den Werth von φ, der hieraus ſich ergiebt, iſt der Quotient $\frac{d^2y}{dx^2}$ unendlich groß; für einen kleinern Werth von φ iſt $\cos\varphi > m$, und der Quotient poſitiv, für ei-

nen kleinern negativ. Alſo iſt dort die krumme Linie gegen die Abſciſſenlinie convex, hier concav, und der Wechſel geſchieht in dem Punkte m, wo die Ordinate eine berührende iſt.

XXIX. Der Halbmeſſer der Krümmung an der gedehnten und an der verkürzten Cykloide iſt

$$= \frac{(aa - 2ab\cos\varphi + bb)^{\frac{3}{2}}}{a(a - b\cos\varphi)}.$$

Es iſt der Halbmeſſer der Krümmung $r =$

$-(1+pp)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{dx}{dp}$, wo $p = \frac{dy}{dx}$ iſt, (Krümmungskreis, 2).

Hier iſt $p = \frac{\sin\varphi}{m - \cos\varphi}$;

$$1 + pp = \frac{mm - 2m\cos\varphi + 1}{(m - \cos\varphi)^2};$$

ferner $dp = \frac{m\cos\varphi - 1}{(m - \cos\varphi)^2} d\varphi$,

und $\frac{dx}{dp} = \frac{a(m - \cos\varphi)^3}{m\cos\varphi - 1}$; folglich

$r = \frac{a(mm - 2m\cos\varphi + 1)^{\frac{3}{2}}}{1 - m\cos\varphi}$. In dieſer Formel

ſetze man für m ſeinen Werth, $\frac{b}{a}$, und multiplicire

Zähler und Nenner mit a^3 oder $(a^2)^{\frac{3}{2}}$, ſo erhält r den angegebenen Werth. Der Zähler kann überhaupt poſitiv oder negativ genommen werden, weil eine Quadratwurzel beides ſeyn kann. Die Größe $aa - 2ab\cos\varphi + bb$ iſt aber poſitiv, weil ab nothwendig kleiner als $\frac{1}{4}(a+b)^2$, und daher 2ab kleiner als $aa + bb$, und noch mehr $2ab\cos\varphi$ kleiner als dieſe Summe iſt.

XXX. An der gedehnten Cykloide iſt in K, wo $\cos\varphi = \frac{1}{m}$ oder $\frac{a}{b}$ iſt, der Halbmeſſer der Krüm-

mung unendlich groß; in a, wo $\cos\varphi = 1$, iſt derſelbe $= -\frac{(b-a)^2}{a}$; im Scheitel e, wo $\cos\varphi = -1$, iſt derſelbe $= +\frac{(a+b)^2}{a}$.

An der verkürzten Cykloide iſt in m, wo $\cos\varphi = m = \frac{b}{a}$ iſt, der Halbmeſſer der Krümmung $= (aa - bb)^{\frac{1}{2}}$; in a iſt derſelbe $= -\frac{(a-b)^2}{a}$; in e iſt er . . . $= +\frac{(a+b)^2}{a}$. Die Vorzeichen ſind ſo genommen, daß ein poſitiver Krümmungshalbmeſſer zu einem concaven Bogen, ein negativer zu einem convexen gehört. In dem Puncte m (Fig. 98.) bleibt das Vorzeichen weg, weil hier der Übergang von dem Convexen zum Concaven geſchieht.

XXXI. Die Cykloide hat die Erfindung einer andern krummen Linie veranlaßt, welche zuerſt die kleine Cykloide hieß, hernach aber den Namen, Gefährtinn der Cykloide (Cycloidis socia) erhalten hat. Ehedem hat man ſich viel mit ihr beſchäftigt. Ihre Conſtruction iſt folgende. Mit dem Halbmeſſer AC (Fig. 100.) ſey ein Kreis ANBA beſchrieben. Auf dem Durchmeſſer AB errichte man in irgend einem Puncte P die ſenkrechte PM, welche den Halbkreis ANB in N ſchneide. Dem Bogen AN ſetze man die Ordinate PM gleich, ſo iſt M ein Punct dieſer krummen Linie. Ihr Unterſchied von der Cykloide beſteht darin, daß hier die Ordinate PM dem Kreisbogen AN gleich iſt, dagegen an der Cykloide EAM (Fig. 96.) die Ordinate QM = dem Kreisbogen DR + Ordinate am Kreiſe QR iſt. Die Ordinate BD im dem Endpuncte B des Durchmeſſers iſt gleich der Länge des Halbkreiſes, wie an der Cykloide. Die Gefährtinn beſteht wie jene aus unendlich

vielen wiederholten gleichen Portionen, weil zu demſelben Sinus verſus unendlich viele Bogen gehören.

Es ſey AC = a; AP = x; PM = y, ſo iſt y = Arc. cos. $\frac{a-x}{a}$; und $dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{(2ax-xx)}}$.

In E, wozu die Ordinate CE durch den Mittelpunct des Kreiſes C gehört, iſt ein Wendungspunct. Denn es iſt $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a-x}{(2ax-xx)^{\frac{3}{2}}}$. Dieſer Quotient iſt negativ, wenn a > x, und die krumme Linie iſt concav gegen AB von A bis E. Er iſt poſitiv, wenn a < x, alſo iſt die Linie von E bis D gegen CB convex.

Die Linie EMA heißt auch die Linie der Sinus. Wenn nämlich MQ auf CE ſenkrecht gezogen wird, ſo iſt EQ gleich dem Bogen NF, und MQ, gleich dem lineariſchen Sinus deſſelben für den Halbmeſſer AC. Die andere der EMA gleiche Hälfte für die Sinus der Bogen über einen Quadranten muß noch hinzugefügt werden. Wallis nennt die Linie AMD lineam sinuum versorum.

XXXII. Wenn die Ordinaten PM ſich wie die Bogen AN verhalten, ſo entſteht eine verwandte Linie. Ihre Gleichung iſt y = ma Arc. cos $\frac{a-x}{a}$. Iſt m größer als die Einheit, ſo iſt die Curve eine Socia cycloidis (trochoidis) elongata. Für ein ſehr großes m nähert ſie ſich der Geſtalt einer ſchwingenden Saite, bey einer Totalſchwingung, und zwar mit dem Theile AME, und dem ihm gleichen in der andern Hälfte. Man ſehe Jo. Bernoulli Opera, vol. III. pag. 210, wo ſie für die Figur einer ſchwingenden Saite ſelbſt erklärt wird. Richtiger aber wird dieſe erhalten, wenn ſtatt des Kreiſes eine Ellipſe genommen wird, deren halbe große Axe CF iſt, mit einer ſehr kleinen Excentricität. Hiervon in der zweyten Abtheilung, Artikel, Saite.

Von der Evolution der Cykloide. ſ. **Evolution.** Die Beſtimmung des Schwerpunctes ihrer Area und des cykloidaliſchen Konoids in dem Artikel, **Schwerpunct.** Die Eigenſchaft, daß ſie die Linie des ſchnelleſten Falles iſt, wird in dem Artikel: **Variation,** vorkommen; die Eigenſchaft, daß ſie ein Pendel ſich gleichzeitig ſchwingen läßt, in dem Artikel: **Fall der Körper,** in der zweyten Abtheilung dieſes Werkes.

Die Schrift von Wallis über die Cykloide iſt mühſam zu leſen, wenn man es nicht zur Vergleichung ſeiner Methode mit der neuern viel bequemern unternimmt. In den Werken der beiden Bernoulli, beſonders des jüngern, iſt vieles über die Cykloide enthalten. Man ſehe auch nach Boscovich de cycloide et Logistica. Romae, 1745. Nouvelle manière de démontrer les proprietés de la cycloide par Bossut. Mem. présentés, T. 3. Noch einige Abhandlungen über dieſe Linie in Murhards Bibl. math. Tom. II. pag. 357. In den Werken über die Infiniteſimalrechnung wird ſie häufig als Beyſpiel gebraucht, beſonders in der Analyse des infin. petits von l'Hopital. Die Geſchichte derſelben hat Montucla ausführlich vorgetragen in ſeiner Geſchichte der Mathematik. 2. Band, S. 52 — 73. zweyte Ausg. Er hat dabey benutzt die Histoire de la Roulette von Paſcal, und Gröningii historia Cycloidis, Hamburgi 1701.

Cykloimber, Circulus imbricatus, hohl gebogener Kreis, iſt eine krumme Linie von doppelter Krümmung, auf der Oberfläche eines ſenkrechten Cylinders, deren Abſciſſen Bogen des Kreisumfanges von der Grundfläche dieſes Körpers, und die Ordinaten, welche auf die Grundfläche ſenkrecht geſtellt ſind, den Ordinaten einer krummen Linie von einfacher Krümmung gleich ſind, an welcher die Abſciſſen mit denjenigen zu den Bogen des Kreisumfanges übereinkommen. Dieſe zweyte krumme Linie gehe durch die Endpuncte eines Durchmeſſers der cylindriſchen Grundfläche. Der Durchſchnitt zweyer cy-

lindriſchen Flächen, deren Axen ſich ſenkrecht ſchneiden, und die auch auf ihre Grundfläche jede ſenkrecht ſtehen, iſt ein Cykloimber. Frezier hat dieſe krumme Linie betrachtet, und ihr den Namen gegeben. Traité de Stéréotomie, T. I. p. 42, Zimmermann de curva imbricata. Göttingae. 1765. S. Stereotomie.

Cyklometrie, iſt der Inbegriff der Formeln, welche die Relationen der Kreisbogen und der ihnen zugehörigen geraden Linien darſtellen. Sie iſt einer der wichtigſten und ſchönſten Theile der neuern Analyſis. Denn was vor der Erfindung unſerer Infiniteſimalrechnung darin gethan iſt, ſind nur einzelne, ſehr mühſame Verſuche. Ich unterſcheide die Cyklometrie von der Goniometrie, welche die Vergleichung der Winkel mittelſt der von ihnen abhängigen geraden Linien enthält. Die Anwendung der cyklometriſchen Formeln auf die numeriſche Berechnung der zu den Kreisbogen gehörigen geraden Linien, oder dieſer aus jenen, nenne ich Cyklotechnie, welche einen beſondern Artikel ausmacht, um der Ueberſicht jener nicht hinderlich zu fallen. In dieſem Artikel werden auch die Bemühungen der ältern Geometer um die Kreismeſſung erzählt werden.

1. In dem Halbkreiſe AMB (Fig. 101. Tab VII.) ſey der Halbmeſſer AC $=1$; der Bogen AM $=\varphi$, deſſen Sinus PM $=y$; es iſt

$$\varphi = y + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3}y^3 + \frac{1.3}{2.4}\cdot\tfrac{1}{5}y^5$$

$$+ \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\tfrac{1}{7}y^7 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\tfrac{1}{9}y^9 \;\ldots\ldots$$

$$+ \frac{1.3.5..2n-1.}{2.4.6\ldots.2n}\cdot\frac{1}{2n+1}\,y^{2n+1} + \text{etc.}$$

Denn es iſt (Different. Formel, 31.), $d\varphi = \ldots\ldots$ $\frac{d\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{dy}{\surd(1-y^2)} = (1-y^2)^{-\frac{1}{2}}dy$. Die Po-

tenzialgröße verwandle man in eine Reihe nach dem binomiſchen Lehrſatze, 13. IV. wo $-y^2$ ſtatt z zu ſetzen iſt. Aus den Gliedern dieſer Differential-Reihe entſtehen durch Integration die Glieder der in dem Satze aufgeſtellten Reihe.

2. Es iſt keine Conſtans in dem Integral zugefügt worden, damit φ den kleinſten zu dem Sinus y gehörigen Bogen bedeute, da Bogen und Chorde oder Sinus ſich deſto näher kommen, je kleiner ſie ſind. Die Conſtans muß hier Null ſeyn. Wollte man für ſie irgend ein Vielfaches der ganzen Peripherie ſetzen, weil für Bogen, die um ein ſolches Vielfaches verſchieden ſind, dieſelben Sinus Statt haben, ſo hätte die Reihe für jedes gegebene y unzählig viele Werthe.

3. Hierbey kommt in Betrachtung, daß das

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}}, \text{ oder das } \int \frac{a\,dy}{\sqrt{(a^2-y^2)}} \text{ für den Halb-}$$

meſſer a, nur bey der Anwendung auf die Geometrie einen Kreisbogen vorſtellt. Es iſt aber allgemein eine analytiſche Function, die auch vorkommt, wo nicht von Kreisbogen oder Winkeln die Frage iſt. In der Reihe ſelbſt kann man für y größere Werthe als die Einheit ſetzen, ohne daß dieſes etwas widerſprechendes mit ſich führte, ſo wie auch in der Reihe für die Potenz $(1-yy)^{-\frac{1}{2}}$. Reihen geben nur die Form der Größen, die dadurch dargeſtellt werden, nicht ſchlechthin ihren arithmetiſchen Werth. Die Anwendbarkeit einer Reihe zur Berechnung muß aus den Umſtänden beurtheilt werden.

4. Es ſey des Bogens AM Coſinus CP $= x$, und der halbe Umfang des Kreiſes $= \pi$, ſo iſt $\frac{1}{2}\pi - \varphi$

$$= x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5}x^5 + \text{etc. wie in der}$$

Reihe (1.).

Denn es iſt x der Sinus des Bogens $\frac{1}{2}\pi - \varphi$, welcher durch ſeinen Sinus eben ſo dargeſtellt wird, wie

φ durch y. Eben dieſes erhält man aus der Integration der Formel $d\varphi = -\frac{d\cos\varphi}{\sin\varphi} = -\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$, worin das Vorzeichen anzeigt, daß die Differentiale des Bogens und des Coſinus ungleichnamig ſind. Es iſt daraus $Const - \varphi = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3 + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{1}{5}x^5 +$ etc. und die $Const = \frac{1}{2}\pi$, damit für $x = 0$ auch der Bogen, $Const - \varphi = 0$ ſey, und damit Coſinus und Bogen ſich einander deſto mehr nähern, je kleiner beide ſind.

5. Es iſt $\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{1.2.3} + \frac{\varphi^5}{1.2.3.4.5} - \frac{\varphi^7}{1.2..6.7} + \frac{\varphi^9}{1.2..8.9} -$ etc.

Die wirkliche Umkehrung der Reihe in (1.) würde ſehr beſchwerlich fallen. Iſt aber nur die Form der umgekehrten Reihe bekannt, ſo iſt es durch eine leichte Rechnung möglich, die Coefficienten zu beſtimmen. Daß y die Form, $A\varphi + B\varphi^5 + C\varphi^6 + D\varphi^7 +$ etc. haben müſſe, erhellet daraus, daß für gleiche entgegengeſetzte Bogen die Sinus gleich und entgegengeſetzt werden. Darum können erſtlich nicht alle Potenzen von φ in der Reihe für y Statt haben, weil dadurch für entgegengeſetzte Bogen die Werthe der Sinus nicht gleich würden: zweytens auch nicht bloß die geraden Potenzen, welche für entgegengeſetzte φ dieſelbigen und gleichnamigen Sinus geben würden. Die Beſchaffenheit der Vorzeichen muß die Rechnung mit der Größe der Coefficienten zugleich beſtimmen. Ohne aber auf die Beſchaffenheit der Reihe für den Kreis zu achten, kann man dieſes folgendergeſtalt darthun. Man ſetze $y = \varphi - u$, ſo iſt $u = \alpha(\varphi - u)^5 + \beta(\varphi - u)^6 + \gamma(\varphi - u)^7$ + etc. wo die Coefficienten α, β, γ, etc. der Kürze wegen für die Zahlcoefficienten in der Reihe (1.) geſetzt ſind. Die Entwickelung der Glieder giebt eine

Reihe, worin die veränderlichen Factoren entweder die Form $\varphi^{2m+1} u^{2n}$, oder die, $\varphi^{2m} u^{2n+1}$, haben. Setzt man für einen Factor u jene Reihe, ſo behalten die Glieder eben die Form. Wird nun ſolchergeſtalt u aus einem Gliede der Reihe nach dem andern herausgeſchafft, ſo behält man nur Glieder mit ungeraden Potenzen von φ.

Man ſetze demnach $y = A\varphi - B\varphi^3 + C\varphi^5 - D\varphi^7 + E\varphi^9 - \text{etc.}$ Ob die Vorzeichen richtig angenommen ſeyn, muß die Rechnung zeigen. Für das zweyte Glied iſt es gleich klar, weil φ größer als y iſt, es müßte denn A ein Bruch ſeyn. Wir haben die beiden Differentialgleichungen, $x\,d\varphi = dy$, und $y\,d\varphi = -dx$. In der zweyten ſetze man für y die angenommene Reihe, ſo iſt

$$-A\varphi\,d\varphi + B\varphi^3 d\varphi - C\varphi^5 d\varphi + D\varphi^7 d\varphi - E\varphi^9 d\varphi + \text{etc.} = +dx;$$

alſo durch die Integration

$$1 - \tfrac{1}{2}A\varphi^2 + \tfrac{1}{4}B\varphi^4 - \tfrac{1}{6}C\varphi^6 + \tfrac{1}{8}D\varphi^8 - \tfrac{1}{10}E\varphi^{10} + \text{etc.} = x,$$

wo die Const. = 1 iſt, da für φ = 0, x = 1 iſt.

Man multiplicire dieſe Gleichung mit dφ, ſo iſt

$$d\varphi - \tfrac{1}{2}A\varphi^2 d\varphi + \tfrac{1}{4}B\varphi^4 d\varphi - \tfrac{1}{6}C\varphi^6 d\varphi + \tfrac{1}{8}D\varphi^8 d\varphi - \tfrac{1}{10}E\varphi^{10} d\varphi + \text{etc.} = x\,d\varphi = dy.$$

Daraus iſt

$$\varphi - \frac{1}{2.3}A\varphi^3 + \frac{1}{4.5}B\varphi^5 - \frac{1}{6.7}C\varphi^7 + \frac{1}{8.9}D\varphi^9 - \frac{1}{10.11}E\varphi^{11} + \text{etc.} = y.$$

Dieſe Reihe mit der für y angenommenen verglichen, giebt

$A = 1$; $B = \frac{A}{2 \cdot 3}$; $C = \frac{B}{4 \cdot 5}$; $D = \frac{C}{6 \cdot 7}$;
$E = \frac{D}{8 \cdot 9}$; etc. Folglich hat y die in dem Satze angegebene unendliche Reihe zum Werthe.

6. Es iſt $\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{1 \cdot 2} + \frac{\varphi^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$
$- \frac{\varphi^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{\varphi^8}{1 \cdot 2 \cdot \cdot 7 \cdot 8} -$ etc.
Der Beweis iſt in dem des vorhergehenden Satzes enthalten.

7. Die beiden Formeln in (5. 6.) fließen aus den beiden goniometriſchen (Goniometrie, IV.),

$$\sin n\varphi = n \sin \varphi . \cos \varphi^{n-1}$$
$$- \frac{n . n-1 . n-2 .}{1 . 2 . 3} \sin \varphi^3 \cos \varphi^{n-3}$$
$$+ \frac{n . n - \ldots n-4 .}{1 . 2 \ldots 5} \sin \varphi^5 . \cos \varphi^{n-5}$$
$$- \frac{n . n-1 \ldots n-6 .}{1 . 2 \ldots 7} \sin \varphi^7 . \cos \varphi^{n-7} .$$
$$+ \text{etc.}$$

und

$$\cos n\varphi = \cos \varphi^n - \frac{n . n-1 .}{1 . 2} \cos \varphi^{n-2} \sin \varphi^2$$
$$+ \frac{n . n-1 . n-2 . n-3 .}{1 . 2 . 3 . 4} \cos \varphi^{n-4} . \sin \varphi^4$$
$$- \frac{n \ldots n-5}{1 \ldots 6} \cos \varphi^{n-6} . \sin \varphi^6$$
$$+ \text{etc.}$$

Man ſetze nämlich $n\varphi = \omega$, und laſſe n ſehr groß, und φ dagegen ſehr klein ſeyn, ſo daß das Product $n\varphi$ irgend einen endlichen Winkel gebe. So nähert ſich $\sin \varphi$ deſto mehr dem Bogen φ, je kleiner φ iſt, und $\cos \varphi$ der Einheit. Die Brüche $\frac{n-1}{n}$; $\frac{n-2}{n}$; $\frac{n-3}{n}$, etc.

nähern ſich auch deſto mehr der Einheit, je größer n iſt. Setzt man nun ſtatt $\frac{\sin\varphi}{\varphi}$, $\frac{\cos\varphi}{1}$, $\frac{n-1}{n}$, $\frac{n-2}{n}$, etc. ihre Gränzen, jede $= 1$, und ſtatt $n\varphi$ den Werth ω, ſo erhält man die Formeln in (5, 6.), nachdem man das Symbol ω, mit dem gleichgültigen φ, das nun ebenfalls einen endlichen Winkel wieder bedeutet, vertauſcht hat. Euler hat dieſe Deduction gebraucht in der Introd. in Anal. Infin. T. I. §. 134.

Eine unmittelbare Herleitung der Formeln (5, 6.) wird in der Differenzenrechnung, 27—29 vorkommen.

8. In den Formeln für y und x kann φ ſowohl geometriſch als analytiſch jeden Werth erhalten. Der Werth von y, als Sinus des Bogens φ, wird $= 0$, wenn $\varphi = 0$; $\pm\pi$; $\pm 2\pi$; $\pm 3\pi$; $\pm 4\pi$; etc. iſt, und ein poſitives Größtes, oder ein negatives Kleinſtes, die Einheit, für $\varphi = \pm\frac{1}{2}\pi$; $\pm\frac{3}{2}\pi$; $\pm\frac{5}{2}\pi$; etc. Der Werth von x, als Coſinus des Bogens φ, wird $= 0$, wenn $\varphi = \pm\frac{1}{2}\pi$; $\pm\frac{3}{2}\pi$; $\pm\frac{5}{2}\pi$; etc. iſt, und ein poſitives Größtes, oder ein negatives Kleinſtes, die Einheit, wenn $\varphi = 0$; $\pm\pi$; $\pm 2\pi$; $\pm 3\pi$; etc. Die negativen Kleinſten ſind, abſolut genommen, Größte.

Die Gleichung für φ, wenn $y = 0$ geſetzt wird, hat daher unendlich viele mögliche Wurzeln, welche ſind: 0; $\pm\pi$; $\pm 2\pi$; $+3\pi$; $+4\pi$; etc. Die Gleichung für φ, wenn $x = 0$ geſetzt wird, hat eben ſo unendlich viele Wurzeln, $\pm\frac{1}{2}\pi$; $\pm\frac{3}{2}\pi$; $\pm\frac{5}{2}\pi$; $\pm\frac{7}{2}\pi$; $\pm$ etc.

Eben ſo ſind in einer Gleichung für irgend eine Größe z, mit vollzähligen möglichen Wurzeln die größten Werthe derſelben abſolut genommen, abwechſelnd poſitiv und negativ, und ihre Wurzeln liegen zwiſchen den zu dieſen Größten gehörigen Werthen von z. Die Gleichungen für x und y ſind alſo als Gleichungen mit vollzähligen möglichen Wurzeln anzuſehen, da die Anzahl der Werthe von x und y, für welche die Werthe jener Gleichungen Null oder abſolute Größte ſind, unendlich groß iſt, wie

der Grad der Gleichung, dieſe Werthe auch ganz gleichförmig, ohne Unterbrechung auf einander folgen.

9. In der Formel für φ (1), ſetze man $y = 1$, und die Binomial-Coefficienten, $\frac{1}{2} = \alpha$; $\frac{1.3}{3.4} = \beta$; $\frac{1.3.5}{2.4.6} = \gamma$; $\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} = \delta$; etc. ſo iſt der Quadrant $\frac{1}{2}\pi = 1 + \frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{5}\beta + \frac{1}{7}\gamma + \frac{1}{9}\delta +$ etc. Dieſer Werth läßt ſich auf unzählig viele Arten abändern. Es iſt

α. $\frac{1}{2}\pi = \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\alpha + \frac{1}{7}\beta + \frac{1}{9}\gamma + \frac{1}{11}\delta +$ etc.

β. $\frac{1}{2}\pi = \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\alpha + \frac{1}{9}\beta + \frac{1}{11}\gamma + \frac{1}{13}\delta +$ etc.

und überhaupt

$$\frac{1.3\ldots(2m+1)}{2.4\ldots(2m+2)} \cdot \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2m+3} + \frac{\alpha}{2m+5} + \frac{\beta}{2m+7} + \frac{\gamma}{2m+9} + \text{etc.}$$

Auch iſt

$$\frac{1.3\ldots(2m-1)}{2.4\ldots\ \ 2m} \cdot \frac{1}{m+1} \cdot \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2(m+3)} - \frac{\alpha}{4(2m+5)} - \frac{\beta}{6(2m+7)} - \frac{\gamma}{8(2m+9)} - \text{etc.}$$

Man ſehe meine Abhandlung über die verſchiedenen Zuſammenſetzungen des Umfanges eines Kreiſes aus denſelben Elementen, im Archiv der Mathem. 2r Bd. 5s Heft.

10. Man ziehe in A (Fig. 101. Tab. VII.) die berührende AT, welche von der verlängerten CM in N geſchnitten werde, und ſetze $AN = t$, für $AC = 1$, ſo iſt $\varphi = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \frac{1}{9}t^9 -$ etc.

Die Differentialgleichung für die Tangente des Bogens $\varphi = AM$, nämlich $d\varphi = \frac{dt}{1+tt}$ (Differential-

formel, 31.) verwandelt ſich mittelſt der wirklichen Diviſion der Einheit durch $1 + tt$ in dieſe, $d\varphi = (1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 - \text{etc.})\, dt$, woraus durch die Integration die angegebene Formel folgt. Da das Gränzverhältniß zwiſchen φ und t das 1 : 1 iſt, ſo muß die Conſt = 0 ſeyn.

11. Die Reihe divergirt, wenn t größer als die Einheit, oder wenn der Bogen φ größer, als ein halber Quadrant iſt. Sie convergirt äußerſt langſam, wenn φ ein halber Quadrant, und $t = 1$ iſt. Nach Eulers Bemerkung, Comment. Petrop. vet. T. IX. pag. 226. müßte man von ihr 10^{50} Glieder berechnen, den Umfang auf 100 Stellen zu erhalten, welches eine ungeheure Zeit erfordern würde. Wenn t größer als die Einheit iſt, ſo giebt die Reihe bloß die Form des Bogens durch die Tangente. Das Verhältniß $d\varphi : dt$ hat immer dieſelbe Form $1 : 1 + tt$, es mag t größer oder kleiner als die Einheit ſeyn. Daher hat auch $\varphi : t$ dieſelbe Form in beiden Fällen. Um φ durch t auszudrucken in dem Falle, da t größer als die Einheit iſt, muß bey der Diviſion der Einheit durch $1 + tt$ in der Differentialgleichung der Theil tt zum erſten Theile genommen werden.

12. Es iſt $\varphi = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{t} + \frac{1}{3t^3} - \frac{1}{5t^5} + \frac{1}{7t^7} - \frac{1}{9t^9} + \text{etc.}$

Denn $d\varphi = \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^4} + \frac{1}{t^6} - \frac{1}{t^8} + \text{etc.}\right) dt$,

alſo

$$\varphi - \text{Conſt} = -\frac{1}{t} + \frac{1}{3t^3} - \frac{1}{5t^5} + \frac{1}{7t^7} - \text{etc.}$$

Die Reihe wird = 0, wenn t unendlich groß iſt; alsdann iſt $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, daher Conſt $= \frac{1}{2}\pi$.

13. Es ſey $u = \text{cotang}\,\varphi$, ſo iſt

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\pi - u + \tfrac{1}{3}u^3 - \tfrac{1}{5}u^5 + \tfrac{1}{7}u^7 - \tfrac{1}{9}u^9 + \text{etc.}$$

Dieſe Formel folgt aus der vorhergehenden, da $u = \frac{1}{t}$ iſt, (Goniometrie, 9.).

14. Es iſt $t = \text{tang}\,\varphi = \varphi + \frac{1}{3}\varphi^3 + \frac{2}{3.5}\varphi^5$
$+ \frac{17}{3.3.5.7}\varphi^7 + \frac{2.31}{3.3.5.7.9}\varphi^9$
$+ \frac{2.691}{3.3.5.5.7.9.11}\varphi^{11} + \text{etc.}$

Man ſetze, wie in (5), $t = a\varphi + b\varphi^3 + c\varphi^5 + d\varphi^7 + e\varphi^9 + f\varphi^{11} + \text{etc.}$, und $t^2 = \alpha\varphi^2 + \beta\varphi^4 + \gamma\varphi^6 + \delta\varphi^8 + \varepsilon\varphi^{10} + \text{etc.}$ wo die Coefficienten α, β, etc. durch a, b, etc. gegeben ſind. Da $dt = (1 + t^2)\,d\varphi$, ſo iſt

$$t = \varphi + \tfrac{1}{3}\alpha\varphi^3 + \tfrac{1}{5}\beta\varphi^5 + \tfrac{1}{7}\gamma\varphi^7 + \tfrac{1}{9}\delta\varphi^9 + \text{etc.}$$

Es iſt $\alpha = a^2$; $\beta = 2ab$; $\gamma = 2ac + bb$;
$\delta = 2ad + 2bc$; $\varepsilon = 2ae + 2bd + cc$;
$\zeta = 2af + 2be + 2cd$; etc.

Die Vergleichung der gefundenen Reihe für t mit der angenommenen, giebt

$$a = 1;\ 3b = \alpha;\ 5c = \beta;\ 7d = \gamma;\ 9e = \delta, \text{ etc.}$$

folglich iſt

$a = 1$; $3b = a^2$;
$5c = 2ab$; $7d = 2ac + bb$;
$9e = 2ad + 2bc$;
$11f = 2ae + 2bd + cc$;
$13g = 2af + 2be + 2cd$;
$15h = 2ag + 2bf + 2ce + dd$;
etc.

Wenn die Stellen der a, b, c, etc. durch 1, 2, 3. etc. bezeichnet werden, ſo ſind in jedem Coefficienten alle Combinationen je zweyer vorhergehenden enthalten, deren Stellenzahlen zuſammengenommen die Stellenzahl jenes ausmachen, von ihren Verſetzungszahlen begleitet. Die

Summe aller wird durch $2n-1$ dividirt, wenn n die Stellenzahl des Coefficienten iſt. Da jeder Coefficient aus allen vorhergehenden zuſammengeſetzt wird, ſo entſteht daher die ſcheinbare Unregelmäßigkeit der numeriſchen Coefficienten, deren Geſetz inzwiſchen ganz faßlich iſt.

15. Es ſey $u = \cot \varphi$, ſo iſt

$$u = \frac{1}{\varphi} - \frac{1}{3}\varphi - \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 5}\varphi^3 - \frac{2}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}\varphi^5$$
$$- \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}\varphi^7 - \frac{2}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}\varphi^9$$
$$- \frac{2 \cdot 17 \cdot 19}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}\varphi^{11} - \text{etc.}$$

Die Reihe für u iſt der Quotient von 1 dividirt durch die Reihe für t. Das erſte Glied iſt alſo $\frac{1}{\varphi}$. Man ſetze $u = \frac{1}{\varphi} - a\varphi - b\varphi^3 - c\varphi^5 - d\varphi^7 - e\varphi^9 - f\varphi^{11} - \text{etc.}$ wo die Werthe von a, b, c, etc. andere ſind, als in der Reihe für t. Man ſetze auch $u^2 = \frac{1}{\varphi^2} + \alpha + \beta\varphi^2 + \gamma\varphi^4 + \delta\varphi^6 + \varepsilon\varphi^8 + \zeta\varphi^{10} + \text{etc.}$ ſo iſt

$\alpha = -2a$; $\beta = -2b + a^2$.
$\gamma = -2c + 2ab$; $\delta = -2d + 2ac + bb$.
$\varepsilon = -2e + 2ad + 2bc$;
$\zeta = -2f + 2ae + 2bd + cc$.
etc.

Da $u = \frac{1}{t}$, ſo iſt $du = -\frac{dt}{t^2} = -(1 + u^2)d\varphi$, weil $d\varphi = \frac{dt}{1 + t^2}$; alſo entſteht für du die Reihe

$$du = -\frac{d\varphi}{\varphi^2} - (1 + \alpha)d\varphi - \beta\varphi^2 d\varphi - \gamma\varphi^4 d\varphi - \text{etc.}$$

und daher

$$u = \frac{1}{\varphi} - (1+\alpha)\varphi - \tfrac{1}{3}\beta\varphi^3 - \tfrac{1}{5}\gamma\varphi^5 - \tfrac{1}{7}\delta\varphi^7 - \text{etc.}$$

Die Vergleichung dieſer Reihe mit der angenommenen giebt

$$a = 1 + \alpha = 1 - 2a$$
$$3b = \beta = -2b + aa$$
$$5c = \gamma = -2c + 2ab$$
$$7d = \delta = -2d + 2ac + bb$$
$$9e = \varepsilon = -2e + 2ad + 2bc$$
etc.

Das iſt

$$3a = 1; \quad 5b = aa$$
$$7c = 2ab; \quad 9d = 2ac + bb$$
$$11e = 2ad + 2bc; \quad 13f = 2ae + 2bd + cc$$
$$15g = 2af + 2be + 2cd;$$
$$17h = 2ag + 2bf + 2ce + dd;$$
etc.

Das Geſetz der Formation der Coefficienten für die Cotangente iſt daſſelbe, wie für die Coefficienten in der Reihe für die Tangente, außer daß die Diviſoren andere ſind.

16. Die Bernoulliſchen Zahlen ſeyn 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇, etc. diejenigen, welche in dem Artikel, Bernoull. Zahlen, durch A, B, C, D, etc. bezeichnet ſind. Die Vertauſchung der Buchſtabenzeichen geſchieht, um Verwechslung mit den Coefficienten in der Reihe für sin φ zu verhüten. Es iſt daſelbſt (7.) gefunden

$$\cot\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{2}{\varphi} - \frac{2\mathfrak{A}}{1.2}\varphi - \frac{2\mathfrak{B}}{1.2.3.4}\varphi^3$$
$$- \frac{2\mathfrak{C}}{1.2..6}\varphi^5 - \frac{2\mathfrak{D}}{1.2..8}\varphi^7 - \frac{2\mathfrak{E}}{1.2..10}\varphi^9$$

Setzt man hier 2φ für φ, ſo iſt

$$\cot\varphi = \frac{1}{\varphi} - \frac{4\mathfrak{A}}{1.2}\varphi - \frac{4^2.\mathfrak{B}}{1.2.3.4}\varphi^3 - \frac{4^3.\mathfrak{C}}{1.2..6}\varphi^5 - \frac{4^4.\mathfrak{D}}{1.2..8}\varphi^7 - \frac{4^5.\mathfrak{E}}{1.2..10}\varphi^9 - \text{etc.}$$

17. Da $\tang\varphi = \cot\varphi - 2\cot 2\varphi$, (Goniometrie, 4.) und $2\cot 2\varphi = \frac{1}{\varphi} - \frac{4^2.\mathfrak{A}}{1.2}\varphi - \frac{4^4.\mathfrak{B}}{1..4}\varphi^3 - \frac{4^6.\mathfrak{C}}{1..6}\varphi^5 - \text{etc.}$ iſt, ſo wird durch die Subtraction dieſer Reihe von jener erhalten,

$$\tang\varphi = \frac{4(4-1)\mathfrak{A}}{1.2}\varphi + \frac{4^2(4^2-1)\mathfrak{B}}{1..4}\varphi^3 + \frac{4^3(4^3-1)\mathfrak{C}}{1..6}\varphi^5 + \frac{4^4(4^4-1)\mathfrak{D}}{1..8}\varphi^7 + \text{etc.}$$

18. Da die Formation der Coefficienten in den Reihen für $\tang\varphi$ und $\cot\varphi$ einfacher iſt, als die Formation der Bernoulliſchen Zahlen, (a. a. O. 9.), ſo könnte man eher dieſe aus jenen, als jene aus dieſen zuſammenſetzen. Der Zuſammenhang zwiſchen jenen Coefficienten und denen des niedrigſten Gliedes in den Summen der geraden Potenzen ganzer Zahlen iſt ſehr merkwürdig.

19. Die Coefficienten in der Reihe für die Tangente haben insbeſondere eine nähere Beziehung auf die Aggregate der ungeraden Potenzen der natürlichen Zahlen mit abwechſelnden Vorzeichen (Potenz IV.). Dieſe Aggregate ſeyn, abſolut genommen, ohne Rückſicht auf ihre wechſelnden Vorzeichen, P, Q, R, S, T, etc. nämlich P für die erſten, Q für die zweyten, R für die dritten Potenzen, u. ſ. f., ſo iſt

$$P = \frac{4-1}{2}\mathfrak{A};\quad Q = \frac{4^2-1}{4}\mathfrak{B};\quad R = \frac{4^3-1}{6}\mathfrak{C};$$

$$S = \frac{4^4-1}{8}\mathfrak{D};\quad T = \frac{4^5-1}{10}\mathfrak{E};\ \text{etc.}$$

(a. a. O. 11; von der Änderung der Symbole iſt der Grund die Verhütung einer Verwechslung mit den hier gebrauchten). Alſo iſt

$$\text{tang}\,\varphi = 4P\varphi + \frac{4^2}{1.2.3}Q\varphi^3 + \frac{4^3}{1\ldots5}R\varphi^5 + \frac{4^4}{1..7}S\varphi^7 + \frac{4^5}{1..9}T\varphi^9 + \text{etc.}$$

Die Relationen der Größen α, β, γ, δ, etc. (a. a. O. 9.), welche jene Aggregate von Potenzen, durch die Producte der natürlichen Zahlen, 1; 1.2; 1.2.3; etc. dividirt ſind, und die Relationen der Coefficienten in der Reihe für die Tangente, a, b, c. etc. ſind einander ganz ähnlich. Nur iſt $\alpha = \frac{1}{4}$, und $a = 1$. Setzt man $a = 4\alpha$; $b = 4^2\beta$; $c = 4^3\gamma$; $d = 4^4\delta$; u. ſ. f. ſo entſtehen aus den Relationen zwiſchen a, b, c, etc. die zwiſchen α, β, γ, etc. a. a. O.

20. Die Gleichung $0 = \varphi + \frac{1}{3}\varphi^3 + \frac{2}{3.5}\varphi^5 + \text{etc.}$ aus (14.) hat gar keine mögliche Wurzel auſſer $\varphi = 0$. Denn der Werth derſelben, der die Tangente, t, iſt, nimmt zu, ſo wie φ zunimmt, mit einem beſtändig größern Verhältniſſe der Zunahmen, und wird nicht negativ, obgleich für $\varphi > \frac{1}{2}\pi$ die Tangente negativ iſt. Man kann auf ſie das nicht anwenden, was von den Gleichungen gilt, die aus den Werthen der Sinus und Coſinus, wenn dieſe $= 0$ ſind, entſtehen. Wenn eine Gleichung lauter mögliche Wurzeln haben ſoll, ſo müſſen ihre Werthe von 0 an bis zu einer gewiſſen endlichen Größe, abſolut genommen (ohne Rückſicht auf ihre poſitive oder negative Beſchaffenheit), zunehmen, dann wieder abnehmen, null werden, wieder zunehmen, und jenen entgegengeſetzt werden, ſo oftmahl als viele Wurzeln vorhanden ſind.

21. Es iſt $\text{cosec}\,\varphi = \frac{1}{\varphi} + \frac{2(2-1)\mathfrak{A}}{1.2}\varphi$
$+ \frac{2(2^3-1)\mathfrak{B}}{1..4}\varphi^3 + \frac{2(2^5-1)\mathfrak{C}}{1..6}\varphi^5$
$+ \frac{2(2^7-1)\mathfrak{D}}{1...8}\varphi^7 +$ etc.

Dieſe Formel folgt aus der Gleichung
$\text{cosec}\,\varphi = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi + \cot\varphi$. (Goniometrie, 44.)

22. Es iſt $\sec\varphi = 1 + \frac{1}{1.2}\varphi^2 + \frac{5}{1.2.3.4}\varphi^4$
$+ \frac{61}{1.2..6}\varphi^6 + \frac{277.5}{1.2..8}\varphi^8$
$+ \frac{2659.19}{1.2..10}\varphi^{10} +$ etc.

Denn es iſt $\sec\varphi = \frac{1}{\cos\varphi}$. Man ſetze $\cos\varphi =$ $1 - a\varphi^2 + b\varphi^4 - c\varphi^6 + d\varphi^8 -$ etc. und $\sec\varphi =$ $1 + \alpha\varphi^2 + \beta\varphi^4 + \gamma\varphi^6 + \delta\varphi^8 +$ etc. ſo iſt das Product beider Reihen $= 1$. Daraus ergeben ſich folgende Gleichungen

$\alpha = a$
$\beta = a\alpha - b$
$\gamma = a\beta - b\alpha + c$
$\delta = a\gamma - b\beta + c\alpha - d$
$\varepsilon = a\delta - b\gamma + c\beta - d\alpha + e$
etc.

wo $a = \frac{1}{1.2}$; $b = \frac{a}{3.4}$; $c = \frac{b}{5.6}$, etc. iſt.
Oder die Coefficienten α, β, γ, etc. machen eine rücklaufende Reihe aus, deren Scale der Relation iſt $\frac{1}{1.2}$; $-\frac{1}{1.2.3.4}$; $+\frac{1}{1..6}$; $-\frac{1}{1..8}$; + etc.

23. Es iſt $\log. \text{nat.} \sin\varphi = \log\varphi - \frac{4\mathfrak{A}}{1.2}\cdot\frac{1}{2}\varphi^2$
$- \frac{4^2\mathfrak{B}}{1..4}\cdot\frac{1}{4}\varphi^4 - \frac{4^3\mathfrak{C}}{1..6}\cdot\frac{1}{6}\varphi^6 - \frac{4^4\mathfrak{D}}{1..8}\cdot\frac{1}{8}\varphi^8$
$- \frac{4^5\mathfrak{E}}{1..10}\cdot\frac{1}{10}\varphi^{10} - \text{etc.}$

Denn es ſey $y = \sin\varphi$, ſo iſt $d\log. \text{nat.}\, y = \frac{dy}{y}$.
Es iſt aber $dy = \cos\varphi\, d\varphi$, alſo $d \log. y = \cot\varphi . d\varphi$. Daher iſt es nur nöthig, die Reihe für $\cot\varphi$ in (16.) mit $d\varphi$ zu multipliciren, und dann das Product zu integriren. Die Reihe für $\cot\varphi$ iſt nämlich der Differentialquotient, $\frac{d\log y}{d\varphi}$, durch eine Function von φ ausgedruckt.

24. Es iſt $\log. \text{nat.} \cos.\varphi = - \frac{4(4-1)\mathfrak{A}}{1.2}\frac{1}{2}\varphi^2$
$- \frac{4^2(4^2-1)\mathfrak{B}}{1...4}\cdot\frac{1}{4}\varphi^4 - \frac{4^3(4^3-1)\mathfrak{C}}{1...6}\cdot\frac{1}{6}\varphi^6$
$- \frac{4^4(4^4-1)\mathfrak{D}}{1..8}\cdot\frac{1}{8}\varphi^8 - \text{etc.}$

Denn es ſey $x = \cos\varphi$, ſo iſt $d\log \text{nat}\ x = \frac{dx}{x} = - \frac{\sin\varphi . d\varphi}{\cos\varphi} = - \tan\varphi . d\varphi$. Die Reihe für $\tan\varphi$ in (17.) giebt als Differentialquotient den Logarithmen von $\cos\varphi$.

25. Es iſt $\log. \text{nat.} \tan.\varphi = \log\varphi$
$+ \frac{2^3(2-1)\mathfrak{A}}{1.2}\cdot\frac{1}{2}\varphi^2 + \frac{2^5(2^3-1)\mathfrak{B}}{1...4.}\cdot\frac{1}{4}\varphi^4$
$+ \frac{2^7(2^5-1)\mathfrak{C}}{1..6}\cdot\frac{1}{6}\varphi^6 + \frac{2^9(2^7-1)\mathfrak{D}}{1..8}\cdot\frac{1}{8}\varphi^8$
$+ \text{etc.}$

Denn da tang $\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ iſt, ſo iſt log. tang φ $= \log.\sin\varphi - \log.\cos\varphi$.

26. Die in (5.) für sin φ gefundene Reihe, . . $\varphi - \frac{1}{6}\varphi^3 + \frac{1}{120}\varphi^5 -$ etc. oder $\varphi\,(1 - \frac{1}{6}\varphi^2 + \frac{1}{120}\varphi^4$ $-$ etc.) wird Null, wenn für φ entweder o oder ein Vielfaches von $\pm\pi$ geſetzt wird, durch jene Annahme der eintheilige Factor φ, durch die andere der infinitinomiſche Factor. Erhält der Bogen irgend einen andern durch φ bezeichneten Werth, ſo iſt der Werth des infinitimoniſchen Factors

$$= \left(1 - \frac{\varphi}{\pi}\right)\left(1 + \frac{\varphi}{\pi}\right)\left(1 - \frac{\varphi}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{\varphi}{2\pi}\right). \text{ etc.}$$

wo der Quotient $\frac{\varphi}{\pi}$ alle ganze Zahlen nach der Reihe zum Diviſor erhält, und ſowohl additiv als ſubtractiv zu nehmen iſt. (Gleichung. X. 4.)

Die Reihe für den cos φ, nämlich $1 - \frac{1}{2}\varphi^2 + \frac{1}{24}\varphi^4 - \frac{1}{720}\varphi^6 +$ etc. wird Null, wenn φ ein ungerades Vielfaches von $\pm\frac{1}{2}\pi$ iſt. Daher iſt der Werth dieſer Reihe $= \left(1 - \frac{2\varphi}{\pi}\right)\left(1 + \frac{2\varphi}{\pi}\right)\left(1 - \frac{2\varphi}{3\pi}\right)$ $\left(1 + \frac{2\varphi}{3\pi}\right)\left(1 - \frac{2\varphi}{5\pi}\right)\left(1 + \frac{2\varphi}{5\pi}\right)$. etc. wo der Quotient $\frac{2\varphi}{\pi}$ alle ungerade Zahlen nach der Reihe zu Diviſoren erhält, und mit beiderley Vorzeichen zu nehmen iſt.

27. Es verhalte ſich φ zum Quadranten oder zum rechten Winkel wie m : n, ſo daß $\varphi = \frac{m\pi}{2n}$, und es iſt

$$\sin\frac{m\pi}{2n}=\frac{m\pi}{2n}\cdot\frac{2n-m}{2n}\cdot\frac{2n+m}{2n}\cdot$$

$$\times\frac{4n-m}{4n}\cdot\frac{4n+m}{4n}\cdot\frac{6n-m}{6n}\cdot \text{etc.}$$

$$\cos\frac{m\pi}{2n}=\frac{n-m}{n}\cdot\frac{n+m}{n}\cdot\frac{3n-m}{3n}\cdot\frac{3n+m}{3n}\cdot$$

$$\times\frac{5n-m}{5n}\cdot\frac{5n+m}{5n}\text{ etc.}$$

28. Es iſt auch

$$\cos\frac{m\pi}{2n}=\frac{(n-m)\pi}{2n}\cdot\frac{n+m}{2n}\cdot\frac{3n-m}{2n}\cdot\frac{3n+m}{4n}$$

$$\times\frac{5n-m}{4n}\cdot\frac{5n+m}{6n}\cdot\text{etc.}$$

$$\sin\frac{m\pi}{2n}=\frac{m}{n}\cdot\frac{2n-m}{n}\cdot\frac{2n+m}{3n}\cdot$$

$$\times\frac{4n-m}{3n}\cdot\frac{4n+m}{5n}\cdot\frac{6n-m}{5n}\cdot\text{etc.}$$

Denn es iſt $\sin\frac{m\pi}{2n}=\cos\left(\frac{1}{2}\pi-\frac{m\pi}{2n}\right)=$ $\cos\frac{n-m}{2n}\pi$; und $\cos\frac{m\pi}{2n}=\sin\frac{n-m}{2n}\pi$.
Wird in den Formeln (27.) ſtatt m geſetzt n — m, ſo werden die hier aufgeſtellten Formeln erhalten.

29. Die beiden Formeln für $\sin\frac{m\pi}{2n}$ oder für $\cos\frac{m\pi}{2n}$ geben mittelſt der Diviſion,

$$1=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{7}{8}\text{ etc.}$$

alſo $\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10.\ \text{etc.}}{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11.\ \text{etc.}}$

Dieſe Reihe hat **Wallis** auf einem ganz andern Wege, durch eine beſondere Art der Einſchaltung gefunden. ſiehe Einſchaltung.

30. Aus den Formeln in (27 u. 28.) laſſen ſich ähnliche Formeln für die Tangenten, Cotangenten, Secanten und Coſecanten der Winkel $\frac{m\pi}{2n}$ herleiten; auch die Quotienten zweyer Sinus oder Coſinus verſchiedener Winkel. **Euleri** Introd. in Anal. Inf. T. I. §. 186. 187.

31. Zur Berechnung des Kreisumfanges, der Sinus und der Coſinus ſind dieſe Formeln nicht geſchickt, weil zu viele Factoren nöthig ſind, um die Werthe nur bis auf eine mäßige Anzahl von Stellen richtig zu erhalten. Aber zur Berechnung der Logarithmen jener Größen leiſten ſie vortreffliche Dienſte.

32. Da $\pi = \frac{4}{1} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{48}{49} \cdot \frac{80}{81} \cdot \text{etc.}$ $= 4(1 - \frac{1}{9})(1 - \frac{1}{25})(1 - \frac{1}{49})(1 - \frac{1}{81})\ \text{etc.}$ ſo iſt $\log \pi = \log 4 + \log(1 - \frac{1}{9}) + \log(1 - \frac{1}{25}) + \log(1 - \frac{1}{49}) + \text{etc.}$ Nimmt man die natürlichen Logarithmen, ſo iſt $\log\ \text{nat}\ (1 - x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \text{etc.}$ (Logarithmen). Der Logarithme iſt negativ, weil $1 - x$ ein eigentlicher Bruch iſt. Setzt man für x nach der Reihe die Brüche $\frac{1}{9}, \frac{1}{25}, \frac{1}{49}$, etc. ſo iſt

$$\begin{aligned}
\log.\ \text{nat.}\ \pi = \log 4 \\
&- \frac{1}{1}\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81}\ \text{etc.}\right) \\
&- \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9^2} + \frac{1}{25^2} + \frac{1}{49^2} + \frac{1}{81^2} + \text{etc.}\right) \\
&- \frac{1}{3}\left(\frac{1}{9^3} + \frac{1}{25^3} + \frac{1}{49^3} + \frac{1}{81^3} + \text{etc.}\right) \\
&- \frac{1}{4}\left(\frac{1}{9^4} + \frac{1}{25^4} + \frac{1}{49^4} + \frac{1}{81^4} + \text{etc.}\right) \\
&- \text{etc.}
\end{aligned}$$

In dem Artikel, Potenz V. 9. wird gezeigt, daß die Summen der reciproken geraden Potenzen der ungeraden Zahlen,

$$1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\text{etc.}=\frac{(4-1)\mathfrak{A}}{1.2}\cdot\frac{\pi^2}{2}$$

$$1+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{25^2}+\text{etc.}=\frac{(4^2-1)\mathfrak{B}}{1.2.3.4}\cdot\frac{\pi^4}{2}$$

$$1+\frac{1}{9^3}+\frac{1}{25^3}+\text{etc.}=\frac{(4^3-1)\mathfrak{C}}{1\ldots6}\cdot\frac{\pi^6}{2}$$

u. ſ. f. wo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc. die Bernoulliſchen Zahlen bedeuten. Bezeichnet man dieſe Summen durch A, B, C, D, etc. ſo iſt

$$\log.\text{nat.}\,\pi=\log 4-\tfrac{1}{1}(A-1)-\tfrac{1}{2}(B-1)$$
$$-\tfrac{1}{3}(C-1)-\tfrac{1}{4}(D-1)-\text{etc.}$$

Die Werthe der Summen A, B, C, etc bis zur 22ſten, jede bis auf die 23ſte Decimalſtelle berechnet, hat Euler geliefert a. a. O. § 190. Die Ausdrücke derſelben durch die Bernoulliſchen Zahlen hat er in dieſem Werke noch nicht gebraucht.

38. Da π auch auf folgende Art dargeſtellt werden kann, $\pi=2.\frac{4}{3}.\frac{16}{15}.\frac{36}{35}.\frac{64}{63}.$ etc. ſo iſt $\log\pi=\log 2$ $-\log(1-\frac{1}{4})-\log(1-\frac{1}{16})-\log(1-\frac{1}{36})-$ etc, Daher iſt

$$\log.\text{nat.}\,\pi=\log 2$$

$$+\frac{1}{1}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{36}+\frac{1}{64}+\text{etc.}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4^2}+\frac{1}{16^2}+\frac{1}{36^2}+\frac{1}{64^2}+\text{etc.}\right)$$

$$+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4^3}+\frac{1}{16^3}+\frac{1}{36^3}+\frac{1}{64^3}+\text{etc.}\right.$$

$$+\text{etc.}$$

In dem Artikel, Potenz V. 10 wird gezeigt, daß die Summen der reciproken geraden Potenzen der geraden Zahlen,

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{36}+\text{etc.}=\frac{\mathfrak{A}}{1.2}\cdot\frac{\pi^2}{2}$$

$$\frac{1}{4^2}+\frac{1}{16^2}+\frac{1}{36^2}+\text{etc.}=\frac{\mathfrak{B}}{1..4}\cdot\frac{\pi^4}{2}$$

$$\frac{1}{4^3}+\frac{1}{16^3}+\frac{1}{36^3}+\text{etc.}=\frac{\mathfrak{C}}{1..6}\cdot\frac{\pi^6}{2}$$

etc.

Bezeichnet man dieſe Summen durch α, β, γ, etc. ſo iſt

$$\log.\text{nat.}\,\pi = \log 2 + \alpha + \tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{3}\gamma + \tfrac{1}{4}\delta + \text{etc.}$$

Euler hat die Summen α, β, γ, etc. auf gleiche Art, wie die Summen, A, B, C, etc. berechnet. a. a. O. §. 193. Dieſe zweyte Formel für log π hat er nicht in der entwickelten Geſtalt beygebracht. Sie erfordert mehr Rechnung als die erſte, weil log 2 von log π mehr unterſchieden iſt als log 4. Da $-\log(1-\frac{1}{4})=\frac{1}{4}+\frac{1}{2.4^2}+\frac{1}{3.4^3}+\frac{1}{4.4^4}+$ etc. und $\log 2 - l(1-\frac{1}{4}) = \log 2 + l\frac{4}{3} = \log 8 - \log 3$, ſo iſt

$$\log.\text{nat.}\,\pi = \log 8 - \log 3 + \tfrac{1}{1}(\alpha - \tfrac{1}{4}) + \tfrac{1}{2}(\beta - \tfrac{1}{16}) + \tfrac{1}{3}(\gamma - \frac{1}{4^3}) + \tfrac{1}{4}(\delta - \frac{1}{4^4}) + \text{etc.}$$

Dieſe Formel giebt den Werth des Logarithmen leichter. Es iſt log 8 — log 3 näher an log π als log 4. Darauf nicht geſehen, iſt es doch gut zu wiſſen, wie log. nat. π ſowohl durch die reciproken geraden Potenzen der geraden Zahlen als die der ungeraden ausgedruckt wird.

34. Die Logarithmen der Sinus und Coſinus laſſen ſich ebenfalls aus den Formeln in (27.), die ſie als Producte darſtellen, herleiten. Nimmt man daſelbſt je zwey Factoren nach dem erſten zuſammen, ſo iſt

$$\log.\,\text{nat.}\sin\frac{m\pi}{2n} = \log\frac{m\pi}{2n} + \log\left(1-\frac{mm}{4nn}\right)$$

$$+\log\left(1-\frac{mm}{16nn}\right) + \text{l.}\left(1-\frac{mm}{36nn}\right) + \text{etc.}$$

und

$$\log.\,\text{nat.}\cos\frac{m\pi}{2n} = \log\left(1-\frac{mm}{nn}\right) + \log\left(1-\frac{mm}{9nn}\right)$$

$$+\log\left(1-\frac{mm}{25nn}\right) + \text{etc.}$$

35. Man entwickele die logarithmiſchen Größen nach der in (32.) für $\log(1-x)$ angeführten Formel, ordne ſie nach den Potenzen von $\frac{m}{n}$, und ſetze für die Summen der reciproken Potenzen die vorhin dafür angenommenen Bezeichnungen, A, B, C, D, etc. und α, β, γ, δ, etc. ſo iſt

$$\log.\,\text{nat.}\sin\frac{m\pi}{2n} = \log\frac{m\pi}{2n} - \alpha.\frac{m^2}{n^2}$$

$$-\tfrac{1}{2}\beta.\frac{m^4}{n^4} - \tfrac{1}{3}\gamma.\frac{m^6}{n^6} - \tfrac{1}{4}\delta.\frac{m^8}{n^8} - \text{etc.}$$

$$\log.\,\text{nat.}\cos\frac{m\pi}{2n} = -A.\frac{m^2}{n^2} - \tfrac{1}{2}B.\frac{m^4}{n^4}$$

$$-\tfrac{1}{3}C.\frac{m^6}{n^6} - \tfrac{1}{4}D.\frac{m^8}{n^8} - \text{etc.}$$

Setzt man hier für α, β, γ, etc. und A, B, C, etc. ihre Werthe durch die Bernoulliſchen Zahlen ausgedruckt, und φ für $\frac{m\pi}{2n}$, ſo erhält man die in (23. u. 24.) gefundenen Formeln.

36. Um die Coefficienten von $\frac{m^2}{n^2}$, beſonders in der Formel für den Logarithmen des Coſinus, kleiner zu machen, hat Euler die Logarithmen von $1 - \frac{mm}{4nn}$, und von $1 - \frac{mm}{nn}$ nicht entwickelt. Da

$$\log\left(1 - \frac{mm}{4nn}\right) = -\frac{mm}{4nn} - \frac{m^4}{2 \cdot 4^2 n^4}$$

$$-\frac{m^6}{3 \cdot 4^3 n^6} - \frac{m^8}{4 \cdot 4^4 n^8} - \text{etc.}$$

ſo iſt

$$\log.\text{nat.}\sin\frac{m\pi}{2n} = \log\frac{m\pi}{2n} + \log\left(1 - \frac{mm}{4nn}\right)$$

$$-\left(\alpha - \frac{1}{4}\right)\frac{m^2}{n^2} - \tfrac{1}{2}\left(\beta - \frac{1}{4^2}\right)\frac{m^4}{n^4}$$

$$-\tfrac{1}{3}\left(\gamma - \frac{1}{4^3}\right)\frac{m^6}{n^6} - \tfrac{1}{4}\left(\delta - \frac{1}{4^4}\right)\frac{m^8}{n^8} - \text{etc.}$$

37. Desgleichen, da $\log\left(1 - \frac{mm}{nn}\right) = -\frac{m^2}{n^2} - \frac{m^4}{2n^4} - \frac{m^6}{3n^6} - \text{etc.}$ ſo iſt

$$\log.\text{nat.}\cos\frac{m\pi}{2n} = \log\left(1 - \frac{mm}{nn}\right) - (A-1)\frac{m^2}{n^2}$$

$$-\tfrac{1}{2}(B-1)\frac{m^4}{n^4} - \tfrac{1}{3}(C-1)\frac{m^6}{n^6} - \text{etc.}$$

38. Auf gleiche Weiſe verfährt Euler mit den Coefficienten in der Reihe für die Tangente und Cotangente. Die Art, wie er dieſe Reihen findet, iſt eine ganz andere, als die in dieſem Artikel vorgetragene. Das Reſultat ſeiner Rechnung ergiebt ſich aus den Formeln in (17, 18) folgendergeſtalt.

In der Formel (17.) für tang φ führe man ſtatt der Bernoulliſchen Zahlen die Summen der geraden reciproken Potenzen der ungeraden Zahlen ein, welche durch A, B, C, D, etc. bezeichnet ſind. So iſt

$$\tang \varphi = \frac{4}{\pi} A . \frac{2\varphi}{\pi} + \frac{4}{\pi} B . \frac{2^3\varphi^3}{\pi^3}$$

$$+ \frac{4}{\pi} C . \frac{2^5\varphi^5}{\pi^5} + \frac{4}{\pi} D . \frac{2^7\varphi^7}{\pi^7} + \text{etc.}$$

Dann ſetze man $\frac{m\pi}{2n}$ ſtatt φ, ſo iſt

$$\tang \frac{m\pi}{2n} = \frac{4}{\pi} A . \frac{m}{n} + \frac{4}{\pi} B . \frac{m^3}{n^3} + \frac{4}{\pi} C . \frac{m^5}{n^5}$$

$$+ \frac{4}{\pi} D . \frac{m^7}{n^7} + \text{etc.}$$

Da $\frac{mn}{nn - mm} = \frac{m}{n} + \frac{m^3}{n^3} + \frac{m^5}{n^5} + \text{etc.}$

ſo addire man den Bruch, und ſubtrahire den Quotienten, beide mit $\frac{4}{\pi}$ multiplicirt, und es iſt

$$\tang \frac{m\pi}{2n} = \frac{4}{\pi} . \frac{mn}{nn - mm} + \frac{4}{\pi} (A - 1) \frac{m}{n}$$

$$+ \frac{4}{\pi} (B - 1) \frac{m^3}{n^3} + \frac{4}{\pi} (C - 1) \frac{m^5}{n^5}$$

$$+ \frac{4}{\pi} (D - 1) \frac{m^7}{n^7} + \text{etc.}$$

wie bey Euler §. 198.

39. In der Formel für cot φ in (16.) führe man ſtatt der Bernoulliſchen Zahlen die durch α, β, γ, etc. bezeichneten Summen der geraden reciproken Potenzen der geraden Zahlen ein, ſo iſt

$$\cot\varphi = \frac{1}{\varphi} - \frac{4}{\pi}\alpha.\frac{2\varphi}{\pi} - \frac{4}{\pi}\beta.\frac{2^3\varphi^3}{\pi^3} - \frac{4}{\pi}\gamma.\frac{2^5\varphi^5}{\pi^5}$$

$$- \frac{4}{\pi}\delta.\frac{2^7\varphi^7}{\pi^7} - \text{etc.}$$

oder

$$\cot\frac{m\pi}{2n} = \frac{2n}{m\pi} - \frac{4}{\pi}\alpha.\frac{m}{n} - \frac{4}{\pi}\beta.\frac{m^3}{n^3} - \frac{4}{\pi}\gamma.\frac{m^5}{n^5}$$

$$- \frac{4}{\pi}\delta.\frac{m^7}{n^7} - \text{etc.}$$

Da $\frac{mn}{4nn-mm} = \frac{m}{4n} + \frac{m^3}{4^2n^3} + \frac{m^5}{4^3n^5} + \frac{m^7}{4^4n^7}$

$+ \text{etc,}$

ſo iſt

$$\cot\frac{m\pi}{2n} = \frac{2n}{m\pi} - \frac{4mn}{\pi(4nn-mm)} - \frac{4}{\pi}\left(\alpha - \frac{1}{4}\right)\frac{m}{n}$$

$$- \frac{4}{\pi}\left(\beta - \frac{1}{4^2}\right)\frac{m^3}{n^3} - \frac{4}{\pi}\left(\gamma - \frac{1}{4^3}\right)\frac{m^5}{n^5} - \text{etc.}$$

wie bey Euler, a. a. O. §. 198.

40. Die Reihe für die Logarithmen der Sinus und Coſinus kann man noch convergenter machen, wenn man den $\log\left(1 - \frac{mm}{16nn}\right)$, und $\log\left(1 - \frac{mm}{9nn}\right)$ unentwickelt läßt. Es iſt alsdann

$$\log.\text{nat.}\sin\frac{m\pi}{2n} = \log\frac{m\pi}{2n} + \log\left(1 - \frac{mm}{4nn}\right)$$

$$+ \log\left(1 - \frac{mm}{16nn}\right) - \left(\alpha - \frac{1}{4} - \frac{1}{16}\right)\frac{m^2}{n^2}$$

$$- \frac{1}{2}\left(\beta - \frac{1}{4^2} - \frac{1}{16^2}\right)\frac{m^4}{n^4} - \frac{1}{3}\left(\gamma - \frac{1}{4^3} - \frac{1}{16^3}\right)\frac{m^6}{n^6}$$

$$- \frac{1}{4}\left(\delta - \frac{1}{4^4} - \frac{1}{16^4}\right).\frac{m^8}{n^8} - \text{etc.}$$

Es

und

$$\log.\,\mathrm{nat.}\cos\frac{m\pi}{2n} = \log\left(1-\frac{mm}{nn}\right)+\log\left(1-\frac{mm}{9nn}\right)$$
$$-\left(A-1-\frac{1}{9}\right)\frac{m^2}{n^2}-\tfrac{1}{2}\left(B-1-\frac{1}{9^2}\right)\frac{m^4}{n^4}$$
$$-\tfrac{1}{3}\left(C-1-\frac{1}{9^3}\right)\frac{m^6}{n^6}-\text{etc.}$$

Cyklometriſche Verhältniſſe.

Es ſey das Verhältniß des Durchmeſſers zum Umfange $=1:\pi$, ſo iſt

$\pi = 3,$ 141592	653589	793238
	462643	383279	502884
	197169	399375	105820
	974944	592307	816406
	286208	998628	034825
	342117	067982	148086
	513282	306647	093844
	609550	582261	36 . .

S. Cyklotechnie. Dieſe Zahl iſt der halbe Umfang des Kreiſes, wenn der Halbmeſſer zur Einheit genommen wird.

$\frac{1}{\pi} = 0,318309\ 886183\ 790671\ 53 +$

berechnet von Hübſch in der Arithmet. Portensi, III. Th. 116 §.

Werthe von π, abgekürzt mit möglichſter verhältnißmäßiger Genauigkeit

$$\frac{3}{1},\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \frac{103993}{33102},\ \text{etc.}$$

Der vierte dieſer Brüche iſt von Metius, Landmeſſer in holländiſchen Dienſten, Vater des Adrian Metius, Profeſſors der Mathematik zu Franecker, herausgebracht. Adr. Metii Geom. pract. p. 89.

$\log. tab. \pi = 0,497149\ 872694\ 133854\ 351268 \ldots$

$\log. tab. \frac{1}{\pi} = 9,502850\ 127305\ 866145\ 648731 \ldots$

$Arc.\ 1^\circ = 0,017453\ 292519\ 943295\ 769236 \ldots$

$Arc.\ 1' = 0,000290\ 888208\ 665721\ 596153 \ldots$

$Arc.\ 1'' = 0,000004\ 848136\ 811095\ 359935 \ldots$

$\log 1^\circ = 8,241877\ 3676 - 10$

$\log 1' = 6,463726\ 1172 - 10$

$\log 1'' = 4,685574\ 8668 - 10.$

Der Bogen, welcher dem Halbmeſſer gleich iſt, hält $57^\circ\ 17^{I}\ 44^{II}\ 48^{III}\ 22^{IV}\ 29^{V}\ 21^{VI}$ etc. oder iſt in Graden und Decimaltheilen des Grades . . . . . $= 57^\circ,2957\ 79\ 5129 \ldots$ In Secunden . . . . $= 206264^{II}, 806247 \ldots$ Dieſe Zahlen werden gefunden durch die Proportion, der halbe Umfang (π) zum Halbmeſſer, wie 180 Grad (oder 648000^{II}) zu der Anzahl von Graden oder Secunden in dem Bogen, der dem Halbmeſſer gleich iſt. Die Diviſion durch π iſt Multiplication mit $\frac{1}{\pi}$.

$$\log. \frac{180}{\pi} = 1,758122\ 6324$$

$$\log. \frac{10800}{\pi} = 3,536273\ 8827$$

$$\log. \frac{648000}{\pi} = 5,314425\ 1331$$

Dieſe ſind die Complemente der obigen Logarithmen von $1^\circ, 1^{I}, 1^{II}$, in Theilen des Halbmeſſers.

Es ſey r der Halbmeſſer eines Kreiſes, a ein Bogen deſſelben, n die Anzahl der Grade in demſelben, ſo iſt $\pi r : a = 180^\circ\ n$, woraus iſt $\frac{n\pi}{180} = \frac{a}{r}$.

Der Bogen, welcher durch n Grade ausgedrückt wird, ſey durch den Halbmeſſer gemeſſen, $= \varphi$, ſo iſt $\varphi = \frac{a}{r}$, alſo $\varphi = \frac{n\pi}{180}$.

Bedeutet n Secunden, ſo iſt ſtatt der Zahl 180 in dieſen Formeln zu ſetzen, 648000.

Exempel. Die Parallaxe der Sonne ſey 8″, 6, d. i. der Halbmeſſer der Erde (a) ſey ein Bogen von 8, 6 Sec. mit dem Abſtande der Erde von der Sonne als Halbmeſſer (r) beſchrieben, ſo iſt $\frac{648000}{8,6\pi} = \frac{r}{a}$.

Da $\frac{648000}{\pi} = 206264,8$ iſt, ſo iſt $\frac{r}{a} = 23984$, oder der Abſtand der Erde von der Sonne beträgt 23984 Halbmeſſer der Erde.

Das Quadrat des Durchmeſſers verhält ſich zu der Kreisfläche wie 1 zu 0,785398 163397 . . In abgekürzten, verhältnißmäßig möglichſt genauen rationalen Brüchen, iſt $\frac{\text{area circ}}{\text{quadr. diam}} = \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{7}{9}, \frac{11}{14}, \frac{172}{219}, \frac{355}{452}$ etc.

Es iſt log. 0,7853 . . = 9,8950898814.

Der Würfel des Durchmeſſers verhält ſich zu dem Inhalt der Kugel wie 1 zu $\frac{1}{6}\pi$, das iſt, wie . . . 1 : 0,523598 775598. In abgekürzten Ausdrücken iſt möglichſt nahe

$$\frac{\text{Sphaera}}{\text{cub. diam}} = \frac{1}{2}, \frac{11}{21}, \frac{111}{212}, \frac{122}{233}, \frac{233}{445}, \frac{355}{678} \text{ etc.}$$

Es iſt log. 0,5235 . . = 9,7189986 223.

Cyklotechnie iſt der Inbegriff der Methoden zur numeriſchen Berechnung des Kreisumfanges, der Bogen aus den zugehörigen Linien, der Linien aus den Bogen, und aus einander ſelbſt, wenn die Verhältniſſe der zugehörigen Bogen gegeben ſind. Sie gründet ſich auf die allgemeinen Formeln der Cyklometrie und Goniometrie, welche die Relationen dieſer Größen enthalten.

Archimedes war der erſte, der es unternahm, den Umfang des Kreiſes mit ſeinem Durchmeſſer zu vergleichen. Er ſuchte aus der halben Seite des umgeſchriebenen Sechsecks nach der Reihe die halbe Seite des Vielecks von 12, von 24, von 48, von 96 Seiten, immer ſo,

daß die Zahlwerthe der Seiten größer waren, als ihre wahren irrationalen Werthe, dieſen aber doch nahe kamen. Dadurch fand er, daß der Umfang des regulären umgeſchriebenen Vielecks von 96 Seiten zu dem Durchmeſſer ein kleineres Verhältniß habe, als 14688 zu $4673\frac{1}{2}$, das iſt, die erſtere Zahl iſt etwas größer, als der Umfang des Vielecks, wenn der Durchmeſſer $4673\frac{1}{2}$ Theile hat, und iſt alſo mehr noch größer als der Umfang des Kreiſes für denſelben Durchmeſſer.

Ferner berechnete er aus der Seite des eingeſchriebenen Sechsecks (dem Halbmeſſer) folgweiſe die Seiten des Vielecks von 12, von 24, von 48, von 96 Seiten, immer ſo, daß die Zahlwerthe kleiner waren, als die eigentlichen Irrationalwerthe. Er fand, daß der Umfang des eingeſchriebenen Vielecks von 96 Seiten zu dem Durchmeſſer ein größeres Verhältniß habe, als 6336 zu $2017\frac{1}{4}$, das iſt, die erſtere Zahl iſt etwas kleiner als der Umfang des Vielecks für den Durchmeſſer von $2017\frac{1}{4}$ Theilen, und mehr noch kleiner, als der Umfang des Kreiſes.

Nun iſt $3\frac{1}{7}$ ein ſehr weniges größer, als der Quotient von 14688 durch $4673\frac{1}{2}$, und $3\frac{10}{71}$ iſt ein ſehr weniges kleiner als der Quotient von 6336 durch $2017\frac{1}{4}$; alſo fällt der Umfang des Kreiſes, den Durchmeſſer zur Einheit genommen, zwiſchen die Zahlen $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$, deren jene etwas zu groß, dieſe etwas zu klein iſt. Die letztere kommt dem wahren Verhältniſſe etwas näher, als die erſtere. Der Bruch $\frac{10}{71}$ iſt vom Archimedes ſo ausgewählt, daß der Überſchuß des Quotienten von 6336 durch $2017\frac{1}{4}$ mit zwey Ziffern im Zähler und Nenner am genaueſten dadurch ausgedruckt wird. Er iſt auch, wie es hier erforderlich war, kleiner als der vollſtändige Überſchuß $\frac{1137}{8069}$. — Man muß das Verhältniß 7 : 22 nicht das Archimedeiſche Verhältniß, des Durchmeſſers zum Umfange nennen, da er es gar nicht dafür anſetzt, ſondern vielmehr zwey Verhältniſſe angiebt, zwiſchen welchen das wahre liegt.

Die Genauigkeit, mit welcher Archimedes bey der Annäherung zu einer Irrationalgröße verfuhr, verdient

bemerkt zu werden. Bey der Berechnung des umgeſchriebenen Vielecks gieng er von einem rechtwinklichten Dreyeck aus, worin Hypotenuſe und die kleinere Kathete wie 2 : 1 ſind; die kleinere Kathete zu der größern wie 1 : $\sqrt{3}$ ſich verhält. Archimedes ſetzt für dieſes Irrationalverhältniß das rationale 153 : 265, aber mit der Bemerkung, daß die letztere Zahl den Werth der Kathete zu klein angiebt, wie es hier erforderlich war. Jene Zahlen geben das Verhältniß, 1 : $\sqrt{3}$ genauer an, als je zwey andere, die kleiner ſind, wie die Rechnung in dem Artikel: Aufheben der Brüche, zeigt. Wie Archimedes ſie ausgeſucht haben möge, iſt in dem Artikel, Arithmetik, gewieſen. Es iſt $153^2 = 23409$, und $265^2 = 70225$, nur um 2 kleiner, als das Dreyfache jenes Quadrats.

Bey der Berechnung des eingeſchriebenen Vielecks fieng Archimedes ebenfalls mit einem rechtwinklichten Dreyecke an, deſſen Seiten ſich wie 2 : 1 : $\sqrt{3}$ verhalten. Hier mußte aber die irrationale Seite durch eine Zahl ausgedruckt werden, die etwas größer iſt, als der Irrationalwerth. Archimedes ſetzt für das Verhältniß 1 : $\sqrt{3}$ das nahe kommende 780 : 1351. Dieſes iſt ſo genau als es ſeyn kann, wenn nicht größere Zahlen genommen werden. Es iſt $780^2 = 608400$, und $1351^2 = 1825201$, nur um 1 größer, als das Dreyfache von jenem Quadrate.

Eine kritiſche Ausgabe der kleinen Schrift des Archimedes über die Kreismeſſung mit dem Commentar des Eutocius iſt in Wallis Werken, 3ten Bd. enthalten. Eine deutſche Ueberſetzung mit Erläuterungen bey Haubers Überſetzung der Archimedeiſchen Bücher über Kugel und Cylinder. Tübingen 1798.

Nach dem Berichte des Eutocius hat Apollonius Pergäus das Verhältniß des Umfanges eines Kreiſes zum Durchmeſſer ſchärfer als Archimedes angegeben. Es iſt dieſes in einer Schrift, Okytoboos betitelt, geſchehen, die verloren gegangen, und deren Titel vermuthlich nicht einmal richtig zu uns gekommen iſt. Sie mag eine Anleitung zum Rechnen mit großen Zahlen

enthalten haben. S. Käſtners geometriſche Abhandl. II. Samml. 172 S.

Man wird auf dem von Archimedes gewieſenen Wege etwas fortgegangen ſeyn. Denn Purbach im 15ten Jahrhundert ſagt, daß einige das Verhältniß des Durchmeſſers zum Umfange, wie 20000 zu 62832 ſetzten, welches in der vierten Decimalſtelle faſt richtig iſt. Aber nicht eher, als gegen das Ende des 16ten Jahrhunderts ward der Umfang des Kreiſes mit einer Schärfe berechnet, die man zu höherm Gebrauch verlangen mag. Dieſes leiſtete Vieta. Er hat den Umfang des Kreiſes für den Durchmeſſer als Einheit bis auf die zehnte Decimalſtelle richtig berechnet. Seine Methode durch eingeſchriebene Vielecke ſich dem Kreiſe zu nähern, ſteht in der Sammlung ſeiner Werke, die Schooten beſorgt hat, in der Abtheilung: Variorum de reb. mathem. responsorum L. VIII. c. 18. Die ganze Rechnung iſt in einer andern Sammlung einiger Werke von ihm enthalten, die den Titel hat: Fran: Vietaei varia opera mathematica, in quibus tractatur Canon mathematicus, seu ad triangula, item Canonion triangulorum laterum rationalium, una cum universalium inspectionum ad canonem mathematicum libro singulari. Pariſiis, 1609, groß folio. Dieſe Ausgabe, welche ich beſitze, iſt ohne Zweifel ganz die ältere von 1579, nur mit einem neuen Titel verſehen. Die ältere iſt nach Montucla (Hist. des Mathém. Tom. I. p. 610), und Hutton in der Einleitung zu ſeiner Ausgabe von Sherwins Tafeln äußerſt ſelten. Vieta hat wegen des fehlerhaften Drucks ſo viele Exemplare, als er erhalten konnte, wieder an ſich gebracht, und dann vermuthlich vernichtet. Der Canon mathematicus iſt eine Tafel der Sinus, Tangenten und Secanten, für einen Radius von 100000 Theilen, bey einigen mit Bruchtheilen begleitet. Die universales inspectiones ſind eine ebene und ſphäriſche Trigonometrie, in tabellariſcher Form, mit einigen Anwendungen auf geometriſche Aufgaben. Unter dieſen kommt die Kreisrechnung vor.

Die Tafeln, worin die Rechnungen enthalten ſind, ha-

ben die Aufſchriften: demonstratio limitum analogiae perimetri circuli ad diametrum; particularis methodus, qua comparata fuerunt quadrata faecundorum (tangentium); quadrata sinuum minora majorave veris. Vieta berechnet die Seiten eines eingeſchriebenen und umgeſchriebenen Vielecks von 393216 ($=6\times 2^{16}$) Seiten. Zuerſt ſuchte er die Quadrate der Sinus der halben Centriwinkel. Nämlich es iſt $\frac{1}{2}(1 - \cos A) = \sin \frac{1}{2} A^2$ (Goniometrie, 36). Iſt nun der Sinus eines Winkels bekannt, ſo wird auch deſſen Coſinus gefunden, daraus das Quadrat des Sinus des halben Winkels, und dann das Quadrat des Coſinus dieſes Winkels, welcher zu dem Quadrate des Sinus des vierten Theils verhilft. Auf dieſelbe Art wird das Quadrat des Sinus des achten Theils und der folgenden halbirten Theile gefunden. Aus den Quadraten der Sinus und Coſinus ergiebt ſich das Quadrat der Tangente. Die Quadrate der Cotangenten werden von ihm mittelſt des Satzes: . . $2 \operatorname{cosec} A^2 + 2 \cot A^2 - \operatorname{tang} \frac{1}{2} A^2 = \cot \frac{1}{2} A^2$ (Goniometrie, 44.) gefunden, wenn nur die Cotangente und Coſecante des erſten in der Reihe der Winkel bekannt ſind, wie ſie es ſind, wenn der erſte Winkel 30 Gr. hält. Es wird hieraus das Quadrat der Cotangente des folgenden Winkels, 15 Gr. gefunden; dazu das Quadrat des Halbmeſſers addirt, giebt das Quadrat der Coſecante von 15 Gr. Auf dieſe Weiſe wird die Rechnung bis zu der angenommenen Gränze der Halbtheilung fortgeſetzt. In allen dieſen Berechnungen ſind zwey an den wahren Werth angränzende Zahlen, eine größer, die andere kleiner, gefunden. Der Durchmeſſer des Kreiſes verhält ſich zu der Seite des letzten eingeſchriebenen Vielecks wie die Coſecante des halben Centriwinkels zum Radius. Dieſes giebt den Umfang des Vielecks, alſo die kleinere Gränze des Umfanges. Der Halbmeſſer des Kreiſes verhält ſich zu der halben Seite des umgeſchriebenen Vielecks wie die Cotangente des halben Centriwinkels zum Radius. Daraus wird der Umfang des umgeſchriebenen Vielecks erhalten, die größere Gränze des Umfanges des Kreiſes.

Vieta fand auch einen Ausdruck für die Fläche des Kreiſes durch ein Product von einer unendlichen Anzahl Factoren. Wegen einer Erinnerung, die ich bey ſeiner Formel zu machen finde, kann ich ſie erſt in dem Artikel, Goniometrie, am Ende anführen.

Adrianus Romanus (Adriaen van Romen) aus Löwen gebürtig (geſt. 1616) hat, nach der Anzeige von Montücla, den Umfang bis auf 17 Decimalſtellen berechnet; wo er dieſes gethan habe, giebt M. nicht an.

Ludolph von Ceulen oder van Collen, aus Hildesheim gebürtig, hat ſich die ungeheure Mühe gegeben, durch Berechnung der umgeſchriebenen und eingeſchriebenen Vielecke den Umkreis bis zur 32ſten Decimalſtelle zu beſtimmen. In der Schrift de circulo et adscriptis, welche einer Sammlung von arithmetiſchen und geometriſchen Abhandlungen deſſelben Verfaſſers unter eben dieſem, auf alle nicht paſſenden Titel, in der lateiniſchen aus dem holländiſchen gemachten Überſetzung von Snellius, Lugd. Bat. 1619, beygefügt iſt, trägt van Ceulen ſein ganzes Verfahren vor. Er erzählt, daß er im September 1586 dieſe Berechnung angefangen habe. Zuerſt fand er durch fortgeſetzte Zweytheilung des Bogens von 72 Gr. bis zur 25ſten den Umfang bis auf die zwölfte Decimalſtelle; dann durch 28 Halbtheilungen des Bogens von 90 Gr. den Umfang bis auf die 16te Decimalſtelle; darauf durch 30 Halbirungen des Bogens von 60 Gr. bis auf die 18te Stelle; endlich durch 29 Halbirungen des Bogens von 6 Gr. bis auf die 20ſte Stelle. Die Seiten der eingeſchriebenen Vielecke fand er durch eine ſehr verwickelte Formel, worin eine quadratiſche Irrationalgröße in einer andern dieſer Art enthalten iſt, dieſe wieder in einer ſolchen, und ſo fort, bis zu Ende, (Goniometrie, X.). Die Seiten der umgeſchriebenen Vielecke fand er durch Diviſion jener Seiten durch die halben Chorden der Complemente zum Halbkreiſe, für welche ähnliche Formeln Statt haben. Ob nun gleich das gefundene Verhältniß des Durchmeſſers zum Umfange zu jedem praktiſchen Gebrauch mehr als überflüſſig hinreichend iſt, ſo begnügte ſich doch

van Ceulen damit noch nicht. Er erzählt in der angeführten Sammlung von Abhandlungen pag. 92, und in den Fundament. arithm. et geometr. Lugd. Bat. 1615. p. 144. *) daß ihn eine unerſättliche Forſchungsbegierde angetrieben habe, die Gränzen für den Umfang des Kreiſes einander noch näher zu bringen, und daß er mit Hülfe eines Zöglings, Peter Corneliß, den Kreisumfang bis zu der 32ſten Decimalſtelle, den Durchmeſſer als Einheit genommen, berechnet habe. Die Abweichung von der wahren Größe beträgt noch nicht ſo viel, als ein Bruch, deſſen Zähler 1, und der Nenner 100 Quinquillionen oder 1 mit 32 Nullen iſt, in Vergleichung mit dem Durchmeſſer weniger als ein kleines Sandkorn gegen die ganze Erde.

Snellius gab in einem Buche, betitelt, Cyclometricus, Lugd. Bat. 1621 geometriſche Lehrſätze, vermittelſt welcher die Rechnung beträchtlich abgekürzt wird. Aus dem Vieleck von 96 Seiten, woraus Archimedes den Umfang nur zwiſchen $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$ für den Durchmeſſer als Einheit einſchränkte, d. i. ihn nur bis auf die dritte Decimalſtelle angeben konnte, findet Snellius den Umfang bis auf ſieben Decimalſtellen.

Es ſey (Fig. 101. Tab. VII.) ADB ein Halbkreis, deſſen Mittelpunct C. Auf der verlängerten AB nehme man BE dem Halbmeſſer CA gleich, und ziehe die willkührliche EDF, welche den Kreis zum zweytenmale in D, und die in A auf AB ſenkrechte AF in F ſchneide: es iſt AF kleiner als der Bogen AD.

Wird aber (Fig. 103.) zwiſchen dem nach E verlängerten Durchmeſſer AB und dem Kreiſe die gerade Linie EG

*) Dieſes Buch iſt eine Ueberſetzung aus dem Holländiſchen, worin der Verfaſſer es geſchrieben hat. Es enthält dieſelben Abhandlungen, welche in der vorher angeführten Sammlung, die den Titel hat, de circulo et adscriptis, ſtehen, aber nicht die eigentliche Schrift von der Kreisrechnung, dagegen eine Sammlung von geometriſchen Elementar-Sätzen. Die Abhandlung de zetematum geometricorum epilogismo, welche Käſtner als ein ihm nicht zu Geſicht gekommenes Buch anführt, Geometr. Abhandl. zweyte Samml. S. 189, iſt darin enthalten.

ſo gelegt, daß ſie dem Halbmeſſer gleich iſt, und ſchneidet ſie verlängert den Kreis noch einmal in D, und die bey A berührende AF in F, ſo iſt AF größer als der Bogen AD.

Snellius hat zwar dieſe Sätze gefunden, aber ſeine Beweiſe ſind unbefriedigend, weil darin das zu beweiſende zum Grunde liegt. Huygens hat ſie genau erwieſen, in der ſchönen Schrift, de circuli magnitudine inventa, die zuerſt 1654 herauskam. Sie iſt in dem zweyten Theile ſeiner Operum variorum enthalten.

Man ſetze $AC = 1$; den Bogen $AD = \varphi$, ſo iſt die ſenkrechte $DH = \sin\varphi$, und $CH = \cos\varphi$. In dem erſten Satze (Fig. 102) iſt $EH = 2 + \cos\varphi$, und $AF = \frac{3\sin\varphi}{2+\cos\varphi}$, da $EH : DH = EA : AF$ iſt. Aus Cyklometrie (5 und 6.) iſt

$$3\sin\varphi = 3\varphi - \tfrac{1}{2}\varphi^3 + \tfrac{1}{40}\varphi^5 - \text{etc.}$$
$$2 + \cos\varphi = 3 - \tfrac{1}{2}\varphi^2 + \tfrac{1}{24}\varphi^4 - \text{etc.}$$

alſo iſt $AF = \varphi - \frac{1}{180}\varphi^5 - \frac{1}{504}\varphi^7 - \text{etc.}$

Daß die folgenden Glieder ſubtractiv ſind, mag man aus den erſtern ſchließen. Auch iſt für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, oder den Quadranten, der Werth von AF kleiner als der Bogen, da alsdann $AF = \frac{3}{2}$ iſt.

In dem Falle des zweyten Satzes (Fig. 103.) ziehe man gleichfalls DH ſenkrecht auf AB, und die Halbmeſſer CD, CG an die Durchſchnitte der EF mit dem Kreiſe. Da $GE = CG$, ſo iſt der W. $CGD = 2E$, alſo W. $CDE = 2E$, und W. $ACD = 3E$. Es ſey der W. $CED = \omega$, ſo iſt $ACD = 3\omega$, und der Bogen $AD = 3\omega$, für den Halbmeſſer als Einheit. Alſo $HD = \sin 3\omega$; $HC = \cos 3\omega$, und in dem gleichſchenklichten Dreyeck CGE die Grundlinie $CE = 2\cos\omega$. Dadurch iſt $EH = \cos 3\omega + 2\cos\omega$, alſo

$$AF = \frac{(1 + 2\cos\omega)\sin 3\omega}{\cos 3\omega + 2\cos\omega}.$$ Nun iſt $1 + 2\cos\omega = 3 - \omega^2 + \frac{1}{12}\omega^4 - \frac{1}{360}\omega^6 + \text{etc.}$

$\sin 3\omega = 3\omega - \frac{9}{2}\omega^3 + \frac{81}{40}\omega^5 - \frac{243}{560}\omega^7 + \text{etc.}$

Das Product dieſer beiden Reihen iſt

$$9\omega - \frac{33}{2}\omega^3 + \frac{433}{40}\omega^5 - \frac{62333}{10080}\omega^7 + \text{etc.}$$

Ferner iſt

$$\cos 3\omega = 1 - \frac{9}{2}\omega^2 + \frac{27}{8}\omega^4 - \frac{81}{80}\omega^6 + \text{etc.}$$

$$2\cos\omega = 2 - \omega^2 + \frac{1}{12}\omega^4 - \frac{1}{360}\omega^6 + \text{etc.}$$

Die Summe dieſer beiden Reihen iſt

$$3 = \frac{11}{2}\omega^2 + \frac{83}{24}\omega^4 - \frac{731}{720}\omega^6 + \text{etc.}$$

Der Quotient des Products durch die Summe iſt $3\omega + \frac{3}{20}\omega^5 + \frac{15}{28}\omega^7 + \text{etc.} = AF$. Setzt man $3\omega = \varphi$, ſo iſt

$AF = \varphi + \frac{1}{20 \cdot 81}\varphi^5 + \frac{5}{28 \cdot 729}\varphi^7 + \text{etc.}$ Auch hier darf man aus der Beſchaffenheit der Vorzeichen von den erſtern Gliedern ſchließen, daß die folgenden auch additiv ſind. Es iſt alſo AF größer, als der Bogen φ. Für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ oder 90° und $\omega = \frac{1}{6}\pi$ oder 30°, iſt . . . .

$AF = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3} + 1$. Da $\sqrt{3} = 1{,}73205$.. ſo iſt $AF = 1{,}57735$ .. größer als $\frac{1}{2}\pi$.

Aus dieſer Berechnung ſieht man, wie viel enger die Gränzen für einen gegebenen Bogen durch des Snellius Verfahren gefunden werden, als nach der alten Methode. Nach der letztern ſind die Seiten eines eingeſchriebenen und die eines umgeſchriebenen Vielecks, oder, welches daſſelbe iſt, Sinus und Tangente die Gränzen ihres zugehörigen Bogens. Dieſe ſind alſo (nach Cyklometrie 5 und 14.), $\varphi - \frac{1}{6}\varphi^3 + \text{etc.}$ und $\varphi + \frac{1}{3}\varphi^3 + \text{etc.}$ Nach des Snellius Methode ſind ſie aber $\varphi - \frac{1}{180}\varphi^5 - \text{etc.}$ und $\varphi + \frac{1}{1620}\varphi^5 + \text{etc.}$ Je kleiner φ, oder der Quotient des Bogens durch den Halbmeſſer iſt, deſto näher, und zwar viel näher kommen die Gränzen einander, als nach jener Methode.

Es iſt nur nöthig von zwey Bogen, die ſich wie 1 : 3 verhalten, die Sinus und Coſinus zu kennen. Man nehme φ gleich dem 32ſten Theil des Umfanges, ſo läßt ſich der Sinus dieſes Bogens (oder die halbe Seite

des eingeſchriebenen Vielecks von 16 Seiten) aus dem Sinus des 8ten Theils des Umfanges herleiten. Der Sinus des 96ſten Theils aber (oder die halbe Seite des 48 Ecks) wird aus dem Sinus von 30 Gr. (oder der halben Seite des Sechsecks) gefunden.

Huygens fand, und zwar auf eine ſehr ſinnreiche Art, aus dem Schwerpuncte eines Kreisabſchnittes, noch nähere Gränzen für den Umfang eines Kreiſes. Die analytiſche Rechnung mag nützlich mit der geometriſch-mechaniſchen verglichen werden, weswegen ſie hier einen Platz verdient.

Es ſey $y = \sin\varphi$, und $z = \text{chord}\,\varphi$, ſo iſt erſtlich $\varphi > z + \frac{1}{3}(z - y)$; zweytens

$\varphi < z + \frac{4z + y}{2z + 3y} \cdot \frac{z - y}{3}$. Dieſes iſt der 19te Satz in der angeführten Schrift von Huygens.

Es ſey noch $u = \sin\text{vers}\,\varphi$, ſo iſt $z^2 = 2u$, und auch $z^2 = u^2 + y^2$, alſo $y^2 = z^2 - \frac{1}{4}z^4$, und $y = z\sqrt{(1 - \frac{1}{4}z^2)}$, oder (Binom. Lehrſatz, 13, 18.)

$$y = z - \tfrac{1}{8}z^3 - \tfrac{1}{128}z^5 - \tfrac{1}{1024}z^7 - \text{etc.}$$

und

$$z + \tfrac{1}{3}(z - y) = z + \tfrac{1}{24}z^3 + \tfrac{1}{384}z^5 + \tfrac{1}{3072}z^7 + \text{etc.}$$

Da $z = 2\sin\frac{1}{2}\varphi$, ſo iſt (Cyklometrie, 1.)

$$\varphi = z + \tfrac{1}{24}z^3 + \tfrac{3}{640}z^5 + \tfrac{5}{7168}z^7 + \text{etc.}$$

alſo iſt $\varphi > z + \frac{1}{3}(z - y)$.

Zweytens, es iſt

$$4z + y = 5z - \tfrac{1}{8}z^3 - \tfrac{1}{128}z^5 - \text{etc.}$$
$$2z + 3y = 5z - \tfrac{3}{8}z^3 - \tfrac{3}{128}z^5 - \text{etc.}$$

und $\frac{4z + y}{2z + 3y} = 1 + \frac{1}{20}z^2 + \frac{11}{1000}z^4 + \text{etc.}$

Da $z - y = \frac{1}{8}z^3 + \frac{1}{128}z^5 + \frac{1}{1024}z^7 + \text{etc.}$

ſo iſt

$$\frac{4z + y}{2z + 3y} \times \frac{z - y}{3} = \tfrac{1}{24}z^3 + \tfrac{3}{640}z^5 + \tfrac{19}{25600}z^7 + \text{etc.}$$

und $\varphi < z + \frac{4z + y}{2z + 3y} \times \frac{z - y}{3}$

Dieſe zweyte Gränze kommt dem Bogen φ ſehr nahe, da ſie erſt in dem vierten Gliede der Reihe für φ von dem Bogen abweicht, nämlich um $+\frac{1}{3200}z^7$. Der Abſtand der Gränzen von einander ſelbſt iſt $\frac{1}{480}z^5 + \frac{1}{2400}z^7$. Huygens giebt ſtatt der entferntern kleinern Gränze noch eine nähere, auch kleinere, im 20ſten Satze, und ſagt, daß dieſe aus einer genauern Unterſuchung der Schwerpuncte hergeleitet werde. Sie kommt mit der Reihe für φ durch z in den drey erſten Gliedern überein, und faſt noch in dem vierten. Da wir jetzt die Reihe für den Bogen durch den Sinus haben, ſo bedarf es dieſer mühſamen Verbeſſerung nicht. Die Vergleichung jener Gränzen mit dem wahren Werthe des Bogens zeigt, wie viele Mühe es den ältern Mathematikern machte, ein paar Glieder der Reihe für den Bogen zu erhaſchen, die wir durch Hülfe der Integralrechnung, wegen des bekannten Geſetzes der Fortſchreitung ihrer Glieder, vollſtändig haben. Huygens findet durch die beiden Gränzen aus der Chorde und dem Sinus des Bogens von 6 Gr. den Umfang bis auf die neunte Decimalſtelle richtig.

Wallis fand durch eine gewiſſe ſehr künſtliche Art der Interpolation die Gränzen für $\frac{4}{\pi}$ auf eine ganz andere Art, durch einen Bruch, der aus der Multiplication unendlich vieler Brüche, welche ſich der Einheit immer mehr nähern, entſteht. In der Arithmetica Infinitorum, Operum Vol. I. pag. 468, ſagt er, das Quadrat des Durchmeſſers eines Kreiſes, die Kreisfläche zur Einheit genommen, iſt

kleiner als $\frac{3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot9\cdot9\cdot11\cdot11\cdot13\cdot13}{2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8\,10\cdot10\cdot12\cdot12\cdot14}\cdot\sqrt{1\tfrac{1}{13}}$,

größer als $\frac{3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot9\cdot9\cdot11\cdot11\cdot13\cdot13}{2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8\cdot10\cdot10\cdot12\cdot12\cdot14}\cdot\sqrt{1\tfrac{1}{14}}$.

Nach dieſer Form kann der Bruch, ſo weit man will, fortgeſetzt werden. Giebt man dem Bruche unendlich viele Factoren im Zähler und Nenner, ſo erhält man den Werth von $\frac{4}{\pi}$, der in der Cyklometrie, §. 29. aus den

unendlichen Reihen für sin φ und cos φ hergeleitet iſt. Zur Berechnung des Kreisumfanges, oder der Kreisfläche iſt dieſe Form nicht brauchbar.

Als Wallis dem Lord Brouncker die von ihm gefundene Form für das Quadrat des Durchmeſſers in Beziehung auf die Kreisfläche als Einheit mittheilte, erwiederte dieſer, daß er auch durch eine ihm eigene Infiniteſimal-Rechnung folgende ſehr bequeme Form gefunden habe, welche das Quadrat des Durchmeſſers ausdrückt.

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \cfrac{81}{2 + \text{etc.}}}}}}$$

Dabey ſey zu bemerken, daß, wenn man mit einem der Brüche abbricht, anſtatt der Zwey eine der ungeraden Zahlen 3, 5, 7, 9, etc. zu ſetzen iſt, diejenige, deren Stelle dieſelbe mit der Stelle des zuletzt geſetzten Bruchs in der Reihe der Brüche iſt, wodurch die Werthe des Quadrats, des Durchmeſſers abwechſelnd zu groß und zu klein ausfallen. So iſt

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{7}}} \qquad\qquad 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2}}}}$$

zu groß. zu klein.

Der erſtere Bruch giebt $\frac{4}{\pi} < \frac{180}{141}$; der zweyte . . .

$\frac{4}{\pi} > \frac{1680}{1321}$; alſo $\pi > 3,133$, und $\pi < 3,145$.

Die Brounckerſche Reihe in einander geſchobener Brüche entſteht aus der Reihe für den Bogen durch die Tangente (Cyklometrie, 10.), wenn darin der Bogen $= \frac{1}{4}\pi$, und $t = 1$ geſetzt wird, ſ. Kettenbruch. Sie nähert ſich aber auch mit der angebrachten Abänderung zu langſam. Brouncker hat den Weg, auf welchem er zu dieſer Darſtellung gekommen iſt, nicht bekannt gemacht. Wallis bemüht ſich zu zeigen, wie Brouncker den Kettenbruch gefun-

den haben möge. Man muß aber ſeinen Vortrag ſich geläufig gemacht haben, wenn man es verſtehen will.

Die neue Rechnung unendlicher Größen machte die Berechnung des Kreiſes nur zu einem Beyſpiele allgemeiner Methoden der Rectificirung und Quadrirung krummer Linien. Was vorher große Mühe gemacht, und vielen Scharfſinn erfordert hatte, ward faſt ein Spiel, und ein gleichſam mechaniſches Verfahren.

Newton gab in der Schrift, Analysis per aequationes numero terminorum infinitas, die Reihe für einen Kreisbogen durch den Sinus, aus dieſer durch Umkehrung die Reihe für den Sinus durch den Bogen, und aus dieſer die Reihe für den Coſinus, mittelſt Quadrirung der Reihe, und Ausziehung der Wurzel. Die Schrift iſt vor 1669 verfaßt, ſ. Differentialrechnung. In dem zweyten Briefe an Oldenburg, der für Leibnitz beſtimmt ward, vom 24. Oct. 1676. zeigt er an, daß die Reihe, $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15}$ etc. dem Quadranten des Kreiſes gleich iſt, wenn die Chorde dieſes Bogens zur Einheit genommen wird. Wie Newton dieſe Reihe gefunden habe, erhellt nicht aus der kurzen Anzeige, die er davon macht, noch aus andern Stellen ſeiner Schriften. Auf einem andern Wege, als Newton zu ihr gelangt ſeyn mag, bringt Euler die Reihe heraus in der Introd. in Anal. infin. T. I. §. 179.

Die Reihe für den Bogen durch die Tangente, und für die Tangente durch den Bogen, fand Jacob Gregory, im Jahre 1670, machte ſie aber nicht öffentlich bekannt, ſondern theilte ſie nur Collins ſchriftlich mit. Er fand auch die Reihe, welche die Secante durch den Bogen ausdruckt, nebſt zwey Reihen, wodurch der Logarithme einer Tangente und Secante unmittelbar berechnet werden können; und noch eine Reihe zur Rectification der Ellipſe, wobey er bemerkt, daß es nur nöthig iſt, einige Zeichen zu vertauſchen, um die Rectification der Hyperbel zu erhalten.

Die Reihe für den Kreisbogen durch die ungeraden Potenzen der Tangente hat Leibnitz auch für ſich gefun-

den, und um 1673 ſeinen mathematiſchen Freunden mitgetheilt. In den Actis Erud. 1682 machte er ſie, doch ohne Beweis, bekannt. Die Reihe für den Sinus durch den Bogen gab er eb. daſ. im J. 1693. Er findet ſie durch Differentiation einer angenommenen Reihe mittelſt der Methode der unbeſtimmten Coefficienten, auf zweyerley Wegen, durch einfache und durch gedoppelte Differentiation. Das letztere Verfahren iſt das von Käſtner in der Anal. d. Unendlichen, §. 285. gebrauchte. Den Bogen durch den Sinus hätte er auf dieſe Art auch leicht finden können, ohne die Entwickelung der Potenz $(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}$ zu gebrauchen, welches er aber nicht ſcheint unternommen zu haben.

Mehrere Rechner waren nun beſchäftigt, den Umfang des Kreiſes mit ſehr großer Genauigkeit zu finden. Abraham Sharp, ein großer Rechner in England, gegen das Ende des 17ten Jahrhunderts, berechnete, nach Halleys Anweiſung, aus der Tangente des Bogens von 30 Grad, welche $\sqrt{\frac{1}{3}}$ oder $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ iſt, den Umfang bis auf die 72ſte Decimalſtelle, den Durchmeſſer zur Einheit genommen. Die ganze Rechnung ſteht in Sherwin's mathematical Tables, dritte Ausg. von 1742. Eben daſelbſt wird auch die Berechnung des Umfanges aus der Tangente von 18 Gr. bis zur 45ſten Stelle, aus der Tangente von $22\frac{1}{2}$ Gr. bis zur 22ſten Stelle, und aus der Tangente von 15 Gr. bis zur 27ſten Stelle gleichfalls von Sharp ausgeführt gefunden. Daraus in der Sammlung der Scriptorum Logarithmicorum durch Maſeres, im 3ten Bande. Der Aufſatz, worin die erſte dieſer Berechnungen mitgetheilt wurde, erſchien, wie Hutton anführt, um 1706.

Um dieſelbe Zeit berechnete Machin, Profeſſor der Aſtronomie am Gresham College zu London, den Umfang des Kreiſes bis auf die hundertſte Decimalſtelle, vermittelſt zweyer Reihen, deren Unterſchied den Bogen von 45 Grad giebt. Es iſt nämlich Arc. $45° =$ 4 Arc. tang $\frac{1}{5}$ — Arc. tang $\frac{1}{239}$. Die daraus entſpringende

Doppelreihe hat Jones in ſeiner Synopsis Palmariorum Matheseos, 1706, mitgetheilt, doch ohne Erklärung, wie ſie gefunden ſey. Machins eigene Erklärung ſeines Verfahrens, die ſich handſchriftlich erhalten hat, iſt von Maſeres in die gleich vorher angeführte Sammlung, Vol. III. p. 159. ſeqq. eingerückt. Jones ſtellte die Doppelreihe als eine einfache dar, indem er zwey gleichſtellige Glieder der beiden Reihen mit dem gemeinſchaftlichen Diviſor als ein einziges Glied verband. Daher war ein ſehr guter Mathematiker, Thomas Simpſon, vergebens bemüht, den Grund der Reihe zu entdecken. Sie iſt auf dem feſten Lande lange unbekannt geblieben. Lange nachher erſt fand Euler eine ähnliche Formel, nämlich die, Arc. tang. 45° = Arc. tang. $\frac{1}{2}$ + Arc. tang $\frac{1}{3}$, welche aber nicht ſo ſchnell convergirende Reihen, wie jene, giebt, Introd. in Anal. Infin. T. I. §. 142.

Lagny gab in den Abhandlungen der Pariſer Akademie vom J. 1719, das Reſultat ſeiner Berechnungen über den Umfang des Kreiſes, wobey er ſich der Tangente des Bogens von 30 Gr. bedient hat. Er ſagt erſtlich, daß er die Leibnitziſche Reihe für den achten Theil des Umfanges ſchon im J. 1682 gefunden habe. Da ſie aber viel zu langſam convergire, ſo habe er die Tangente von 30 Gr. angewandt, und durch zwey weſentlich verſchiedene Operationen, bey der einen durch fortgeſetztes Addiren der Glieder, bey der andern durch wechſelndes Addiren und Subtrahiren, den Umfang bis zu 127 Decimalſtellen, für den Durchmeſſer, als Einheit, gefunden. Die Rechnung ſey mit äuſſerſter Leichtigkeit geführt. Er verſpricht den Beweis in einer andern Abhandlung zu geben, welches aber nicht geſchehen iſt. Euler in der Abhandl. de variis modis circuli quadraturam proxime exprimendi Comm. Petr. vet. T. IX., glaubt, Lagny habe ſich noch beſonderer Vortheile zur Abkürzung bedient. In der Zahl für den Umfang iſt ein Druck- oder Schreibfehler, da die 113te Decimalſtelle die Ziffer 7, anſtatt 8 enthält. Dieſen Fehler hat Vega entdeckt.

Endlich hat Vega nach der Formel,

$$\text{Arc } 45° = 5 \text{ Arc. tang } \tfrac{1}{7} + 2 \text{ Arc. tang } \tfrac{3}{79}$$

den Umfang bis zur 140ſten Decimalſtelle berechnet, und zur Prüfung die Rechnung noch nach der Formel

$$\text{Arc. } 45° = \text{Arc. tang } \tfrac{1}{7} + 2 \text{ Arc. tang } \tfrac{1}{3}$$

bis zur 126ſten Decimalſtelle vorgenommen. Thesaurus Logarithmorum completus, p. 633. In der Ratcliffſchen Bibliothek zu Oxford befindet ſich ein Manuſcript, worin die Rechnung bis zu der 154ſten Decimalſtelle getrieben iſt, nach dem Berichte des Barons von Zach.

In der That iſt alſo der Umfang des Kreiſes ſehr viel ſchärfer berechnet, als es je zum praktiſchen Gebrauche nöthig iſt. Dazu ſind die erſten zehn oder zwölf Decimalſtellen mehr als hinreichend. Denn ein Billiontheilchen iſt gegen die Einheit weniger, als eine Secunde Zeit gegen 31000 Jahre. Man gedenke ſich eine Kugel A, welche unſere Erdkugel ſo oft enthält, als dieſe Sandkörner faſſen könnte (man nehme 10 Quinquillionen), ferner eine Kugel B, die A eben ſo oft enthält, noch eine dritte C, die B eben ſo oft enthält, und noch eine D, die ſo groß iſt, als 1000 C, ſo iſt durch die von Lagny gefundene Zahl der Umfang bis auf ein Theilchen des Durchmeſſers berechnet, das in Vergleichung mit demſelben nicht größer iſt, als ein kleines Sandkorn gegen die Kugel D, und durch die von Vega hinzugefügten Ziffern noch zehn Billionenmahl genauer. Es kann gar nichts helfen, den Werth des Umfanges noch ſchärfer zu ſuchen, da einige hundert Ziffern gegen die unendlich vielen noch übrigen immer ein unbedeutender Zuſatz ſind. Nur das Künſtliche einer ſchnell annähernden Reihe könnte dadurch gezeigt werden.

Goniometriſche Formeln zur Berechnung des Umfanges eines Kreiſes.

Man ſetze in der Formel für den Bogen durch den Sinus (Cyklometrie, 1.) den Sinus, $y = \frac{1}{2}$, ſo iſt φ ein Bogen von 30 Grad oder der 12te Theil des Umfanges. Es iſt

$$\text{Arc. } 30^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \text{etc.}$$

Der vierte Terminus iſt $= \frac{5}{14336} = 0{,}00034 \ldots$

Jeder Terminus iſt mehr denn viermahl kleiner als der vorhergehende.

Newton ſchlug ſchon die Reihe für die Tangente $\sqrt{\tfrac{1}{3}}$ zur Berechnung des Umfanges vor. Die Formel a. a. O. 10. giebt

$$\text{Arc. } 30^\circ = \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \frac{1}{9 \cdot 3^4} - \frac{1}{11 \cdot 3^5} + \text{etc.}\right) \sqrt{\tfrac{1}{3}}.$$

Es iſt nämlich sin $30^\circ = \tfrac{1}{2}$; cos $30^\circ = \sqrt{\tfrac{3}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$, alſo tang $30^\circ = \sqrt{\tfrac{1}{3}}$. Folglich

$$\pi = \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \text{etc.}\right) \sqrt{12},$$

oder bequemer,

$$\pi = \frac{8}{3} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{2}{5 \cdot 7 \cdot 9} + \frac{3}{9 \cdot 11 \cdot 9^2} + \frac{4}{13 \cdot 15 \cdot 9^3} + \frac{5}{17 \cdot 19 \cdot 9^4} + \text{etc.}\right) \sqrt{12}.$$

Es iſt $\sqrt{12} = 3{,}46410\ 16151\ 37754 \ldots$ Die Ausziehung der Quadratwurzel aus 12 macht dieſes Verfahren beſchwerlich.

Man kann hier auch die Tangente von 18 Gr. gebrauchen, welche eine ſchneller convergirende Reihe giebt, als die von 30 Gr. Es iſt sin $18^\circ = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$; cos $18^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}$, (Goniometrie, IX.), alſo tang $18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}}$. Multiplicirt man Zäh-

ler und Nenner mit $\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$, ſo iſt tang 18° $= \frac{(\sqrt{5}-1)\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{\sqrt{80}}$. Den Zähler dividire man durch $\sqrt{5}-1$, und multiplicire dagegen die Größe unter dem Wurzelzeichen mit dem Quadrate von $\sqrt{5}-1$, d. i. mit $6-2\sqrt{5}$, ſo iſt tang 18° $=$ $\frac{\sqrt{(80-32\sqrt{5})}}{\sqrt{80}} = \sqrt{(1-2\sqrt{\tfrac{1}{5}})}$. Die gedoppelte Ausziehung der Quadratwurzel iſt zwar zuerſt beſchwerlich; allein die Potenzen der Tangente laſſen ſich leicht aus einander herleiten. Man ſetze tang 18° $= t$, ſo iſt $t^2 = 1 - 2\sqrt{\tfrac{1}{5}}$, und $2\sqrt{\tfrac{1}{5}} = 1 - t^2$, alſo $\tfrac{4}{5} = 1 - 2t^2 + t^4$, und $t^4 = 2t^2 - \tfrac{1}{5}$. Daher $t^3 = 2t - \tfrac{1}{5}t^{-1}$. Hieraus iſt $t^5 = 2t^3 - \tfrac{1}{5}t$; dann $t^7 = 2t^5 - \tfrac{1}{5}t^3$, u. ſ. f. ſo daß die ungeraden Potenzen von t eine rücklaufende Reihe bilden, deren Verhältniß-Scale $+2$; $-\tfrac{1}{5}$ iſt. Die Potenz t^{-1} iſt $\frac{1}{t}$ $= \sqrt{(5+2\sqrt{5})}$.

Die Ausziehungen der Wurzeln zu vermeiden, zerlege man den Bogen von 45 Gr. in zwey Theile, deren Tangenten rationale ſind, und addire die Reihen, wodurch ſie mittelſt ihrer Tangenten gegeben werden. Die Zerlegung kann auf unendlich viele Arten geſchehen. Man wird aber für die beiden Tangenten die einfachſten Brüche zu ſuchen haben. Die beiden Theile des Bogens von 45 Gr. ſeyn A und B, ſo iſt $A + B = \tfrac{1}{4}\pi$, und tang $(A+B)$ $=1$, zugleich auch tang $(A+B) =$ $\frac{\text{tang}\,A + \text{tang}\,B}{1 - \text{tang}\,A\,.\,\text{tang}\,B}$. (Goniometrie, 34.) Alſo iſt $1 - \text{tg}\,A\;\text{tg}\,B = \text{tg}\,A + \text{tg}\,B$. Setzt man tg $A = \tfrac{1}{2}$, ſo iſt tg $B = \tfrac{1}{3}$. Dieſe beiden Brüche ſind ſo einfach als möglich, und kommen ſich nahe genug. Nähme man eine der Tangenten klein gegen die andere, ſo würde zwar die Rehe für jene ſchnell convergiren, die Reihe für die andere aber auch deſto langſamer.

Es iſt

$$A = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \frac{1}{9.2^9} - \text{etc.}$$

$$B = \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \frac{1}{7.3^7} + \frac{1}{9.3^9} - \text{etc.}$$

Die Glieder dieſer Reihen laſſen ſich ſehr leicht berechnen. Jede beſteht in der That aus zweyen. Dieſe vereinige man durch die wirkliche Subtraction der ſubtractiven Glieder, und theile ſie wieder in zwey folgende:

$$A = \frac{11}{8}\left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7.4^2} + \frac{1}{9.11.4^4} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{12}{8}\left(\frac{1}{5.7.4^2} + \frac{2}{9.11.4^4} + \text{etc.}\right).$$

$$B = \frac{26}{27}\left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7.9^2} + \frac{1}{9.11.9^4} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{32}{27}\left(\frac{1}{5.7.9^2} + \frac{2}{9.11.9^4} + \text{etc.}\right).$$

Die Glieder nehmen ſtärker ab als in jenen Reihen, und auſſerdem muß in eben dieſen der größere Theil weiter berechnet werden. Wenn $P - Q = p + q$ iſt, ſo iſt $P > p$.

Um die Tangenten noch kleiner zu machen, zerlege man den Bogen von 45 Gr. in drey Theile, $2A + B$, von welchen zwey einander gleich genommen ſind, um nicht drey verſchiedene Reihen anzuwenden. Man ſetze

$\tang A = t$, $\tang B = u$, ſo iſt $\tang 2A = \frac{2t}{1 - t^2}$.

Es iſt aber $\tang 45° = 1 = \frac{\tang 2A + tgB}{1 - tg2A.tgB}$, alſo

$\frac{1 - tg2A}{1 + tg2A} = \tang B$. Setzt man für tang 2 A ſie-

nen Werth, ſo iſt $(1+2t-t^2)u = 1-2t-t^2$. Nimmt man $t = \frac{1}{2}$, ſo iſt $u = -\frac{1}{7}$, und B iſt ſubtractiv. Es iſt nämlich $A = 26^\circ 34'-$, und $B = -(8^\circ 8'-)$. Setzt man $t = \frac{1}{3}$, ſo iſt $u = +\frac{1}{7}$; und $A = 18^\circ 26'+$; $B = 8^\circ 8'-$. Demnach

$$A = \frac{1}{1\cdot3} - \frac{1}{3\cdot3^3} + \frac{1}{5\cdot3^5} - \frac{1}{7\cdot3^7} + \text{etc.}$$

$$B = \frac{1}{1\cdot7} - \frac{1}{3\cdot7^3} + \frac{1}{5\cdot7^5} - \frac{1}{7\cdot7^7} + \text{etc.}$$

oder

$$A = \frac{26}{27}\left(\frac{1}{1\cdot3} + \frac{1}{5\cdot7\cdot9^2} + \frac{1}{9\cdot11\cdot9^4} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{32}{27}\left(\frac{1}{5\cdot7\cdot9^2} + \frac{2}{9\cdot11\cdot9^4} + \text{etc.}\right);$$

$$B = \frac{146}{343}\left(\frac{1}{1\cdot3} + \frac{1}{5\cdot7\cdot49} + \frac{1}{9\cdot11\cdot49^4} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{192}{343}\left(\frac{1}{5\cdot7\cdot49} + \frac{2}{9\cdot11\cdot49^4} + \text{etc.}\right).$$

Man ſetze Arc. $45^\circ = 3A + B$, ſo iſt tang $3A = \frac{3t-t^3}{1-3t^2}$ (Goniometrie, IV.), und $\frac{1-\text{tg}\,3A}{1+\text{tg}\,3A} = \text{tang}\,B$, das iſt $\frac{1-3t-3t^2+t^3}{1+3t-3t^2-t^3} = \text{tang}\,B$. Setzt man t oder tang $A = \frac{1}{4}$, ſo iſt tang $B = \frac{5}{99}$. Hieraus iſt $A = 14^\circ 2'+$; $B = 2^\circ 54'-$.

Man ſetze noch Arc. $45^\circ = 4A + B$, ſo iſt

$$\text{tang}\,4A = \frac{4t-4t^3}{1-6t^2+t^4},$$ und

$$\frac{1-4t-6t^2+4t^5+t^4}{1+4t-6t^2-4t^3+t^4} = \text{tang}\,B.$$ Nimmt man $t = \frac{1}{5}$, ſo iſt tang $B = -\frac{1}{239}$, das iſt, Arc. $45^\circ = 4\,\text{Arc.}\,\text{tg}\,\frac{1}{5} - \text{Arc.}\,\text{tg}\,\frac{1}{239}$. Dieſes iſt die von Machin zur Berechnung des Umfanges gebrauchte Reihe.

Es iſt A = 11° 18′ 36″, und B = − 14′ 23″. Nach der vorher gebrauchten Zuſammenziehung und Zerlegung iſt

$$A = \frac{74}{125}\left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7.25^2} + \frac{1}{9.11.25^4} + \text{etc.}\right)$$

$$+ \frac{96}{125}\left(\frac{1}{5.7.25^2} + \frac{2}{9.11.25^4} + \text{etc.}\right).$$

$$B = \frac{171362}{239^3}\left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7.239^2} + \frac{1}{9.11.239^4} + \text{etc.}\right)$$

$$+ \frac{228480}{239^3}\left(\frac{1}{5.7.239^2} + \frac{1}{9.11.239^4} + \text{etc.}\right).$$

In den Reihen für A iſt der Vortheil, daß man die Diviſion durch 25 in die Multiplication mit $\frac{4}{100}$ verwandeln kann; die Reihen für B convergiren ſtark. Es möchte alſo dieſe Formel für den Bogen von 45 Gr. die bequemſte zur Berechnung des Kreisumfanges ſeyn. Bürmann von der Berechnung des Kreiſes, in dem Archiv für Mathematik, 8. Heft.

Um die Formeln für Arc. 45° zu vergleichen, ſtelle ich ſie hier zuſammen:

$$\text{Arc. } 45^\circ = \text{Arc. tg } \tfrac{1}{2} + \text{Arc. tg } \tfrac{1}{3}$$

$$\text{Arc. } 45^\circ = 2 \text{ Arc. tg } \tfrac{1}{3} + \text{Arc. tg } \tfrac{1}{7}$$

$$\text{Arc. } 45^\circ = 3 \text{ Arc. tg } \tfrac{1}{4} + \text{Arc. tg } \tfrac{5}{99}$$

$$\text{Arc. } 45^\circ = 4 \text{ Arc. tg } \tfrac{1}{5} - \text{Arc. tg } \tfrac{1}{239}$$

Man kann dergleichen Formeln noch mehrere machen, dergleichen die ſchon vorher angegebene,

Arc. 45° = 2 Arc. tang $\frac{1}{2}$ — Arc. tang $\frac{1}{7}$; und

Arc 45° = 3 Arc. tang $\frac{1}{3}$ — Arc. tang $\frac{2}{11}$, ſind.

Hutton in der angeführten Abhandlung über die leichte Berechnung des Kreis-Umfanges, Philos. Trans. 1776, giebt drey dieſer Formeln als von ihm gefunden an. Den Reihen, die aus der Euleriſchen Formel, Arc. 45° = Arc. tg $\frac{1}{2}$ + Arc. tg $\frac{1}{3}$, entſtehen, giebt er folgende Form:

$$\text{Arc. } 45^\circ = \frac{4}{10}\left(1 + \frac{4}{3.10} + \frac{8\alpha}{5.10} + \frac{12\beta}{7.10} + \frac{16\gamma}{9.10} + \text{etc.}\right)$$

$$+ \frac{3}{10}\left(1 + \frac{2}{3.10} + \frac{4\alpha}{5.10} + \frac{6\beta}{7.10} + \frac{8\gamma}{9.10} + \text{etc.}\right),$$

wo α, β, γ, etc. in jeder Reihe das nächſt vorhergehende Glied bedeuten. Wegen der Transformation beruft er ſich auf die Differential series in Th. Simpson's mathematical dissertations, p. 64. Auch den Reihen aus zwey andern Formeln giebt er eine ähnliche Geſtalt.

Vega hat den Umfang des Kreiſes nach der dritten unter den folgenden Formeln berechnet.

$$\text{Arc. } 45^\circ = \text{Arc. tg } \tfrac{1}{7} + 2 \text{ Arc tg } \tfrac{1}{3}$$
$$\text{Arc. } 45^\circ = 3 \text{ Arc. tg } \tfrac{1}{7} + 2 \text{ Arc. tg } \tfrac{2}{11}$$
$$\text{Arc. } 45^\circ = 5 \text{ Arc. tg } \tfrac{1}{7} + 2 \text{ Arc. tg } \tfrac{3}{79}$$
$$\text{Arc. } 45^\circ = 7 \text{ Arc. tg } \tfrac{1}{7} - 2 \text{ Arc. tg } \tfrac{29}{278}.$$

Wenn $\text{Arc. } 45^\circ = m. \text{ Arc. tang } t + 2 \text{ Arc. tg } u$, geſetzt wird, ſo muß t ſo angenommen werden, daß das Verhältniß von $t:u$ rational werde. Die Herleitung dieſer Formeln habe ich in dem Archiv der Mathematik, VII Heft gegeben: Formeln zur leichten Berechnung des Umfanges eines Kreiſes.

Man zerlege den Bogen der Tangente $\frac{1}{5}$ in . . $2 \text{ Arc. tg } \frac{1}{10} - \text{Arc. tg } u$, und ſuche die Tangente u. Es iſt $\text{tang } 2 \text{ Arc. tg } \frac{1}{10} = \frac{2:10}{1 - 1:100} = \frac{20}{99}$. Alſo die Tangente der Summe jener Bogen, nämlich $\frac{1}{5} = \frac{20:99 - u}{1 + 20u:99} = \frac{20 - 99u}{99 + 20u}$. Hieraus folgt $u = \frac{1}{515}$, ſo daß $\text{Arc. tg } \frac{1}{5} = 2 \text{ Arc. tg } \frac{1}{10} - \text{Arc. tg } \frac{1}{515}$ iſt.

Folglich iſt

$$\text{Arc.}\ 45^\circ = 8\ \text{Arc.tg}\ \tfrac{1}{10} - 4\ \text{Arc.tg}\ \tfrac{1}{515} - \text{Arc.tg}\ \tfrac{1}{239}.$$

Dieſe Formel hat zwar drey Theile, allein alle Reihen in derſelben convergiren ſehr ſchnell. Sie iſt mir von einem ſehr geſchickten Analyſten, Herrn Magiſter Buzengeiger in Ansbach, mitgetheilt worden.

Methoden, die goniometriſchen Linien zu berechnen.

Den erſten Verſuch in der Berechnung der goniometriſchen (trigonometriſchen) Linien treffen wir in des Ptolemäus Aſtronomie an, im 1. Buche, wo eine Tafel der Chorden von halben zu halben Graden geliefert iſt. Die Chorden werden durch Sexageſimaltheile des Halbmeſſers angegeben, z. B. ch. $45^\circ = 45.55.19$, das iſt $\frac{45}{60} + \frac{55}{60^2} + \frac{19}{60^3}$ oder 0,765366 des Halbmeſſers. Die Hälfte 0,382683 iſt der Sinus von $22^\circ\,30'$ wie in unſern Tafeln. In derſelben Tafel iſt für jede der angegebenen Chorden auch das Increment auf eine Minute beygefügt, der Interpolation wegen. So ſteht bey 45° das Increment 0.58.0, das iſt $\frac{58}{60^3} = 0,0002685$. Die Hälfte hiervon iſt der Unterſchied der Sinus von $22^\circ\,30'$ und $22^\circ\,30'\,30''$. Nach unſern Tafeln iſt dieſer 0,0001344.

Ptolemäus gebraucht zu dieſer Berechnung die Lehrſätze von der Zuſammenſetzung der Bogen mittelſt ihrer Chorden. Der in der Goniometrie (25.) zur Grundlage genommene geometriſche Satz iſt es bey ihm auch. Die Chorde der Hälfte eines Bogens aus der Chorde des Bogens findet er folgendergeſtalt. Zuerſt ſucht er die Chorde des Complements des Bogens A zum Halbkreiſe; den Unterſchied derſelben vom Durchmeſſer halbirt er, ſo iſt die Chorde von $\frac{1}{2}$A die mittlere Proportionale zwiſchen dem Durchmeſſer und dieſem halben Unterſchiede. Dieſer Satz kommt mit der Formel in Goniometrie (36.) überein.

Die numeriſchen Werthe der Seiten des Vierecks, Sechs-ecks, Fünfecks und Zehnecks dienen ihm die Rechnung daran zu knüpfen. Wo er genöthigt iſt, eine Chorde durch Interpolation zu finden, z. E. bey der Chorde von 1 Gr. ſucht er Gränzen, zwiſchen welchen ſie enthalten iſt. Seine Tafeln geben die Chorden innerhalb $\frac{1}{2160000}$ des Halbmeſſers, oder zwiſchen 4 bis 5 Milliontheilchen deſſelben. (Vergl. Käſtners geometriſche Abhandl. 1 Samml. S. 525. II. S. 354.).

Vor Ptolemäus hat man ſich ſchon mit der Berechnung der Chorden beſchäftigt, wovon aber nichts zu uns gekommen iſt. Hipparchus (im 2ten Jahrh. vor C. G.) hat, nach Theons Bericht (Comm. in Almag. L. I. c. 9), die Lehre von den Chorden des Kreiſes in zwölf Büchern abgehandelt. Menelaus (zu den Zeiten Trajans) hat auch ſechs Bücher von den Chorden des Kreiſes geſchrieben, die nicht mehr vorhanden ſind. Von dieſen Verfaſſern hat Ptolemäus ohne Zweifel ſeine Lehrſätze genommen; die Tafel der Chorden ſcheint er ſelbſt berechnet zu haben. Theon rühmt die Geſchicklichkeit, womit Ptolemäus die Berechnung der Chorden auf einige wenige und bequeme Sätze gegründet hat.

Die Araber führten ſtatt der Chorden die Hälften derſelben ein. Wo nur ſpitze Winkel vorkommen, da iſt es gleichgültig, ob das Dreyeck zwiſchen dem Durchmeſſer, der Chorde eines Bogens und der Chorde ſeines Complements zum Halbkreiſe, oder das dieſem ähnliche, zwiſchen dem Halbmeſſer, Sinus und Coſinus gebraucht wird. Allein dieſe, im Anfang vielleicht unnöthige, Veränderung hat die Folge, daß ſtumpfe Winkel, und ſelbſt Winkel über zwey Rechte, bequem in Rechnung gebracht werden können.

Georg Purbach (auch Peurbach, oder wie er auf dem Titel einer ſeiner Schriften heißt, Burbach, gebürtig aus einem Dorfe dieſes Namens an der öſterreichiſch-bayriſchen Gränze, geſt. 1461) verließ die alte Sexageſimaltheilung des Halbmeſſers, dem er dagegen 600000 Theile gab. Er berechnete die Sinus der Winkel von 10 zu

10 Minuten. (Gaſſendi in den Lebensbeſchreibungen einiger Aſtronomen, pag. 341. Weidleri hist. Astron. p. 301. Käſtner glaubt in den geom. Samml. II. S. 541. und Geſch. der Math. I. S. 537, daß Purbachs Tafeln durch alle Minuten gegangen ſeyn möchten). Dieſe Tafel der Sinus ſcheint nicht gedruckt zu ſeyn. In der Schrift de Quadrato geometrico, die zu Nürnberg 1516 gedruckt, und auch einer ſehr ſeltenen Sammlung einiger Schriften von Regiomontanus (Scripta clariss. Mathematici M. Jo. Regiomontani. Norib. 1544. 4). beygefügt iſt, liefert Purbach eine Tafel der Winkel, deren Tangente eine der Zahlen von 0 bis 1200 iſt, den Halbmeſſer = 1200 genommen, in Graden, Minuten und Secunden, alſo die Winkel von 0° bis 45°. Er hat dieſe Tafel aus ſeiner Tafel der Sinus hergeleitet. Sie iſt zum Gebrauche bey einem Winkelmeſſer beſtimmt, das die Form eines Quadrats hat, mit einem Diopternlinial, das ſich um einen Winkelpunct deſſelben drehen läßt. Von ſeiner Tafel der Sinus ſagt er, daß der Sinus totus darin 600 000 genommen ſey. Gaſſendi, Weidler und Bailly ſetzen 6000000.

Johann Müller, gewöhnlich Johannes Regiomontanus (von ſeinem Geburtsorte, Königsberg in Franken, geſt. 1476) berechnete zwey Sinustafeln, eine für den Halbmeſſer ſechs Millionen, und eine andere für den Halbmeſſer zehn Millionen. Die Bogen gehen von Minute zu Minute. Die Tafeln ſind, nebſt einer Abhandlung über die Berechnung der Sinus, und einer dahin gehörigen von Purbach verfaßten Schrift zu Nürnberg 1541 von Schoner herausgegeben. Ein Auszug findet ſich bey des Regiomontanus Tabulis directionum profectionumque, Vitemb. 1584. die ſchon im Jahre 1490 zu Augsburg herausgekommen ſind. Hier hat der Halbmeſſer 60000 Theile. Die Unterſchiede für eine Secunde ſind in Tauſendtheilchen eines dieſer Theile des Halbmeſſers beygefügt. Z. B. sin 31° 1′ = 30917 mit dem Unterſchiede 249. Dieſer mit 60 multiplicirt giebt 14,940 oder 15 nächſtens, welche zu jenem Sinus addirt

30932 als sin 31° 2' geben. Bey der Berechnung der Sinus hat Regiomontanus den Sinus totus 600 Millionen groß genommen, um die Zahlen in den Tafeln bis in der letzten Ziffer genau zu erhalten. Die Sinus leitete er, wie Ptolemäus, aus den Seiten einiger Vielecke durch Halbirungen und Zuſammenſetzungen der Winkel her, bis daß er ſie von 45 zu 45 Min. bekam, Den Sinus von 1 Grad findet er dadurch, daß $\sin 1^\circ$ kleiner als $\frac{4}{3}\sin 45'$, und größer als $\frac{1}{3}(\sin 90' + 2\sin 45')$ iſt. So konnte er ferner die Sinus von 15 zu 15 Min erhalten, und dann durch geſchicktes Einſchieben die zwiſchen liegenden. Dieſes hat er auch bey den Sinus der Winkel, deren Unterſchied 45' beträgt, zugleich angewandt. Er zeigt ſein Verfahren nur mit wenigen Worten an, daher Käſtner in der Geſchichte d. Mathem. I. S. 553 geſteht, daß er Regiomontans Vorſchrift wegen der Unterſchiede nicht vollkommen verſtehe. Das Verfahren iſt mit den Gründen, worauf es beruht, folgendes. Es ſeyn drey Winkel, A, B, C, in arithmetiſcher Proportion, zwiſchen welchen die Winkel α, β, γ, δ, in arithmetiſcher Progreſſion mit jenen und unter ſich eingeſchoben werden, nämlich α, β zwiſchen A, B, und γ, δ zwiſchen B, C. Nun iſt $\frac{1}{3}(\sin B - \sin A)$ kleiner als $\sin\alpha - \sin A$, aber größer als $\sin B - \sin\beta$, daher $\frac{1}{3}(\sin B - \sin A) = \sin\beta - \sin\alpha$ nahe. Gleichergeſtalt iſt $\frac{1}{3}(\sin C - \sin B) = \sin\delta - \sin\gamma$ nahe. Man nehme die Unterſchiede I. $\sin\beta - \sin\alpha$; II. $\sin B - \sin\beta$; III. $\sin\gamma - \sin B$; IV. $\sin\delta - \sin\gamma$, in arithmetiſcher Progreſſion, ſo werden, weil die beiden äuſſern Glieder, der Vorausſetzung gemäß, bekannt ſind, die beiden mittlern leicht gefunden, alſo auch $\sin\beta$ und $\sin\gamma$, daraus dann auch $\sin\alpha$ und $\sin\delta$. Das Verfahren giebt die eingeſchalteten Sinus ſo weit richtig, als es richtig iſt, daß die zweyten Unterſchiede ſich gleich ſind.

Bis zum Regiomontan enthielten die trigonometriſchen Tafeln nur die Sinus. Er fügte noch die Tangenten hinzu. Die Tafel derſelben nannte er wegen ihres nützlichen Gebrauchs, tabulam foecundam. Bey den vorher an-

geführten aſtronomiſchen Tafeln des Regiomontanus iſt eine ſolche für den Halbmeſſer 100000, aber nur von Grad zu Grad enthalten.

Beträchtlich weiter gieng Georg Joachim von ſeinem Vaterlande gewöhnlich Rhäticus, genannt, (geb. 1514 zu Feldkirch in einem Theile des alten Rhätien; geſt. 1576), der aber doch ſein mühſeliges großes Werk nicht vollendete. Er nahm ſich vor, die Sinus, Tangenten und die von ihm zuerſt eingeführten Secanten *), für einen in 10000 Millionen getheilten Halbmeſſer von 10 zu 10 Secunden zu liefern. Bey der Berechnung ſelbſt nahm er, zur Sicherheit bis auf die letzte Ziffer, den Halbmeſſer 1000 Billionen groß an. Als er über der Ausarbeitung verſtarb, nahm ſein Schüler und Gehülfe, Valentin Otho, ſich des Werkes an, zu deſſen Vollendung ihm von dem Kaiſer Maximilian II. die Koſten bewilliget wurden. Nach dem Tode dieſes Kaiſers konnte man am öſterreichiſchen Hofe für trigonometriſche Tafeln nichts thun. Otho bekam einen Ruf nach Wittenberg als Profeſſor der Mathematik mit dem Verſprechen der zu ſeiner Arbeit nöthigen Koſten, worauf er ſich dahin begab. Allein wegen gewiſſer Vorfälle mußte er nebſt einigen andern dieſen Ort verlaſſen. Er reiſete einige Jahre herum, bis er von D. Caſpar Peucer in die Pfalz am Rhein zu kommen eingeladen ward. Hier erhielt er von dem Pfalzgrafen Johann Caſimir, dem Vormunde des noch minderjährigen Kurfürſten Friedrich IV. die Koſten zur Vollendung und Herausgabe des Werks. Er gab ſeines Lehrers und ſeine eigene Arbeit in einem großen Folianten heraus, unter dem Titel: Opus Palatinum de triangulis, a Georg. Joach. Rhetico coeptum; L. Valentinus Otho Principis Palatini Friderici IV. Electoris Mathematicus conſummavit, 1596. In dieſem Werke ſind enthalten von Rhäticus ſelbſt, Libri tres de fabrica canonis doctrinae triangulorum; de triquetris recta-

*) Zu gleicher Zeit mit Rhäticus berechnete Maurolycus in Sicilien (geſt. 1575) eine Tafel der Secanten, die er tabulam beneficam nannte.

rum linearum, in planitie liber unus; de triangulis globi cum angulo recto libri quatuor. Dann von Otho, de triangulis globi sine angulo recto libri quinque, quibus tria meteoroſcopia numerorum acceſſerunt. Dieſe Meteoroſcopia ſind Tafeln zur ſphäriſchen Trigonometrie gehörig. Auf dieſe folgt der große Canon doctrinae triangulorum ad decades ſecundorum scrupulorum et ad partes 10000 000 000. Dieſer enthält die Sinus, Tangenten und Secanten, in drey Reihen oder Abtheilungen. Die erſte Reihe enthält die Sinus und Coſinus der Winkel von 0 bis 45 Gr. unter den Benennungen, Perpendiculum et Baſis. Die zweyte Reihe enthält die Secanten und Tangenten derſelben unter den Benennungen, Hypotenuſa und Perpendiculum; die dritte Reihe die Coſecanten und Cotangenten derſelben unter den Benennungen, Hypotenuſa und Baſis. Dieſe Überſchriften ſtehen über den Columnen; unten ſind die Benennungen, Perpendiculum und Baſis vertauſcht, da die Complemente jener Winkel von unten auf gezählt werden, wie es in den neuern Tafeln gewöhnlich iſt. Die Unterſchiede aller dieſer Größen ſind beygefügt.

Die Berechnung der goniometriſchen Linien, ohne die Hülfe der Analyſis, zeigt die Methode des Rhäticus am vollſtändigſten. Die dazu nöthigen Zahlen ſind mit den Reſultaten der arithmetiſchen Operationen größtentheils aufgeſtellt, ſo daß man die ganze Rechnung in ihren einzelnen Theilen verfolgen kann. Auſſer den Lehrſätzen ſeiner Vorgänger hat Rh. noch zwey Sätze über die Sinus und Coſinus, deren Winkel gleichförmig zunehmen, (de fabrica canonis, prop. 9.). Der eine iſt, in unſere Formularausdrücke gebracht: $\cos(a+nb)=\cos(a+(n-2)b)-2\sin b.\sin(a+(n-1)b)$. Der zweyte iſt: $\sin(a+nb)=2\cos b.\sin(a+(n-1)b)-\sin(a+(n-2)b)$. (Goniometrie, 58, 55).

Rhäticus findet auch durch algebraiſche Rechnung (wie er es nennt, per maxima Logiſtices praecepta) den Sinus der Hälfte und des dritten Theils aus dem Sinus

eines gegebenen Bogens. Bey der Halbirung zieht er eine längere Rechnung einer kürzern vor, weil er glaubt, daß jene mehr Sicherheit gewähre. Er addirt das Quadrat des Sinus verſus eines Bogens A zu dem Quadrate des Sinus, zieht aus der Summe die Quadratwurzel, und halbirt dieſe, wodurch er den Sinus von $\frac{1}{2}$ A erhält. Kürzer iſt die Rechnung nach der Formel $1 - \cos A = 2 \sin \frac{1}{2} A^2$, und ohne Zweifel eben ſo ſicher. Bey kleinen Winkeln bedient Rhäticus ſich einer algebraiſchen Auflöſung.

Aus den Seiten des Zehnecks und Sechsecks leitet Rhäticus durch Halbirung und Zuſammenſetzungen der Winkel die Sinus von anderthalb zu anderthalb Graden her. Durch die Verbindung des Winkels von 45′, deſſen Sinus und Coſinus durch fortgeſetzte Halbirung des Winkels von 12° gefunden ſind, werden die Sinus und Coſinus von 45 zu 45 Min. gefunden. Hierauf nimmt er 43 ſucceſſive Halbirungen des Winkels von 45′ vor, und findet die Sinus und Coſinus der Theile. Der Sinus des letzten dieſer Winkel iſt einer der Theile, deren der Halbmeſſer 1000 Billionen enthält. Nun iſt ſeine Abſicht, den Sinus und Coſinus von 1 Min. genau zu finden. Dazu geht er folgenden Weg. Aus den Sinus und Coſinus der Winkel, 33° 45′ und 22′ 30″, findet er den Sinus und Coſinus von 34° 7′ 30″. Unter den Winkeln, die durch die fortgeſetzte Halbirung von 45′ entſtehen, ſind drey, deren Summe iſt 12″. 11. 41. 22. etc. wo die abgeſonderten Zahlen Sexageſimaltheile ſind. Dieſen Winkel nenne man α. Der Sinus deſſelben wird aus den Sinus und Coſinus der Theile berechnet. Ferner giebt die ſechſte Halbirung den Winkel 42″. 11. 15. Dieſer ſey $= \beta$. Der Unterſchied von β von α iſt 29″. 59. 33. 37. etc. $= \gamma$. Da dieſer Winkel ſehr wenig von 30″ verſchieden iſt, ſo kann man die Proportion ſetzen, $\gamma : 30'' = \sin \gamma : \sin 30''$, wo $\sin \gamma$ aus den Sinus und Coſinus von α und β gefunden iſt. Die Verbindung der Winkel 34° 7′ 30″ und 30″ giebt sin 34° 8′ und cos 34° 8′. Aus dieſen werden die Sinus und Coſinus der ſucceſſiven Winkel her-

geleitet, bis zu dem von 1 Min. Nun iſt Rhäticus im Stande, die Sinus uud Coſinus der Winkel von 1 bis 45 Min. zu berechnen. Mit Hülfe dieſer konnte er darauf die Reihe von 45 zu 45 Min. für jede Minute ausfüllen. Nun waren noch die Sinus und Coſinus der Winkel, die 10, 20, 30, 40, 50 Secunden über die Grade und Minuten enthalten, zu berechnen. Zuerſt ſucht Rhäticus den Sinus von 5 Sec. folgendermaßen. Er nimmt aus dem Canon der Halbirungen von 45 Min. vier Winkel heraus, deren Summe iſt 4″. 56. 37. 51. etc. und berechnet den Sinus deſſelben aus den Sinus und Coſinus der Theile. Aus dem Sinus findet er, wie vorher bey dem Sinus von 30 Sec., durch eine einfache Proportion den Sinus von 5 Sec. und aus dieſem auch den Coſinus. Da aus sin 30″ der sin 15″ gefunden wird, ſo ergeben ſich nun sin 10″; sin 20″, und ferner sin 40″; sin 50″, nebſt den Coſinus dieſer Winkel. Da dieſe gefunden ſind, ſo werden die Sinus und Coſinus von 10 zu 10 Sec. in der Reihe derer von Minute zu Minute eingeſchaltet, mittelſt der Lehrſätze von den Sinus und Coſinus der Summe oder des Unterſchiedes zweyer Winkel.

Die Tangenten und Secanten findet Rhäticus unmittelbar durch die Proportionen, coſ : sin = rad : tang. und coſ : rad = rad : sec. Auf ähnliche Weiſe findet er auch die Cotangenten und Coſecanten. Nach Schulze's Verſicherung (Einleit. zu ſeinen Tafeln) ſind von den Cotangenten in dem Op. Palat. im Anfang des Quadranten nur die 5 bis 6 erſten Stellen richtig. Hobert und Ideler ſagen in der Einleitung zu ihren neuen Tafeln, daß ſie cot 0° 27′ = 127, 321 336 4689 gefunden haben, da dieſelbe in dem Op. Palat. 127, 321 336 2801 iſt.

Ein Canon der Sinus für den Halbmeſſer 1000 Billionen, von 10 zu 10 Secunden mit den erſten, zweyten und dritten Unterſchieden, iſt in Pitiſci theſauro mathematico (Francof. 1613.) enthalten. Es iſt der von Rhäticus ſelbſt berechnete, aus dem Nachlaſſe deſſelben noch erhaltene. Käſtners geometriſche Abhandlungen I. S. 573. In dem Opere Palatino ſind die Sinus,

un

Tangenten und Secanten für einen ſo großen Halbmeſſer von 45 zu 45 Min. enthalten.

Die Analyſis des Unendlichen hat zu der Berechnung der goniometriſchen Linien viel leichtere und kürzere Wege eröffnet, als jene unverdroſſenen Rechner zu nehmen genöthigt waren. Mittelſt der Formeln, welche dieſe Linien durch ihre Bogen darſtellen, kann man jede unabhängig von den andern finden, ſo genau als man nur will, ohne einen, bloß zur Sicherheit bey den Reſultaten nöthigen Aufwand von Berechnungen. Wollte man den ganzen Canon oder ein Stück deſſelben berechnen, ſo kann man diejenigen Größen, zwiſchen welchen die übrigen eingeſchaltet werden ſollen, vortheilhaft auswählen, und hat zur Einſchaltung mehrere, ſowohl bequeme als ſichere Methoden.

Um die Berechnung der goniometriſchen Linien zu erleichtern, hat Euler die unveränderlichen Factoren in den Formeln für dieſelben ſehr weit berechnet, in der Introd. in Anal Infin. T. I. cap. 8. Die Formeln bekommen dadurch folgende Geſtalt. Es ſey für den Halbmeſſer als Einheit der Bogen $= \varphi$, und φ verhalte ſich zum Quadranten wie m zu n,

ſo iſt $\varphi = \frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{2}$ und es iſt

$\mathrm{Sin}\,\varphi =$		$\mathrm{Cof}\,\varphi =$	
$+\frac{m}{n}$	$\cdot$ 1,570796 3267	$+$	1,000000 0000
$-\frac{m^3}{n^3}$	$\cdot$ 0,645964 0975	$-\frac{m^2}{n^2}$	$\cdot$ 1,233700 5501
$+\frac{m^5}{n^5}$	$\cdot$ 0,079692 6262	$+\frac{m^4}{n^4}$	$\cdot$ 0,253669 5079
$-\frac{m^7}{n^7}$	$\cdot$ 0,004681 7541	$-\frac{m^6}{n^6}$	$\cdot$ 0,020863 4807
$+\frac{m^9}{n^9}$	$\cdot$ 0,000160 4411	$+\frac{m^8}{n^8}$	$\cdot$ 0,000919 2602
$-\frac{m^{11}}{n^{11}}$	$\cdot$ 0,000003 5988	$-\frac{m^{10}}{n^{10}}$	$\cdot$ 0,000025 2020
$+\frac{m^{13}}{n^{13}}$	$\cdot$ 0,000000 0569	$+\frac{m^{12}}{n^{12}}$	$\cdot$ 0,000000 4710
+ etc.		+ etc.	

Tang $\varphi =$	Cot $\varphi =$
$+ \frac{2mn}{nn-mm} \cdot 0,636619\ 7723$	$+ \frac{n}{m} \cdot 0,636619\ 7723$
$+ \frac{m}{n} \cdot 0,297556\ 7820$	$- \frac{4nn}{4nn-mm} \cdot 0,318309\ 8861$
$+ \frac{m^3}{n^3} \cdot 0,018688\ 6502$	$- \frac{m}{n} \cdot 0,205288\ 8894$
$+ \frac{m^5}{n^5} \cdot 0,001842\ 4752$	$- \frac{m^3}{n^3} \cdot 0,006551\ 0747$
$+ \frac{m^7}{n^7} \cdot 0,000197\ 5800$	$- \frac{m^5}{n^5} \cdot 0,000345\ 0292$
$+ \frac{m^9}{n^9} \cdot 0,000021\ 6977$	$- \frac{m^7}{n^7} \cdot 0,000020\ 2791$
$+ \frac{m^{11}}{n^{11}} \cdot 0,000002\ 4011$	$- \frac{m^9}{n^9} \cdot 0,000001\ 2366$
$+ \frac{m^{13}}{n^{13}} \cdot 0,000000\ 2664$	$- \frac{m^{11}}{n^{11}} \cdot 0.000000\ 0764$
$+ \frac{m^{15}}{n^{15}} \cdot 0,000000\ 0295$	$- \frac{m^{13}}{n^{13}} \cdot 0,000000\ 0047$
+ etc.	— etc.

Die Formeln für sin φ und coſ φ ſind aus denen in Cyklometrie (5.6.) die für tang φ und cot φ ans denen daſ. 38, 39. hergeleitet. Bey Euler ſind die numeriſchen Factoren für Sinus und Coſinus bis zur 28ſten Decimalſtelle; für Tangente und Cotangente bis zur 13ten angegeben.

Da man jetzt damit umgeht, das Decimalſyſtem in allen mathematiſchen Rechnungen einzuführen, ſo hat dieſes eine neue Berechnung der geometriſchen Linien für die Decimal = Eintheilung des Quadranten veranlaßt. Deutſchland iſt darin Frankreich zuvorgekommen. Hobert, Profeſſor der Mathematik und Phyſik an der Militär=Akademie des Artilleriecorps zu Berlin, und Ideler, Aſtronom der Preuß. Akademie der Wiſſenſchaften, haben mit der größten Genauigkeit und Unverdroſſenheit neue trigonometriſche Tafeln für die Decimaleintheilung des Quadranten berechnet, und zu Berlin 1799 herausgegeben. Von 0 bis 0, 03 des

Quadranten gehen die Sinus, Coſinus, Tangenten und Cotangenten durch alle einzelne Hunderttauſendtheilchen des Quadranten, das iſt, durch je 3″, 240 der Sexageſimaltheilung, von 0, 03 an durch alle einzelne Zehntauſendtheilchen. Die Berechnungsart iſt hauptſächlich eine Interpolation einer Reihe von 25 Sinus und Coſinus in der erſten Hälfte des Quadranten. Dieſe ſind bis auf 30 Decimalſtellen berechnet. Die Unterſchiede ſind bis zum ſechſten genommen; und in den erſten drey Hunderttheilen, wo die Glieder der Hauptreihe ſich viel näher kommen, bis zum fünften. Die Herausgeber haben ihr Verfahren in der ſehr lehrreichen Einleitung ausführlich beſchrieben.

Um die Anwendung verſchiedener Hülfsmittel bey einer ſo weitläuftigen Rechnung zu zeigen, will ich ein Verfahren beſchreiben, welches ſie, ohne Gefahr für die Genauigkeit, ſehr abkürzt.

Wenn die Sinus und Coſinus nach der Decimaleintheilung des Quadranten berechnet werden ſollen, ſo ſuche man

I. Dieſelben für 0, 1; 0, 01; 0, 001; 0001; 0, 00001 des Quadranten nach den gleich vorher mitgetheilten Euleriſchen Formeln. Dieſes geſchieht ſehr leicht.

II. Man berechne die Sinus und Coſinus der Bogen 0, 1; 0, 2; 0, 3; 0, 4; 0, 5, nach den Formeln

$$\sin nA = \sin(n-2)A + 2\sin A.\cos(n-1)A,$$
$$\cos nA = \cos(n-2)A - 2\sin A.\sin(n-1)A,$$

welche man aus den Formeln (Goniometrie 56, 58.) erhält, wenn daſelbſt a = 0, und A für b geſetzt wird. Hier iſt A = 0, 1 des Quadranten, und sin A ein beſtändiger Factor. Das letzte Glied der Reihe, sin 0, 5, und cos 0, 5 iſt $= \sqrt{0,5}$, welches leicht berechnet iſt, und zur Prüfung der Rechnung dient.

III. Man ſchalte zwiſchen den Sinus und Coſinus von 0; 0, 1; 0, 2; 0, 3, des Quadranten neue Glieder ein, mittelſt des Sinus und Coſinus von 0, 01 des Quad. nach den Formeln (a. a. O.)

$$\sin(a+nb) = \sin(a+(n-2)b) + 2\sin b.\cos(a+(n-1)b)$$

$$\cos(a+nb) + \cos(a+(n-2)b) - 2\sin b.\sin(a+(n-1)b).$$

Hier iſt $b = 0,01$ des Quadranten, und a ein Glied der zu ergänzenden Reihe. Die Sinus und Coſinus brauchen nur bis 0, 25 des Quadranten berechnet zu werden, da nach (Goniometrie 50)

$$\sin(\tfrac{1}{2}R - A) = \tfrac{1}{2}(\cos A - \sin A)\sqrt{2}$$

$$\cos(\tfrac{1}{2}R - A) = \tfrac{1}{2}(\sin A + \cos A)\sqrt{2}$$

iſt. Die ſchon berechneten Glieder der urſprünglichen Reihe dienen zur Prüfung der Rechnung.

IV. In der derivirten Reihe der S. und C. von 0; 0, 01; 0, 02; . . . . . 0,24; 0, 25, ſchalte man wieder je neun Glieder ein, mittelſt des S. und C. von 0, 001, nach den gleich vorher angeführten Formeln.

V. Man ſchalte in der zweyten derivirten Reihe entweder durchgehends, oder in einem Theile derſelben, nach dem Grade der vorgeſetzten Genauigkeit, je neun Glieder ein; oder bediene ſich, wenn die Differenzen klein genug ſind, zugleich folgender Differenzen-Formeln. Es ſey φ ein Bogen für den Halbmeſſer als Einheit; $\Delta\varphi$ ein endliches Wachsthum deſſelben; $\Delta \sin\varphi$ das zugehörige Wachsthum des Sinus, und $-\Delta\cos\varphi$ die zugehörige Abnahme des Coſinus, ſo iſt (Differenzen-Rechnung, 27. 28.)

$$\Delta\sin\varphi = \cos\varphi(\Delta\varphi - \tfrac{1}{6}\Delta\varphi^3 + \text{etc.}) - \sin\varphi(\tfrac{1}{2}\Delta\varphi^2 - \tfrac{1}{24}\Delta\varphi^4 + \text{etc.})$$

$$-\Delta\cos\varphi = \sin\varphi(\Delta\varphi - \tfrac{1}{6}\Delta\varphi^3 + \text{etc.}) + \cos\varphi(\tfrac{1}{2}\Delta\varphi^2 - \tfrac{1}{24}\Delta\varphi^4 + \text{etc.})$$

In dieſem Falle ſchalte man durch die goniometriſchen Formeln nur vier Glieder ſtatt neun ein, welches 5 Intervalle giebt, und fülle die Intervalle mittelſt der Differenzenformeln aus.

VI. In eben dieſem Falle laſſen ſich auch folgende indirecte Formeln zum Einſchalten anwenden. Wenn drey

Winkel, A, B, C, in arithmetiſcher Proportion ſind, ſo iſt (Goniometrie, III.)

$$\sin B = \tfrac{1}{2}(\sin A + \sin C) + 2\sin B . \sin \tfrac{1}{2}(B - A)^2,$$

$$\cos B = \tfrac{1}{2}(\cos A + \cos C) + 2\cos B . \sin \tfrac{1}{2}(B - A)^2,$$

wo man in dem zweyten Terminus des zweyten Theils der Gleichung für $\sin B$ und $\cos B$ den erſten Terminus ſetzen, oder ſie aus ſchon berechneten Tafeln, ſo weit dieſe ſie liefern, zur ſchärfern Berechnung nehmen mag, wofern nur $\sin \tfrac{1}{2}(B - A)^2$ klein genug iſt, um den Fehler in dem Factor $\sin B$ oder $\cos B$ dem vorgeſetzten Grade der Genauigkeit unſchädlich ſeyn zu laſſen.

VII. Man wird ſich auch mit Vortheil der Formeln für die Anfangsglieder der Differenzenreihen von Sinus und Coſinus, deren Winkel in arithmetiſcher Progreſſion ſind, aus Goniometrie III. bedienen können. Nämlich, wenn die Winkel ſind A, $A + \alpha$, $A + 2\alpha$, $A + 3\alpha$, etc. ſo iſt $\Delta \sin A = + 2\cos(A + \alpha) . \sin\alpha$; $\Delta^2 \sin A = - 4\sin(A + 2\alpha) . \sin\alpha^2$; $\Delta^3 \sin A = - 8\cos(A + 3\alpha) . \sin\alpha^3$; $\Delta^4 \sin A = + 16\sin(A + 4\alpha) . \sin\alpha^4$; u. ſ. f.

VIII. Wenn die dritten Unterſchiede der Glieder in einer derivirten Reihe nahe ſich gleich ſind, ſo interpolire man auf folgende Art. Es ſeyn Q; $Q + \alpha$; $Q + \beta$; $Q + \beta + \omega$, vier Glieder einer Reihe, in den Stellen, die durch 0; 1; 10; 11 bezeichnet werden; zwiſchen dieſen ſoll in der Stelle x das Glied $Q + y$ eingeſchaltet werden, ſo iſt, wenn die dritten Unterſchiede der Glieder, bey gleich großen Abſtänden, unveränderlich ſind,

$$y = \frac{x}{10}\beta + \frac{x(10 - x)(11 - x)}{90}\left(\alpha - \frac{\beta}{10}\right) + \frac{x(10 - x)(x - 1)}{110}\left(\frac{\beta}{10} - \omega\right),$$

(ſ. Einſchaltung.). Man ſchalte nämlich nach den geometriſchen Formeln für $\sin(A + B)$ und $\cos(A + B)$ bloß das erſte von allen neun Gliedern nach jedem Gliede der zu ergänzenden Reihe ein; dieſes iſt, was hier durch $Q + \alpha$ und $Q + \beta + \omega$ bezeichnet iſt, da Q und $Q + \beta$ zwey

nächſte Glieder der Reihe ſelbſt ſind. Die Stellen der beiden letztern ſind 0 und 10, jener 1 und 11. Der erſte Theil der Formel iſt der einfache Proportionaltheil; die beiden andern ſind die Verbeſſerungen wegen des ungleichförmigen Zunehmens oder Abnehmens, durch den Unterſchied von dem mittlern Werthe der Veränderungen. Die Vorzeichen in der Formel ſind auf Sinus eingerichtet. Für Coſinus nehme man die Veränderungen bloß nach dee Quantität, ohne die Vorzeichen von α, β, $\beta + \omega$ und y zu ändern, aber der zweyte und dritte Theil der Formeln ſind ſubtractiv zu nehmen. Wo es nöthig ſcheinen ſollte, eine Probe der Interpolation zu haben, berechne man den Sinus und Coſinus des mittelſten Winkels nach den Formeln für die Zuſammenſetzung deſſelben, oder folgendergeſtalt. Es ſeyn A, B, C, drey Winkel in arithmetiſcher Proportion, ſo iſt

$$\tfrac{1}{2}(\sin A + \sin C)\,\mathrm{sec}\,\tfrac{1}{2}(C - A) = \sin B,$$

$$\tfrac{1}{2}(\sin A + \cos C)\,\mathrm{sec}\,\tfrac{1}{2}(C - A) = \cos B,$$

aus Goniometrie (28 u. 14.). Für die Secanten kann man nach der Formel (Cyklometrie, 22.) ſich eben ſolche Reihen, wie die Euleriſchen für Sinus und Coſinus, berechnen, die aber nur aus zwey oder drey Gliedern zu beſtehen brauchen, weil C — A hier ein kleiner Winkel iſt.

IX. Wenn die zweyten Unterſchiede einer derivirten Reihe beſtändig ſind, ſo interpolire man ſie folgendergeſtalt. Es ſeyn Q; Q + α; Q + β, drey nächſte Glieder einer ſolchen Reihe, deren Stellen durch 0, 10, 20 bezeichnet werden; ein einzuſchaltendes Glied in der Stelle x ſey, = Q + y, ſo iſt

$$y = \frac{x}{10}\alpha + \frac{x(10 - x)}{100}(\alpha - \tfrac{1}{2}\beta),$$

$$\text{oder } y = \frac{x}{10}\alpha - \frac{x(x - 10)}{100}(\alpha - \tfrac{1}{2}\beta).$$

X. Endlich, wo die erſten Unterſchiede ſich gleich bleiben, braucht man nur die einfachen Proportionaltheile den berechneten Gliedern zuzuſetzen.

Bey den Tangenten und Cotangenten entbehrt man den Vortheil, das Einſchalten durch eine genaue goniometriſche Formel unmittelbar zu bewerkſtelligen. Aber mittelſt der ſchon berechneten Sinus und Coſinus läßt es ſich bequem ausrichten. Denn es iſt aus Goniometrie (31.)

$$\text{tang}(\varphi+\omega)-\text{tang}\,\varphi=\frac{\sin\omega}{\text{coſ}\,\varphi.\,\text{coſ}(\varphi+\omega)},$$

$$\cot\varphi-\cot(\varphi+\omega)=\frac{\sin\omega}{\sin\varphi.\,\sin(\varphi+\omega)}.$$

Hat man mittelſt der Euleriſchen Formeln eine Reihe von Tangenten und Cotangenten für Winkel in arithmetiſcher Fortſchreitung berechnet, ſo kann man die einzuſchaltenden Glieder ganz leicht und genau durch dieſe Formeln finden, indem man für den Einſchaltungswinkel ω nach und nach kleinere Werthe ſetzt.

Man hat nur nöthig, die Tangenten und Cotangenten der Winkel unter $\frac{1}{3}$ des Quadranten zu berechnen. Denn es iſt (Goniometrie, 48.)

$$\cot(\tfrac{1}{2}R-A)-\text{tang}(\tfrac{1}{2}R-A)=2\,\text{tang}\,2A.$$

Nimmt man $2A=\frac{1}{3}R+2\alpha$, wo 2α kleiner als $\frac{1}{3}R$ iſt, ſo iſt $\frac{1}{2}R-A=\frac{1}{3}R-\alpha$. Man findet alſo aus den Tangenten und Cotangenten der Winkel zwiſchen $\frac{1}{6}R$ und $\frac{1}{3}R$ die Tangenten eben ſo vieler Winkel zwiſchen $\frac{1}{3}R$ und $\frac{2}{3}R$, deren Unterſchiede aber doppelt ſo groß als die Unterſchiede jener ſind. Um die Tangenten der in der Mitte zwiſchen ihnen liegenden Winkel auch zu finden, dient folgende Formel für die Tangenten dreyer Winkel, A, B, C, die in arithmetiſcher Proportion ſtehen, (Goniometrie, III.),

$$\text{tang}\,B=\tfrac{1}{2}(\text{tg}\,A+\text{tg}\,C)-\frac{\text{tg}\,B.\,\sin(B-A)^2}{\text{coſ}\,A.\,\text{coſ}\,C}.$$

In dem zweyten Terminus des zweyten Theils mag man, wegen des kleinen Factors, $\sin(B-A)^2$, für den Factor tang B nur einen nahe kommenden Werth aus den ſchon berechneten Tafeln ſetzen.

Da die Cotangenten kleiner Winkel, oder die Tangenten der von einem Rechten wenig verſchiedenen Winkel, groß ſind, und ſchnell ſehr anwachſen, ſo iſt die Interpolation bey ihnen weniger ſicher, wenn nicht die Glieder, zwiſchen welchen die Einſchaltung vorgenommen wird, weit genug berechnet werden. Ein Hülfsmittel gewährt die Formel,

$$\cot A = 2 \cot 2A + \operatorname{tang} A,$$

da die $\cot 2A$ ſich leichter mit Sicherheit finden läßt, als $\cot A$. Dieſe Formel, oder die ihr gleichgültige,

$$\operatorname{tang}(\tfrac{1}{2}R + A) - \operatorname{tang}(\tfrac{1}{2}R - A) = 2 \operatorname{tang} 2A,$$

iſt dadurch ſehr brauchbar, daß ſie bey der gleich vorher angewieſenen Interpolation einer Tangente zwiſchen zwey andern gegebenen die Anzahl der dadurch zu findenden Tangenten auf die Hälfte herunter bringt.

Die Secanten und Coſecanten werden leicht durch Addition und Subtraction gefunden. Es iſt, (Goniometrie, 43. 44.),

$$\sec 2A = \operatorname{tang} 2A + \operatorname{tang}(45^\circ - A),$$
$$\operatorname{cosec} 2A = \cot 2A + \operatorname{tang} A.$$

Setzt man für A eine arithmetiſche Reihe von Werthen, ſo werden für die Winkel der Secanten die Unterſchiede doppelt ſo groß als in jener. Dieſe Unterſchiede zu halbiren, dient die Formel,

$$\sec B = \tfrac{1}{2}(\sec A + \sec C)$$
$$- \sec A . \sec B . \sec C (1 + 2\cos(B - A) - \cos 2B) \times \sin \tfrac{1}{2}(B - A)^2,$$

wo A, B, C, in arithmetiſcher Proportion ſind. In dem zweyten Terminus der Formel mag für $\sec B$ der erſte Terminus geſetzt, oder der Werth aus den ſchon berechneten Tafeln genommen werden, ſo weit ihn dieſe liefern.

Aus dieſer Behandlung der cyklometriſchen Reihen ſieht man, wie mancherley Veranſtaltungen erforderlich ſeyn können, um eine analytiſche Reihe zum genauen arithmetiſchen Gebrauch zuzurichten.

Zur Erſparung der Multiplication und Diviſion mit den großen trigonometriſchen Zahlen erdachte Neper (John Napier, Baron von Merchiſton in Schottland) ſeine Logarithmen, die er 1614 bekannt machte. Er ſetzte den Sinus totus = 10 Millionen, deſſen Logarithmus = 0, den Logarithmen der Zahl 9999999 zwiſchen 1,0000001, und 1,0000000. In der Tafel iſt 1 als Logarithme von sin 89° 59′ angeſetzt, weil die Winkel nur nach ganzen Minuten fortgehen. Der Logarithme des sin 30° oder von 5000000 iſt bey ihm 6931469, der in dem gegenwärtig üblichen Syſtem iſt —0,3010300, wofür deſſen Complement 9,6989700 in unſern Tafeln ſteht. Das Neperſche Syſtem von Logarithmen iſt das der natürlichen mit einer gewiſſen Abänderung. Briggs nahm das Verhältniß 1:10 zum Grundverhältniſſe, ſo daß er zuerſt den Logarithmen von $\frac{1}{10}$ gleich Eins ſetzte, hernach aber log 10 = 1 nahm. Er berechnete nach dieſem Syſtem eine Tafel der logarithmiſchen Sinus und Tangenten für alle Hunderttheile jedes Grades bis zur vierzehnten Decimalſtelle, und eine Tafel der natürlichen Sinus bis zur funfzehnten, der Tangenten und Secanten bis zur zehnten Stelle Dieſe Tafeln ſind zu Gouda, in Adrians Vlacq Verlage gedruckt, und erſchienen daſelbſt 1633 in Folio, unter dem Titel, Trigonometria Britannica. Es iſt kein zweyter Abdruck, wie Montücla in der Geſch. der Mathem. II. Th. 27 S. ſagt. Briggs begleitete die Tafeln mit einem ausführlichen Unterrichte von der Verfertigung des Canons ſowohl der trigonometriſchen Linien als ihrer Logarithmen. Der Tod übereilte ihn, da er noch den Unterricht von dem Gebrauche und der Anwendung der Tafeln beyfügen wollte. Dieſes leiſtete an ſeiner Stelle Heinrich Gellibrand, Profeſſor der Aſtronomie an dem Greshamiſchen Collegium zu London, der auf dem Titel als Herausgeber des Werks genannt iſt.

Adrian Vlacq, der die von Briggs gelaſſene Lücke in den Logarithmen der Zahlen von 20000, bis 90000 ausfüllte, und die Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 100000 bis auf die zehnte Decimalſtelle in der Arithme-

tica logarithmica, Goudae 1628, fol. 2te Ausgabe lieferte, fügte dieſer die Logarithmen der Sinus, Tangenten und Secanten, bis zur zehnten Decimalſtelle, für einzelne Minuten, bey. In demſelben Jahre, 1633, in welchem die Trigonometria Britannica erſchien, gab er einen großen logarithmiſchen Canon der Dreyecke heraus, worin die Logarithmen der Sinus und Tangenten von 10 zu 10 Secunden auf zehn Decimalſtellen enthalten ſind, unter dem Titel: Trigonometria artificialis, ſive magnus Canon triangulorum logarithmicus, etc. Der Canon des Rhäticus iſt dabey zum Grunde gelegt. Wo dieſer in den letzten Ziffern Unrichtigkeiten hat, könnten die darauf ſich beziehenden Logarithmen auch fehlerhaft ſeyn. Die Einleitung iſt faſt ganz aus der Briggiſch-Gellibrandiſchen Ausgabe genommen.

Die beiden großen und ſeltenen Werke von Blacq hat Vega in einer verbeſſerten, neu geordneten und vermehrten ſchönen Ausgabe wieder abdrucken laſſen, mit einer Einleitung, worin die neuere Berechnungsart der Logarithmen gezeigt wird, Leipzig 1794, fol. In den beiden erſten und letzten Graden des Quadranten gehen die Logarithmen durch alle einzelne Secunden. Das Werk verdient den Titel: Theſaurus Logarithmorum completus.

Für die Logarithmen der Sinus und Coſinus, ſowohl die natürlichen als gemeinen tabulariſchen, hat Euler in der Introd. in Anal Infin. C. XI. ähnliche numeriſche Formeln wie für die Sinus und Coſinus ſelbſt geliefert. Es ſind die entwickelten Formeln in Cyklometrie. (36, 37.).

$$\text{Log. tabul. sin Arc.}\ \frac{m}{n}\cdot 90° =$$

$$\begin{aligned}
& l\,m + l(2n - m) + l(2n + m) - 3\,l\,n \\
& + \quad 9,594059\ 885702 \\
& - \frac{m^2}{n^2} \cdot 0,070022\ 826605. \\
& - \frac{m^4}{n^4} \cdot 0,001117\ 266441. \\
& - \frac{m^6}{n^6} \cdot 0,000039\ 229146 \\
& - \frac{m^8}{n^8} \cdot 0,000001\ 729270. \\
& - \frac{m^{10}}{n^{10}} \cdot 0,000000\ 084362. \\
& - \frac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0,000000\ 004348. \\
& - \text{etc.}
\end{aligned}$$

Zweytens iſt

$$\text{Log. tabul. coſ. Arc.}\ \frac{m}{n}\cdot 90° =$$

$$\begin{aligned}
& l(n - m) + l(n + m) - 2\,l\,n \\
& + \quad 10,000000\ 000000 \\
& - \frac{m^2}{n^2} \cdot 0,101494\ 859341. \\
& - \frac{m^4}{n^4} \cdot 0,003187\ 294065 \\
& - \frac{m^6}{n^6} \cdot 0,000209\ 485800 \\
& - \frac{m^8}{n^8} \cdot 0,000016\ 848348. \\
& - \frac{m^{10}}{n^{10}} \cdot 0,000001\ 480193.
\end{aligned}$$

$$-\frac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0{,}000000\ 136502$$

$$-\frac{m^{14}}{n^{14}} \cdot 0{,}000000\ 012981.$$

$$-\frac{m^{16}}{n^{16}} \cdot 0{,}000000\ 001261$$

— etc.

Der Punct am Ende bedeutet, daß die folgenden Ziffern mehr als 5 in der 13ten Stelle betragen. Der Charakteriſtik ſind 10 geliehen, wie gewöhnlich iſt.

Euler hat dieſe Logarithmen bis zur 15ten Decimalſtelle berechnet. In den Tables portatives de Logarithmes, par Callet, à Paris 1795, ſind ſie bis zur 20ſten aufgeführt. Eben daſelbſt ſind dieſe numeriſchen Formeln auch nach den analytiſchen in Cyklometrie (40.), und noch nach drey auf ähnliche Art convergirend gemachten, berechnet mitgetheilt, jede auf 20 Decimalſtellen. Ich ſetze zur Vergleichung das vierte Paar dieſer Formeln her, bis zur 12ten Decimalſtelle, und bis zur achten Potenz von $\frac{m}{n}$.

$$\text{Log.}\sin\frac{m\pi}{2n} = l\,m + l(2n-m) + l(2n+m)$$
$$+ l(4n-m) + l(4n+m) + l(6n-m)$$
$$+ l(6n+m) + l(8n-m) + l(8n+m)$$
$$+ l(10n-m) + l(10n+m) - 11\,l\,n$$

$$+ \quad 3{,}02745\ 74282\ 95$$

$$-\frac{m^2}{n^2} \cdot 0{,}01968\ 68907\ 79.$$

$$-\frac{m^4}{n^4} \cdot 0{,}00002\ 67539\ 61$$

$$-\frac{m^6}{n^6} \cdot 0{,}00000\ 00863\ 59.$$

$$-\frac{m^8}{n^8} \cdot 0{,}00000\ 00003\ 69.$$

— etc.

$$\text{Log. cof}\,\frac{m\pi}{2n} = l(n-m) + l(n+m) + l(3n-m)$$
$$+ l(3n+m) + l(5n-m) + l(5n+m) + l(7n-m)$$
$$+ l(7n+m) + l(9n-m) + l(9n+m)$$
$$- 10\,l\,n$$
$$+ \quad 4{,}04913\ 63829\ 81$$
$$- \frac{m^2}{n^2} \cdot 0{,}02164\ 33246\ 69.$$
$$- \frac{m^4}{n^4} \cdot 0{,}00003\ 54913\ 42.$$
$$- \frac{m^6}{n^6} \cdot 0{,}00000\ 01379\ 59.$$
$$- \frac{m^8}{n^8} \cdot 0{,}00000\ 00007\ 09.$$

Die abgeſonderten Logarithmen machen die Rechnung bey kleinern Winkeln beſchwerlich, daher dieſe letztern Formeln nur bey größern Winkeln zu gebrauchen ſind.

Nach dieſen Formeln kann man nun die Logarithmen der Sinus und Coſinus, deren Winkel eine arithmetiſche Reihe ausmachen, berechnen, und je zwey auf einander folgende ſo nahe bringen, daß die Reihe, oder ein Stück derſelben, bis zu einer gewiſſen Stelle der Decimalen eine arithmetiſche der dritten oder zweyten Ordnung ſey, deren dritte oder zweyte Unterſchiede bis dahin beſtändig ſind. Darauf nehme man das Interpoliren vor, wie bey den Sinus und Coſinus ſelbſt angewieſen iſt. Wo die Formeln die Arbeit zu langwierig machen möchten, ſuche man die Logarithmen unmittelbar aus den Zahlwerthen der Sinus und Coſinus. Dazu wird in dem Artikel, Logarithme, für große Zahlen Anleitung gegeben.

Man hat nur nöthig die Logarithmen der Sinus und Coſinus in dem erſten Drittheil des Quadranten zu berechnen. Denn da $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$ iſt, ſo iſt . . . $\log.\sin 2A = \log.\sin A + \log.\cos A + \log. 2$. Aber man muß in dem erſten Drittheil von doppelt ſo vielen Sinus

und Coſinus die Logarithmen berechnet haben, als in dem zweyten Drittheil ſollen gefunden werden, oder in dieſem ſich durch die Interpolation helfen können.

Die Logarithmen der Sinus und Coſinus kann man durch dieſe ſelbſt oder andere goniometriſche Functionen interpoliren. Es ſeyn A, B, C, drey Winkel in arithmetiſcher zunehmender Proportion, ſo iſt aus Goniometrie (28.)

$$\sin C = 2 \sin B . \cos(B - A) - \sin A.$$

Man ſetze $2 \sin B . \cos(B - A) = p$; $\sin A = q$, ſo iſt

$$\log. \sin C = \log. (p - q) = \log. q + \log. \left(\frac{p}{q} - 1\right).$$

Man mache $\frac{p}{q} - 1 = \frac{1+y}{1-y}$, ſo iſt

$$\log. \text{nat.} \left(\frac{p}{q} - 1\right) = 2\left(y + \tfrac{1}{3}y^3 + \tfrac{1}{5}y^5 + \text{etc.}\right),$$ (ſ. Logarithmen). Jene Gleichung giebt $\frac{p}{q} = \frac{2}{1-y}$, oder

$1 - y = \frac{2q}{p}$, und $y = \frac{p - 2q}{p} = \frac{\sin C - \sin A}{\sin C + \sin A}$

$= \frac{\text{tg}\,\frac{1}{2}(C - A)}{\text{tg}\,\frac{1}{2}(C + A)}$, oder $y = \text{tg}(B - A). \cot B$. Folglich iſt

$$\log. \text{nat.} \sin C = \log. \text{nat.} \sin A + 2\left(y + \tfrac{1}{3}y^3 + \tfrac{1}{5}y^5 + \text{etc.}\right).$$

Zweytens, es iſt aus Goniometrie (28.)

$$\cos C = 2 \cos B . \cos(B - A) - \cos A.$$

In der vorhergehenden Rechnung vertauſche man die Sinus der Winkel mit den Coſinus, und y mit $-z$, ſo iſt

$$z = \frac{\cos A - \cos C}{\cos A + \cos C} = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(C - A). \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(C + A),$$

oder $z = \text{tang}(B - A). \text{tg}\, B$, und

$$\log. \text{nat.} \cos C = \log. \text{nat.} \cos A - 2\left(z + \tfrac{1}{3}z^3 + \tfrac{1}{5}z^5 + \text{etc.}\right).$$

Bey dieſen Rechnungen iſt zu bemerken, daß die Logarithmen der Sinus und Coſinus, als eigentlicher Brüche, negativ ſind, und daß der Logarithmus eines kleinern Bruchs, der Quantität nach größer iſt, als der eines größern Bruchs. Daher iſt in der Rechnung für die Sinus, $\log\left(\frac{p}{q} - 1\right)$ poſitiv, und $\frac{p}{q} - 1$ größer als die Einheit, ſo daß dieſe Größe durch die Form $\frac{1+y}{1-y}$ dargeſtellt werden konnte. Hingegen in der Rechnung für die Coſinus iſt $\log\left(\frac{p}{q} - 1\right)$ negativ, alſo $\frac{p}{q} - 1$ kleiner als die Einheit, weswegen dieſe Größe die Form . . . $\frac{1-z}{1+z}$ erhalten muß, wenn z einen poſitiven Werth erhalten ſoll.

Da die Logarithmen in beiden Formeln die natürlichen ſind, ſo hat man noch dieſe mit dem Modulus des Briggiſchen Syſtems zu multipliciren. Dieſer iſt . . . . $= 0,43429448190 \ldots = M$. Dadurch wird

$$\text{log. tab. sin}\, C = \text{log. tab. sin}\, A + 2M\left(y + \tfrac{1}{3}y^3 + \tfrac{1}{5}y^5 + \text{etc.}\right).$$

$$\text{log. tab. coſ}\, C = \text{log. tab. coſ}\, A - 2M\left(z + \tfrac{1}{3}z^3 + \tfrac{1}{5}z^5 + \text{etc.}\right).$$

Hat man eine Reihe von Logarithmen der Sinus und Coſinus, deren Winkel in arithmetiſcher Progreſſion ſind, aus den angeführten Formeln oder unmittelbar aus den Zahlwerthen berechnet, ſo kann man durch Hülfe dieſer Formeln die erſte Einſchaltung vornehmen. Es müſſen nur y und z ſo klein ſeyn, daß man ſie ſelbſt und ihre Potenzen durch Hülfe der Logarithmen mit der erforderlichen Genauigkeit berechnen könne. Die Multiplication mit 2 M iſt leicht, da man ſich dazu eine Tafel der Vielfachen dieſes beſtändigen Factors verfertigen kann. Die urſprünglichen Glieder der Reihen können zur Probe der Rechnung dienen, die in einer ſucceſſiven Herleitung jedes Logarithmen aus vorhergehenden beſteht.

Exempel. Es ſey aus log. sin 10° 0′ der log. 10° 20′ herzuleiten. Hier iſt A = 10°; B = 10° 10′; C = 10° 20′. Aus dem Vegaiſchen Theſauro Logarithmorum iſt

$$\begin{array}{rcl} \text{log. tab. tang. } 10 & = & 7,\ 46372\ 73420 - 10 \\ \text{log. cot. } 10°\ 10' & = & 10,\ 74635\ 22558 - 10 \\ \hline \log y & = & 8,\ 21007\ 95978 - 10 \\ \log y^3 & = & 4,\ 63023\ 88 \quad - 10 \\ \log y^5 & = & 1,\ 05039 \quad - 10 \end{array}$$

Daher

$$\begin{array}{rcl} y & = & 0,\ 01622\ 10737\ 1 \\ y^3 & = & 0,\ 00000\ 42681\ 4 \\ y^5 & = & 0,\ 00000\ 00011\ 2 \end{array}$$

$$2M(y + \tfrac{1}{3}y^3 + \tfrac{1}{5}y^5) = 0,01409\ 06815$$

$$\begin{array}{rcl} \log \sin 10° & = & 9,\ 23967\ 02300 - 10 \\ \hline \log \sin 10°\ 20' & = & 9,\ 25376\ 09115 - 10 \end{array}$$

welcher von dem in den Tafeln nur um + 1 in der letzten Ziffer verſchieden iſt. Die Zahl y iſt aus ihrem Logarithmen durch einfache Proportionaltheile gefunden. Die zweyten Unterſchiede der Logarithmen haben in dieſem Falle keinen Einfluß auf die 10te Decimalſtelle.

Die in Frankreich nach der Decimal-Eintheilung des Quadranten berechneten trigonometriſchen Tafeln haben den Titel: Tables trigonométriques décimales, ou Table des logarithmes des ſinus, ſécantes et tangentes, ſuivant la diviſion du Quart de cercle en 10 degrés, du degré en 100 minutes, et de la minute en 100 ſécondes, précédées de la Table des logarithmes des nombres depuis dix mille juſqu'à cent mille, et de pluſieurs tables ſubſidiaires: calculées par Ch. Borda, revues, augmentées et publiées par J. B. J. Delambre. A Paris, An IX. in 4. 51 Bogen. Die trigonometriſchen Tafeln gehen in den drey erſten Decimalgraden durch alle Zehner von Secunden, wie die von Hobert und Ideler herausgegebenen; in den folgenden durch einzelne Minuten, auch wie jene. Sie enthalten aber noch die Proportionaltheile für die einzelnen

Secunden in den drey erſten Graden, und für Zehner von Secunden in den übrigen; zugleich mit den Logarithmen der Secanten und Coſecanten, welche in den Berliniſchen Tafeln das Format beyzufügen nicht erlaubte. In dieſen ſind bloß die ganzen Unterſchiede der Logarithmen beygefügt. Dagegen enthalten eben dieſelben die natürlichen Sinus und Tangenten ſelbſt, die oft gebraucht werden, und in der franzöſiſchen Ausgabe zum Nachtheil des Werks fehlen. Die Logarithmen gehen in dieſer bis zu der ſiebenten Decimalſtelle, wie in der deutſchen Ausgabe; es iſt aber eine wichtige Hülfstafel beygefügt, welche die Logarithmen der Sinus und Tangenten von 10 zu 10 Secunden bis zu der zehnten Minute, und dann von 10 zu 10 Minuten bis auf die eilfte Decimalſtelle liefert. Dieſe dient den Logarithmen eines Sinus oder einer Tangente bis auf die zehnte Decimalſtelle zu finden. Borda verſtarb, wie Briggs, in der Zeit, da er die Vorrede und Einleitung aufſetzte. Dieſe hat Delambre, der erſte Rechner in Frankreich, vollendet. Sie iſt ſehr lehrreich, und enthält theils eine Methode, die Logarithmen der trigonometriſchen Linien und der Zahlen zu berechnen, theils eine Sammlung von bequemen Formeln zur Berechnuug ſphäriſcher Dreyecke.

Das Verfahren, welches Delambre zur Berechnung der Logarithmen der trigonometriſchen Linien angiebt, iſt folgendes. Zuerſt giebt er eine Reihe für log. sin. φ; log. coſ φ, und log. tang φ. Dieſe ſind die in Cyklometrie (23, 24, 25) angegebenen. Er findet ſie aber auf eine andere Art, nämlich aus den Werthen der Sinus und Coſinus, mittelſt der Formel,

$$\log.\text{nat.}(1 - x) = -x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 - \text{etc.}$$

Durch dieſe Reihen ſollen die Logarithmen der Sinus und Coſinus bis zum fünften Grade berechnet werden. Die Logarithmen der Sinus größerer Winkel werden nach der Reihe durch eine der folgenden beiden Formeln gefunden, worin M der Modulus des briggiſchen Syſtems iſt.

$$l\sin(\varphi + \omega) = l\sin\varphi + l\cos\omega + M[\cot\varphi.\tang\omega - \tfrac{1}{2}\cot\varphi^2.\tang\omega^2 + \tfrac{1}{3}\cot\varphi^3.\tang\omega^3 - \text{etc.}];$$

und

$$l\sin(\varphi + \omega) = l\sin\varphi + 2M[\cot(\varphi + \tfrac{1}{2}\omega).\, tg\tfrac{1}{2}\omega + \tfrac{1}{3}\cot(\varphi + \tfrac{1}{2}\omega)^3.\, tg\tfrac{1}{2}\omega^3 + \tfrac{1}{5}\cot(\varphi + \tfrac{1}{2}\omega)^5.\, tg\tfrac{1}{2}\omega^5 + \text{etc.}].$$

Die zweyte iſt diejenige, welche ich ſchon oben zur Berechnung der Logarithmen der Sinus angegeben habe. Die erſte beruht auf der Formel,

$$\sin(\varphi + \omega) = \sin\varphi.\, \mathrm{coſ}\,\omega + \mathrm{coſ}\,\varphi.\, \sin\omega$$
$$= \sin\varphi.\, \mathrm{coſ}\,\omega\,(1 + \cot\varphi.\, \mathrm{tang}\,\omega).$$

Aus dieſer iſt

$$l\sin(\varphi + \omega) = l\sin\varphi + \log\mathrm{coſ}\,\omega + l(1 + \cot\varphi.\, tg\,\omega).$$

er dritte Terminus wird in eine Reihe entwickelt, nach der Formel, $\log\mathrm{nat}(1 + x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \text{etc.}$ wozu denn noch der Modulus der tabulariſchen Logarithmen als Factor zu ſetzen iſt.

Mittelſt der Formel, $\sin 2A = 2\sin A.\,\mathrm{coſ}\,A$, wird aus dem Logarithmen des Sinus und Coſinus eines Winkels der Logarithme des Sinus des doppelten Winkels gefunden. Zugleich findet man den Logarithmen des Coſinus dieſes Winkels vermittelſt einer der Formeln,

$$\mathrm{coſ}\,A^2 = 1 - \sin A^2$$
$$\mathrm{coſ}\,2A = 1 - 2\sin A^2$$
$$\mathrm{coſ}\,2A = \frac{1 - \mathrm{tang}\,A^2}{1 + \mathrm{tang}\,A^2};$$

und der Formel, $\log(1 - x) = -x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \text{etc.}$ Man kann dadurch die logarithmiſchen Sinus für alle Decimalgrade finden, indem man durch fortgeſetzte Halbtheilung bis zu einem Winkel gelangen kann, der klein genug iſt, um die Reihe für den Logarithmen des Sinus und Coſinus ſehr convergirend zu machen, woraus man dann ſucceſſiv durch die Sinus der mittlern Winkel zu dem Sinus des gegebenen gelangt.

Zur Interpolation der Logarithmen, wo die vierten Differenzen ſo klein ſind, und ſich ſo wenig verändern, daß man ſie als unveränderlich anſehen kann, gebraucht Delambre allgemeine Formeln, die aber doch nicht bequem genug ſind, und auf eine mühſame Art gefunden werden.

Die folgenden Formeln ſind leicht gefunden, (Differenzenrechnung, 48.), und leicht anwendbar.

Die Reihe der Winkel ſey φ; $\varphi + \omega$; $\varphi + 2\omega$; $\varphi + 3\omega$; u. ſ. f. ſo iſt das erſte Glied der erſten Differenzreihe von den Logarithmen der Sinus, oder

$$\Delta \log.\text{nat.} \sin\varphi = \cot\varphi . \omega - \frac{1}{2\sin\varphi^2}\omega^2 + \frac{\cos\varphi}{3\sin\varphi^3}\omega^3 - \frac{2+\cos 2\varphi}{12\sin\varphi^4}\omega^4 + \frac{(5+\cos 2\varphi)\cos\varphi}{30\sin\varphi^5}\omega^5 - \text{etc.}$$

Bezeichnet man die Coefficienten von ω durch α, β, γ, δ, ε, etc. ſo ſind die Anfangsglieder der zweyten und folgenden Differenzreihen,

$$\Delta^2 \log\sin\varphi = 2\beta\omega^2 + 6\gamma\omega^3 + 14\delta\omega^4 + 30\varepsilon\omega^5 + \text{etc.}$$
$$\Delta^3 \log\sin\varphi = 6\gamma\omega^3 + 36\delta\omega^4 + 150\varepsilon\omega^5 + \text{etc.}$$
$$\Delta^4 \log\sin\varphi = 24\delta\omega^4 + 240\varepsilon\omega^5 + \text{etc.}$$
$$\Delta^5 \log\sin\varphi = 120\varepsilon\omega^5 + \text{etc.}$$

etc.

Für die tabulariſchen Logarithmen iſt mit dem Modulus derſelben, $M = 0,43429\ 44819$ . . zu multipliciren. Es iſt $\log M = 9,6377743 - 10$.

Exempel. Es ſey $\varphi = 42$ Decimalgrade und . . $\omega = 1' = \frac{\pi}{20000}$. Man ſucht die Anfangsglieder der Differenzreihen der Logarithmen von $\sin 42°$; $\sin 42°\,1'$; $\sin 42°\,2'$; etc. bis auf die zehnte Demimalſtelle.

$lM =$	$9,6377843 - 10$	$lM =$	$9,63778 - 10$
$l\cot\varphi =$	$0,1103177$	$\omega l^2 =$	$2,39224 - 10$
$l\omega =$	$6,1961199 - 10$		$2,03002 - 10$
l. I.	$5,9442219 - 10$	$l2 =$	$0,30103$
		$l\sin\varphi^2 =$	$9,57479 - 10$
		l. II.	$2,15420 - 10$

$$\text{I.} = +0,0000879472.$$
$$\text{II.} = -0, \ldots\ldots\ 1426$$
$$\Delta \log. \sin 42^\circ = 0,0000879329.$$

Das Anfangsglied der zweyten Differenzreihe iſt . . . $= -0,000000285$.

Durch dieſelben Formel findet man auch die Anfangsglieder der Differenzreihen für die Logarithmen der Coſinus, aber für eine abnehmende Reihe von Winkeln; oder man muß, für eine wachſende Reihe den Unterſchied ω negativ nehmen.

Exempel. Man ſucht die Anfangsglieder der Logarithmen der Coſinus von 42°; 42° 1′; 42° 2′; etc. Es iſt nun $\varphi = 58^\circ$, und $\omega = -1'$. Dadurch

$$M \cot \varphi . \omega = -0,00005291594$$
$$-\frac{M\omega^2}{2 \sin \varphi^2} = -0, \ldots\ldots\ 858$$
$$\Delta \log. \cos 42^\circ = -0,00005292452$$
$$\Delta^2 \log. \cos 42^\circ = -0,00000001716.$$

Dieſe Rechnung ſtimmt mit den von Hobert und Ideler in der Einleitung zu ihren trigonometriſchen Tafeln, S. L. LI. gefundenen Differenzen bis zu der zehnten und eilften Decimalſtelle überein. Dort ſind die Differenzen aber nicht durch eine allgemeine Formel gefunden.

In den trigonometriſchen Tafeln iſt der Logarithmus des Halbmeſſers = 10 geſetzt. Man hat nämlich die trigonometriſchen Linien auf einen Halbmeſſer von 10000 Millionen Theilen bezogen, in den kleinern Tafeln aber von den Zahlwerthen die letztern drey Ziffern abgeſchnitten, die Kennziffer der Logarithmen aber noch nach der vollſtändigen Zahl eingerichtet. Gegenwärtig nimmt man den Halbmeſſer als Einheit, wodurch die Sinus, und die Tangenten unter 45 Gr. eigentliche Brüche ſind. Da die Logarithmen derſelben negativ ſind, ſo nimmt man ihr Complement zu 10, und bemerkt entweder ausdrücklich, oder in Gedanken, daß 10 wieder abzuziehen ſind. Z. B. es iſt $\sin 25^\circ = 0,4226183$, oder genauer 0,4226183013, und $\log. \sin 25^\circ = 9,6259483 - 10$, anſtatt . . . . $-0,3740517$. Der erſte Theil des Logarithmen iſt der

Logarithme eines Zählers, 4226183013, die ſubtractive 10 iſt der Logarithme des Nenners 10000 Millionen. Gewöhnlich braucht man die ſubtractive 10 nicht hin zu ſetzen.

Den Logarithmen der Tangenten über 45 Gr. und denen der Secanten die alle poſitiv ſind, giebt man der Gleichförmigkeit wegen auch zwey Theile, wovon der eine die ſubtractive 10 iſt. Z. E. es iſt tang 70° = 2,7474774, und log. tang 70° = 10, 4389341 — 10, wofür man auch ſetzen kann 0, 4389341.

In den Vegaiſchen kleinern Tafeln ſind die natürlichen Sinus und Tangenten als Bruchgrößen, eigentliche oder uneigentliche, angegeben, wie in den gleich vorher angeführten Beyſpielen. In den mehreſten Tafeln erſcheinen ſie wie ganze Zahlen. Von dieſen hat man, wenn der Sinus totus 10 Mill. Theile hat, 7 Ziffern von der rechten nach der linken Hand als Decimaltheile abzuſchneiden. Z. B. wenn sin 30′ die Zahl 87265 hat, ſo iſt dafür zu ſetzen 0,0087265.

Die Tangenten und Secanten der Winkel, die nahe an 90° ſind, pflegen für einen kleinern Halbmeſſer als die übrigen angegeben zu werden, weil der Platz nicht alle Ziffern faßt, und bey großen Zahlen die Zehnmillionentheilchen nicht in Betracht kommen mögen. In den Sherwinſchen Tafeln iſt dieſes auf folgende Art bemerklich gemacht. In den Zahlwerthen aller trigonometriſchen Linien ſind drey Ziffern durch ein Komma am Ende abgeſchnitten, welches beym Ausſchreiben Verwechſelungen verhütet. Wo in dem gedachten Falle der Halbmeſſer nur eine Million Theile hat, ſind nur zwey Ziffern abgeſondert; für den Halbmeſſer = 100000 iſt nur eine abgeſondert, und für den Halbmeſſer 10000 iſt das Komma am Ende noch beygefügt. Die Charakteriſtik der Logarithmen bezieht ſich immer auf einen Halbmeſſer von 10000 Millionen, oder auf den Halbmeſſer als Einheit durch die Hinzufügung der Zehn. In deutſchen Ausgaben der Tafeln findet man oft zwey Ziffern abgeſchnitten, und in den großen Tangenten und Secanten eine Ziffer nach dem Puncte, oder einen Punct hinter die Zahl geſetzt.

Zu den vorzüglichſten Ausgaben trigonometriſcher Tafeln gehören auſſer den vorher ſchon angeführten

Sherwin's mathematical tables, the third edition, carefully reviſed and corrected by W. Gardiner. London 1742. gr. 8. Dieſe Ausgabe wird als ſehr genau gerühmt, wie ich ſie auch gefunden habe. Die letzte uud fünfte vom J. 1770, beſorgt von Clark, iſt äuſſerſt fehlerhaft gedruckt. Hutton ſagt, daß er einige tauſend Fehler darin angemerkt hat.

Gardiner gab auch 1742 zu London in groß Quart heraus: Tables of Logarithms, for all numbres from 1 to 102100, and for the ſines and tangent, to every ten ſeconds of each degree in the quadrant, as alſo for the ſines of the firſt 72 minutes to every ſingle ſecond, with other uſeful and neceſſary tables. Von dieſen Tafeln iſt nur eine kleine Anzahl Abdrücke gemacht, und bloß auf Unterzeichnung, daher ſind ſie ſehr ſelten. Sie werden wegen ihrer Genauigkeit und Brauchbarkeit ungemein hoch geſchätzt. (Hutton in der Einleitung zu ſeinen mathematiſchen Tafeln). Käſtner hält dieſe Sammlung irrig für eine zweyte Ausgabe der Sammlung in Octav, weil er die letztere bloß aus Karſtens Lehrbegriff kannte. Aſtron. Abh. II Samml. S. 17.

Ein ſauberer Abdruck dieſer größern Gardinerſchen Tafeln iſt zu Avignon 1770 veranſtaltet. In dieſem ſind die logarithmiſchen Sinus und Tangenten für alle Secunden der erſten vier Grade, von Mouton berechnet, beygefügt. (Käſtners aſtron. Abhandl. 2te Samml. S. 19.). In Frankreich geſteht man, daß dieſe Ausgabe nicht ſo correct ſey, als die engliſche.

Schulze Sammlung logarithmiſcher, trigonometriſcher, und anderer zum Gebrauch der Mathematik unentbehrlichen Tafeln. Berlin, 1778. 2 Bände, gr. 8. Darin ſind die Logarithmen der Sinus und Tangenten in den beiden erſten Graden von Secunde zu Secunde. Auch ſind den Briggiſchen Logarithmen die Neperiſchen aus Urſins großem Canon beygefügt. Dieſe und die trigonometriſchen Linien gehen in den vier erſten und vier letzten

Graden durch Zehner von Secunden, in den übrigen durch einzelne Minuten.

Der zu früh den mathematiſchen Wiſſenſchaften entriſſene Vega hat ſich durch verſchiedene bequeme und ſehr genaue Ausgaben logarithmiſcher und trigonometriſcher Tafeln ſehr verdient gemacht. Die erſte, Wien 1783, enthält alles weſentliche aus Sherwins Tafeln, und dazu noch in den erſten und letzten fünf Graden die Logarithmen der trigonometriſchen Größen für Zehner von Secunden. Das logarithmiſch-trigonometriſche Handbuch, Leipzig 1793, enthält eben das, nur nicht die trigonometriſchen Größen ſelbſt. Eine vollſtändigere Ausgabe iſt zu Leipzig 1797 in zwey Bänden, groß Octav, herausgekommen, von welchen der zweyte verſchiedene Logarithmiſche, aſtronomiſche und analytiſche Tafeln oder Formeln enthält. Die große Sammlung in Folio iſt oben angeführt.

Eine ſehr genaue, bequem eingerichtete und ſauber gedruckte Sammlung ſind: Tables portatives de Logarithmes, par François Callet. Edition ſtéréotype, à Paris (1795) An IX, aus Didots Druckerey. Callet hat ſchon 1783 eine bequeme Ausgabe der größern Gardinerſchen Tafeln beſorgt, in Jomberts Verlage aus Didots, des Vaters, Druckerey. (Käſtners geom. Abh. I. S. 483.) Da eine Auflage von 6000 Exemplaren zu Ende gieng, ſo war der jüngere Didot auf eine Einrichtung bedacht, wodurch mit der Zeit ein vollkommen fehlerfreyer Druck zu erhalten ſtünde, und fiel auf das Mittel, den ganzen Satz unverrückbar zu machen, indem die Buchſtaben zu einer Maſſe mit einander verbunden werden. Daher die Benennung édition ſtéréotype. Die nach und nach entdeckten Fehler werden abgeändert, ohne daß neue Fehler, wie bey einem neuen Satze unvermeidlich iſt, ſich einſchleichen. Den Beſitzern der vorhergegangenen Abdrücke werden ſie in gelehrten Zeitſchriften oder auf andere Art bekannt gemacht. — In den erſten fünf Graden ſind die Logarithmen der Sinus und Tangenten für alle Secunden, überhaupt von 10 zu 10 Secunden der Sexageſimal-Eintheilung auf ſieben Decimalſtellen geliefert. Ferner ſind

die Logarithmen der Sinus und Tangenten von Minute zu Minute nach der Centeſimal-Eintheilung des Quadranten bis zur ſiebenten Decimalſtelle beygefügt; dann noch die natürlichen Sinus für alle Zehntheile der Decimalgrade mit ihren Logarithmen; beides auf 15 Decimalſtellen, zum Gebrauch beym Einſchalten, um die Sinus oder ihre Logarithmen für jeden Winkel eben ſo weit zu erhalten. Um die Interpolation bey ungleichförmigen Differenzen bequemer und ſicherer zu machen, iſt eine Verbindung zwiſchen der Tafel der Logarithmen der Zahlen und der trigonometriſchen gemacht. Dieſe beruht darauf, daß kleine Winkel ſich ſehr nahe wie ihre Sinus oder Tangenten verhalten. Die erſte Zahl auf einer Seite der Tafel mit den Logarithmen der Zahlen ſey n, ſo iſt über derſelben beygefügt $\log \frac{\sin n''}{n''}$, und $\log \frac{\text{tang}\, n''}{n''}$, nebſt den Variationen dieſer Logarithmen für die Zunahme 10 der Zahl n. Man kann ſich dieſes Verfahrens faſt eben ſo leicht bey jeder andern Ausgabe von Tafeln bedienen. Sind n und n + p die Zahlen der Secunden zweyer kleinen Winkel, ſo iſt $\sin(n+p) = \frac{n+p}{n} \sin n$ nahe, ſo daß log. sin (n + p) gefunden wird, wenn log. sin. n aus den Tafeln genommen wird.

Hutton ward durch die äußerſt fehlerhafte fünfte Ausgabe von Sherwins Tafeln veranlaßt, eine neue dieſer Art zu veranſtalten, die 1785 zu London bey Robinſon gedruckt iſt. In der Einleitung iſt eine Geſchichte der trigonometriſchen Tafeln und der Logarithmen enthalten, beſonders aber eine ausführliche Darſtellung aller Methoden, deren man ſich zur Berechnung der Logarithmen bedient hat. Dieſe Einleitung iſt mit der Vorrede in der von Maseres veranſtalteten großen Sammlung von logarithmiſchen Schriften eingerückt, T. I. pag. I—CXXI.

Viele litterariſche Nachrichten und kleine Auszüge über den Gegenſtand dieſes und des vorhergehenden Artikels finden ſich in Pfleiderers ebenen Trigonometrie, Tübingen 1802.

Cylinder iſt ein geometriſcher Körper, der zwiſchen zwey gleichen, ſich parallelen Kreisflächen, und einer von dieſen begränzten krummen Fläche enthalten iſt. Die letztere wird von einer geraden Linie beſchrieben, welche mit ihren Endpuncten auf dem Umfange der beiden Kreiſe, parallel der Linie durch ihre Mittelpuncte, herumgeführt wird.

Die Linie durch die Mittelpuncte der beiden Kreiſe heißt die Axe des Cylinders; die beiden Kreisflächen heißen die **Grundflächen.**

Wenn die Axe ſenkrecht auf die Grundfläche ſteht, ſo heißt der Cylinder ein **ſenkrechter** (rectus); iſt ſie gegen die Grundflächen geneigt, ſo iſt es ein **ſchiefer** (ſcalenus). Der ſenkrechte Cylinder wird durch die Umdrehung eines Rechtecks um eine ſeiner Seiten beſchrieben. Dieſes iſt die Erklärung, die Euklides giebt, da er nur den ſenkrechten Cylinder betrachtet. Wenn ein ſchiefwinklichtes Parallelogramm ſich um eine ſeiner Seiten dreht, ſo beſchreibt zwar die derſelben parallele Seite eine cylindriſche krumme Fläche, wie an dem ſenkrechten Cylinder, allein anſtatt der ebenen Kreisflächen wird der Körper von zwey Kegelflächen begränzt. Die krumme Oberfläche des ſchiefen Cylinders iſt von jener ganz verſchieden.

Der Durchſchnitt des Cylinders mit einer den Grundflächen parallelen Ebene iſt ein Kreis, ſo groß als eine der Grundflächen. Geht die ſchneidende Ebene durch die Axe, oder iſt ſie einer durch die Axe gelegten Ebene parallel, ſo iſt der Durchſchnitt ein Parallelogramm. In jeder andern Lage der ſchneidenden Ebene, iſt der Durchſchnitt eines ſenkrechten Cylinders mit derſelben eine Ellipſe, und, einen beſondern Fall ausgenommen, auch in dem ſchiefen Cylinder.

Von den Durchſchnitten des Cylinders hat ein griechiſcher Mathematiker, Serenus aus Antiſſa auf der Inſel Lesbos, eine Abhandlung geſchrieben, die nebſt einer über die Schnitte des Kegels, einigen Ausgaben des großen Werks über die Kegelſchnitte von Apollonius beygefügt ſind, griechiſch und lateiniſch in der Halleyiſchen Ausgabe. Oxford 1710. fol.

Es ſey (Fig. 104. Tab. VII.) Ab ein Cylinder, deſſen Grundflächen ADBE, adbe ſind. Die Axe iſt Cc, durch welche das Parallelogramm ABba gelegt iſt, welches gegen die Grundfläche geneigt ſeyn mag, wenn die Axe gegen ſie geneigt iſt. Der Cylinder werde von einer durch die Linie FG gelegten Ebene geſchnitten, und der Durchſchnitt derſelben mit der Ebene der Grundfläche, IHI ſey ſenkrecht auf die Richtung des Durchmeſſers AB, nämlich auf die Linie ABH; oder man ziehe auf die Durchſchnittslinie IHI durch den Mittelpunct C die ſenkrechte ACBH, und lege durch AB und die Axe Cc das Parallelogramm ABba. Durch einen Punkt K der Linie FG führe man einen Schnitt parallel mit der Grundfläche. Dieſer iſt ein Kreis LNMN, deſſen Durchmeſſer der Durchſchnitt LM der Kreisfläche mit dem Pgrm Ab iſt. Er ſchneide den durch FG gelegten Schnitt in der Linie NKN. Dieſe Linie iſt parallel mit IHI, weil ſie dieſe nicht ſchneidet, da die Ebene LNMN mit der Grundfläche parallel iſt, und weil ſie zugleich mit ihr in derſelben Ebene, der durch FH und HI gelegten ſich befindet. Weil NKN mit IHI, und LM mit AH parallel ſind, ſo iſt der W. LKN = AHI, (Eucl. XI. 10); alſo iſt NKN ſenkrecht auf LM, und wird von dieſer in K halbirt, da LM ein Durchmeſſer des Kreiſes iſt. Vermöge einer Eigenſchaft des Kreiſes iſt KL.KM = KNqu. Man ziehe FO parallel mit LM, ſo iſt KF : KL = FG : FO, und KG : KM = FG : FO; alſo iſt . . . . . .

KF.KG : KL.KM = FGqu : FOqu. das iſt

KF.KG : KNqu = FGqu. : FOqu

= FGqu : ABqu. Dieſe Proportion gehört für eine Ellipſe, in welcher FG und AB conjugirte Durchmeſſer ſind, und NN eine zugehörige Doppel-Ordinate iſt, die wie alle ihr parallelen, von dem Durchmeſſer FG halbirt wird. Wenn das Parallelogramm Ab auf die Grundfläche ſenkrecht iſt, und der Schnitt durch FG ſenkrecht auf Ab iſt, ſo iſt der Durchſchnitt NN der beiden auf Ab ſenkrechten Ebenen ſenkrecht auf die Ebene von Ab, und daher ſenkrecht auf FG. In dieſem Falle iſt FG eine der

Axen der Ellipſe FNGN, und der Durchmeſſer des Kreiſes in der Grundfläche iſt die conjugirte Axe.

Wenn FG=FO, oder wenn der W. FOG=FGO iſt, und ſowohl die Ebene Ab ſenkrecht auf die Grundfläche, als der Schnitt ſenkrecht auf jene iſt, ſo iſt der Schnitt FNGN ein Kreis ſo groß als die Grundfläche. Dieſer Schnitt heißt der Wechſelſchnitt (ſectio ſubcontraria.)

Die Eigenſchaften des Kreiſes, welche die Verhältniſſe der darin gezogenen geraden Linien betreffen, laſſen ſich auf die Ellipſe übertragen, wenn man dieſe als eine Projection eines Kreiſes durch parallele Linien mit der Axe eines Cylinders auf eine gegen die Grundflächen geneigte Ebene betrachtet. Durch dieſe Projection giebt der Mittelpunct des Kreiſes in der Grundfläche den Mittelpunct der Ellipſe; zwey Durchmeſſer des Kreiſes, die auf einander ſenkrecht ſind, geben die conjugirten Durchmeſſer der Ellipſe; parallele Linien, in der Ebene des Kreiſes werden durch die Übertragung auf die Ellipſe parallele Linien, die ſich wie jene in in dem Kreiſe verhalten. Auf dieſe Art erweiſet Maclaurin in ſeinem Treatiſe on Fluxions, B I. ch. XIV. manche Eigenſchaften der Ellipſe. Hier folgen ein paar leichte Beyſpiele.

Es ſey AB (Fig. 105.) derjenige Durchmeſſer der Grundfläche des Cylinders, welcher mit der Axe in einer auf die Grundfläche ſenkrechten Ebene liegt, wenn der Cylinder kein ſenkrechter iſt. An den Umfang des Kreiſes ſey in E die berührende EF gezogen, welche der verlängerten AB in F begegne und ED ſey ſenkrecht auf AB. Der elliptiſche Schnitt ſey aeb. An dieſen ſind die mit der Axe Cc parallelen Aa, Dd, Bb, Ee, gezogen. Die Ebene durch EF und Ee berührt den Cylinder. Ihr Durchſchnitt mit der erweiterten Ebene AabB ſey Ff, ſo iſt Ff parallel mit Cc. Die Ebene durch abf und de ſchneide die Ebene EFfe in ef, ſo iſt ef eine berührende an der Ellipſe in e, welche die verlängerte Axe ab in f ſchneidet. Da die Ebene Ab ſenkrecht auf die Grundfläche ſteht, und in dieſer ED ſenkrecht auf AB iſt, ſo iſt die Ebene Ed ſenkrecht auf die Ebene Ab. Da der elliptiſche Schnitt auch darauf ſenkrecht iſt, ſo iſt die

Durchſchnittslinie beider Ebenen, ed, ſenkrecht auf die Ebene Ab, alſo ſenkrecht auf den Durchmeſſer Ab. Die Segmente der Linie AF ſind den gleichnamigen auf af proportional. Nun iſt in dem Kreiſe CD:DB=AD:DF, und CD:CB=CB:CF (ſ. Kreis); alſo iſt auch in der Ellipſe, cd:db=ad:df, und cd:cb=cb:cf, wo d der Punct iſt, in welchem die ſenkrechte von dem Berührungspuncte e die Axe trifft. (S. berühr. Linie, 8.)

In der Grundfläche ACBD eines Cylinders (Fig. 106.) ſey irgend eine AB gezogen, welche die beiden unter ſich parallelen, CD, EF, in G, H ſchneide. An den elliptiſchen Schnitt acbd seyn die der Axe parallelen Aa, Cc, Ee, Bb, Ff, Dd gezogen. In der Ebene des Schnittes ziehe man ab, cd, ef, von welchen die erſtere die beiden andern in g, h ſchneide. Nun ſind Gg, Hh, der Axe parallel, als Durchſchnitte zweyer Ebenen, mit welchen die Axe parallel iſt, (ſ. Ebene). Daher ſind Gg und Hh den Aa und Bb parallel, und es iſt AG:AH=ag:ah, ſo wie auch GB:HB=gb:hb, woraus folget

$$AG.GB:AH.HB=ag.gb:ah.hb.$$

Eben ſo iſt

$$CG.GD:EH.HF=cg.gd:eh.hf.$$

In dem Kreiſe iſt AG.GB=CG.GD, und AH.HB=EH.HF, alſo iſt in der Ellipſe.

$$ag.gb:ah.hb=cg.gd:eh.hf.$$

Die Linien cd, ef ſind parallel, weil ſie in derſelben Ebene liegend zugleich in den beiden parallelen Ebenen Cd, Ef befindlich ſind. Dieſe ſind parallel, weil Cc mit Ee, und CD mit EF parallel ſind. (Eucl. XI, 15.).

Der Inhalt eines Cylinders iſt gleich dem Inhalte eines Prisma über einer Grundfläche von gleicher Größe mit der Grundfläche des Cylinders, und mit derſelben Höhe, oder dem ſenkrechten Abſtande der Grundflächen. Der Cylinder iſt nämlich die Gränze der vielſeitigen Prismen, deren Grundflächen reguläre Figuren ſind. Es gilt alſo von dem Inhalte der Cylinder was von den Prismen gilt,

daß gleiche Grundflächen mit gleichen Höhen gleichen Inhalt geben.

Es ſey der Durchmeſſer der Grundflächen $=$ d; der Umfang $= \pi d$; die Höhe $=$ h, ſo iſt der Inhalt des Cylinders $= \frac{1}{4}\pi ddh$. Die Einheit iſt der Würfel derjenigen Linie, welche die Einheit für die Längen d und h iſt.

Das Verhältniß zweyer Cylinder wird zuſammengeſetzt ans dem gedoppelten Verhältniſſe der Durchmeſſer und dem einfachen der Höhen.

Bey gleichen Cylindern verhalten ſich die Höhen umgekehrt wie die Quadrate der Durchmeſſer. (Eucl. XII. 15.)

An ähnlichen Cylindern verhalten ſich die Höhen, wie die Durchmeſſer; ihre körperlichen Räume ſind daher wie die Würfel der Durchmeſſer. (Eucl. XII. 12.)

Iſt der Inhalt eines Cylinders gegeben, ſo ſteht es frey, Höhe oder Durchmeſſer zu beſtimmen.

Die Höhe ſey dem Durchmeſſer gleich, ſo iſt der Inhalt $= \frac{1}{4}\pi ddd$. Iſt der Inhalt gegeben, ſo iſt der Durchmeſſer beſtimmt. Der Inhalt ſey $=$ A, ſo iſt $d = \sqrt[3]{\frac{4A}{\pi}}$. Z. B. ein Berliner Quart oder Maaß halte 64,218 Cubik-Zoll Rheinl. Duod. Maaß, ſo iſt der Durchmeſſer eines gleich hohen und dicken Cylinders von dieſem Inhalte, d $=$ 4,3402 Rh. Duod. Zoll.

$$\log A = 1{,}8076230$$
$$\log 4 = 0{,}6020600$$
$$\log \frac{1}{\pi} = 9{,}5028501 - 10$$
$$\log d^3 = 1{,}9125331$$
$$\log d = 0{,}6375010,$$

Die krumme Oberfläche eines ſenkrechten Cylinders iſt gleich einem Rechteck, deſſen Grundlinie der Umfang der Grundfläche, und die Höhe der Axe gleich iſt. Wenn dieſes mit der Höhe an eine Seitenlinie des Cylinders gelegt und ſo gekrümmt wird, daß die Grundlinie

in den Umfang der einen Grundfläche fällt, ſo bedeckt es genau die krumme Oberfläche, indem für jeden Punct der Grundlinie, der in einen Punct des Kreisumfanges fällt, die auf jene Grundlinie ſenkrechte in die Seite des Cylinders fällt, die durch denſelben Punct des Kreiſes ſenkrecht auf dieſen ſteht. Der Durchmeſſer ſey d, die Höhe h, ſo iſt die krumme Oberfläche $= \pi d h$. Iſt die Höhe dem Durchmeſſer gleich, ſo iſt die krumme Oberfläche $= \pi d d$, ſo groß als die Oberfläche der eingeſchriebenen Kugel.

Die **Oberfläche eines ſchiefen Cylinders** zu finden, führe man (Fig. 107.) durch die Mittelpuncte C, c der Grundflächen ADBD und adbd Schnitte ſenkrecht auf die Axe, nämlich durch EDFD und edfd, in dem auf beiden Enden fortgeſetzten Cylinder. Dieſe Schnitte ſind Ellipſen, deren große Axen DD, dd, und deren kleine EF, ef ſind. Die Seitenlinien des Cylinders ſtehen auf den Umfang der Ellipſen ſenkrecht. Man conſtruire ein Rechteck, deſſen Grundlinie der Umfang der Ellipſe, (welcher als angebbar hier betrachtet wird), und deſſen Höhe die Axe des Cylinders iſt. Legt man dieſes Rechteck mit der als Höhe angegebenen Seite an eine auf der krummen Oberfläche zwiſchen den beiden elliptiſchen Schnitten der Axe parallele Linie, wie Ee, Ff, und legt die Grundlinie gekrümmt an die Ellipſe, ſo legt ſich das Rechteck an die cylindriſche Fläche an, und dieſe iſt daher ſo groß als jenes Rechteck. Der Theil der Cylinderfläche, welcher auf der einen Seite der elliptiſchen Flächen liegt, iſt demjenigen gleich, welcher auf der andern Seite liegt, nämlich der Theil DAED dem DBFD, und der Theil daed dem dbfd. Folglich iſt die cylindriſche Fläche gleich dem Rechteck, deſſen Grundlinie dem Umfange eines auf die Axe ſenkrechten elliptiſchen Schnittes, und die Höhe der Axe des Cylinders gleich iſt. Der ſchiefe Cylinder hat eine andere Art Rundung, als der ſenkrechte. Sie iſt in der Richtung des kleinſten Durchmeſſers abgeplattet. Daher kann der ſchiefe Cylinder auf einer gemeinen Drehbank nicht gedrechſelt werden.

Bey der Abwicklung der Cylinderfläche verwandelt

ſich der Umfang der Grundfläche in eine transſcendente krumme Linie. Es ſey (Fig. 108.) ADBDA die Grundfläche des Cylinders, EDFDA der elliptiſche ſenkrecht auf die Axe geführte Schnitt, welcher jene in DCD ſchneide. Auf dem elliptiſchen Quadranten DGE nehme man einen Punct G, und ziehe dadurch GH parallel mit der Axe an H in dem Umfange der Grundfläche. Nun verwandle man DG in eine gerade Linie, und ſetze darauf durch den Endpunct G eine ſenkrechte gleich GH, ſo iſt deren Endpunct in der abgewickelten DH. Die Linie GH iſt = HC . sin HCG. Es iſt alſo nöthig, den W. HCG durch einen mittelſt der Abwickelung gegebenen Winkel auszudrücken. Dieſer iſt DCG, oder der Winkel, welchen die durch die Axe und durch die beiden CD, CG gelegten Ebenen mit einander machen.

Man ziehe in der Grundfläche den Halbmeſſer CH, und gedenke ſich um C eine Kugelfläche mit dem Halbmeſſer CD beſchrieben. Die Linie CG werde bis an dieſe verlängert. Zwiſchen den Endpuncten dieſer drey Halbmeſſer der Kugel, CD, CH und der verlängerten CG entſteht ein ſphäriſches Dreyeck dhg. (Fig. 109.), worin der Bogen dg das Maaß des W. DCG, der Bogen dh des Winkels DCH, und hg des W. HCG iſt. Da die Ebene HCG ſenkrecht auf die Ebene DCG iſt, ſo iſt in dem ſphäriſchen Dreyeck der W. hgd ein Rechter. Der Winkel hdg iſt der Winkel der Ebenen, worin die Bogen hd und dg liegen, d. i. der Grundfläche und des elliptiſchen Schnittes, alſo gleich dem W. ACE. Man ſetze $ACE = \alpha$; $DCG = \varphi$; $DCH = \omega$, ſo iſt $\tang \omega = \frac{\tang \varphi}{\cos \alpha}$, und $\sin HCG = \sin \alpha . \sin \omega$, da in dem ſphäriſchen Dreyeck iſt $\cos d . \tang hd = \tang dg$, und $\sin hg = \sin d . \sin hd$. Der Halbmeſſer der Grundfläche ſey $= a$, und die Linie $GH = y$, ſo iſt $y = a \sin \alpha . \sin \omega$. Wird nun für irgend einen Winkel φ die Länge des elliptiſchen Bogens DG durch die dafür gehörige Reihe (ſ. Rectification) gefunden, wird ferner aus φ der Winkel hergeleitet, und daraus die Linie y berechnet, ſo hat man ein paar

ordinaten an der krummen Linie, in welche der Umfang der Grundfläche des Cylinders durch die Abwickelung ſich verwandelt. Die krumme Linie bekommt eine Geſtalt, wie die in (Fig. 110.) gezeichnete, wo die gerade DDD der Umfang der Ellipſe iſt, DG ein Bogen der Ellipſe von dem einen Durchſchnittspuncte der Grundfläche mit dem elliptiſchen Schnitte an genommen, die darauf ſenkrechte GH das Stück der Seite des Cylinders zwiſchen jenen beiden Schnitten: EA und FB die größten Ordinaten, jede $= a \sin \alpha$. Die krumme Linie ſchneidet die Abſciſſenlinie unter dem Winkel α oder ACE. Der Schnitt eines ausgebreiteten Ärmels, wo er an das Leibſtück genehet werden ſoll, hat eine ſolche Geſtalt, nur daß hier die gerade DD die abgewickelte Kreislinie der Grundfläche eines ſenkrechten Cylinders, und DABD eine abgewickelte Ellipſe ſeyn mag.

Cylindroid iſt erſtlich ein cylinderartiger Körper, der zwiſchen zwey parallelen ebenen Grundflächen, die nicht Kreiſe ſind, und einer krummen Oberfläche, die auf dieſelbe Art, wie an dem Cylinder beſchrieben wird, eingeſchloſſen iſt. Wenn die Grundflächen elliptiſch ſind, ſo iſt das Cylindroid zugleich ein Cylinder. Denn ſo wie man in einem Cylinder immer einen elliptiſchen Schnitt legen kann, deſſen Axen ein gegebenes Verhältniß haben, ſo kann man auch umgekehrt zu jeder elliptiſchen Grundfläche für die gegebene Lage der Axe die Lage der circularen Grundfläche finden. Die Schriftſteller, welche den cylindriſchen Körper mit elliptiſchen Grundflächen unterſcheiden, worunter auch d'Alembert in dem Dictionn. encyclop. gehört, haben dieſen Umſtand nicht beachtet.

Zweytens haben Wren und Parent dem Körper, der durch die Umdrehung einer Hyperbel um eine durch den Mittelpunct auf die Hauptaxe ſenkrechte gerade Linie erzeugt wird, den Namen, Cylindroid, gegeben Hier iſt dieſe Benennung ſchicklich. Die Oberfläche läßt ſich für eine gegebene Höhe deſſelben auf dieſelbe Art finden, wie die eines gedruckten Sphäroids von dem durch den Mittelpunct gelegten Kreiſe

an genommen. In dem Artikel, Sphäroid, wird dieſes gezeigt. Parent hat darüber eine Abhandlung in den Mem. de l'Acad. 1709 geliefert. Der Inhalt eines Abſchnittes dieſes Körpers, zwiſchen der Grundfläche und einem dieſer parallelen Schnitte iſt in dem Artikel, Cubirung. S. 582, gefunden.

D

Dactylonomia oder Chironomia, **Fingerrechenkunſt**, iſt ein Verfahren, die Finger anſtatt der Ziffern zu gebrauchen, und dadurch Zahlen anzugeben. (δακτυλος der Finger, χειρ die Hand). Es iſt dabey alles willkührlich. Die einfachſte Art wäre, die Ziffern durch die Anzahl der ausgeſtreckten Finger, die übrigen eingeſchlagen, anzudeuten, zuerſt die Einer, dann die Zehner, u. ſ. f. Oder man läßt den Daumen der linken Hand Eins, den Zeigefinger derſelben Zwey, und ſo ferner nach ihrer Folge bedeuten. Oder man bezeichnet die Anzahl der Einer, der Zehner, der Hunderte, der Tauſende, jede durch eine gewiſſe, ganz willkührliche, Stellung der ausgeſtreckten und eingeſchlagenen Finger; die Anzahl der Zehntauſende und Hunderttauſende durch eine Legung der Hand gegen den Leib. Man müßte ein ſehr gutes Gedächtniß haben, die Bedeutungen aller dieſer ganz willkürlichen Lagen zu behalten. Abbildungen in Leupolds Theatro Arithm. §. 3. und in Roſenthals natürlicher Magie 7. Bd. 276. S.

Datum, was als beſtimmt und bekannt angenommen wird, oder erwieſen iſt, in Abſicht auf Größe, oder Lage, oder Verhältniſſe, ſ. Gegeben.

Data des Eukloides, eine Sammlung von Lehrſätzen, welche zeigen, wie aus gewiſſen Verhältniſſen oder Größen andere folgen. Sie iſt für die Analyſis der Alten ein wichtiges Hülfsmittel. Mittelſt dieſer Sätze ſucht man bey der Auflöſung einer Aufgabe, was aus den gegebenen Dingen folgt, was aus dieſem wieder hergeleitet wird,

u. ſ. w., bis daß man findet, daß das, was in der Aufgabe zu leiſten verlangt wird, gegeben ſey. Oder man geht von dem geſuchten als gegeben aus, und ſucht, wie man durch Größen und Verhältniſſe, deren eins durch das andere gegeben wird, auf etwas gegebenes komme, um von dieſem wieder auf das geſuchte zurück zu gehen. Beyſpiele. Der 9te Satz in der Ausgabe von Gregory: Wenn zwey oder mehrere Größen zu einander gegebene Verhältniſſe haben, und wenn ſie zu andern Größen gegebene, wenn auch nicht einerley Verhältniſſe haben, ſo werden dieſe andern Größen auch gegebene Verhältniſſe zu einander haben. Der 66ſte Satz: Wenn in einem Dreyeck ein Winkel gegeben iſt, ſo hat das Rechteck von den einſchließenden Seiten zu dem Dreyeck ein gegebenes Verhältniß.

Dieſes Werk iſt zuerſt griechiſch und lateiniſch mit den andern Schriften des Euklides von Daſypodius 1571 zu Straßburg herausgegeben. Eine beſondere Ausgabe mit einer neuen Ueberſetzung hat Hardy beſorgt, Paris 1625. Dieſe Ueberſetzung hat Gregory in ſeiner ſchönen Ausgabe der Euklidiſchen Schriften, Oxford, 1703 fol. mit Verbeſſerungen dem griechiſchen Texte beygefügt. Robert Simſon hat eine engliſche Ueberſetzung geliefert, worin er Änderungen des Ausdrucks und der Ordnung der Sätze vorgenommen, auch einige neue Sätze hinzugethan hat. Dieſe Ausgabe hat Schwab ins Deutſche überſetzt, und mit einer Sammlung geometriſcher, nach der analytiſchen Methode der Alten aufgelöſeten Probleme begleitet. Stuttgard 1780.

Decimalbruch iſt ein Bruch, deſſen Nenner eine Potenz der Zehn iſt, wie $\frac{23}{100}$; $\frac{478}{1000}$. Da die Rechnung mit dieſer Gattung von Brüchen nicht mehr Schwierigkeit macht, als die mit ganzen Zahlen, ſo werden in der Mathematik faſt keine andere gebraucht.

So wie man die ganzen Zahlen aus Einheiten, in einer nach dem Zehnfachen aufſteigender Folge von den Einern an zuſammenſetzt, ſo ſetze man auch die eigentlichen Brüche aus Einheiten in einer nach dem Zehnfachen her-

abſteigenden oder abnehmenden Folge aus Zehntheilchen, Hunderttheilchen, Tauſendtheilchen, u. ſ. f. zuſammen. Und wie man den Werth der Zahlziffern linker Hand hin mit jeder Stelle zehnfach größer werden läßt, ſo laſſe man, von der Stelle der Einer nach der Rechten hin, die Werthe der Ziffern mit jeder Stelle zehnmahl kleiner werden, dann kann man die Nenner der Brüche erſparen, und die Bruchrechnung völlig wie mit ganzen Zahlen verrichten. Nur muß man die Stelle der Einer durch ein Zeichen, als einen Punct, oder wie es gewöhnlich iſt, durch ein Komma bemerken. Solchergeſtalt hat man die Zahl 43,85304 zu leſen: 43 Einer, 8 Zehnth., 5 Hundertth., 3 Tauſendth., 0 Zehntauſendth., 4 Hunderttauſendth. Wenn keine Ganze vorhanden ſind, ſo wird in die Stelle der Einer die 0 geſetzt, wie 0,693. Fehlen auch die Zehntheilchen, Hunderttheilchen u. m. ſo wird deren Stelle auch durch 0 ausgefüllt, wie 0,048; 0,004314.

Die nach dem Komma ſtehenden Ziffern, mit Weglaſſung der Nullen, die etwa unmittelbar nach dem Komma folgen, ſind der Zähler eines Bruches, deſſen Nenner die Eins mit ſo vielen Nullen iſt, als durch das Komma Ziffern und Nullen rechter Hand abgeſondert ſind. Z. B. $43,85304 = 43\frac{85304}{100000}$; $0,048 = \frac{48}{1000}$.

Einem auf angezeigte Art ausgedruckten Decimalbruche kann man ſo viele Nullen anhängen, als man will, weil der Werth jeder Ziffer durch das Komma beſtimmt iſt. Aber für jede Stelle, die das Komma rechter Hand hin fortrückt, wird die Zahl mit 10 multiplicirt, und für jede Stelle, die es linker Hand hinaufrückt, durch 10 dividirt.

Einen jeden Bruch verwandelt man in einen Decimalbruch, wenn man Zähler und Nenner mit einer Potenz von 10 multiplicirt. und das Product aus dem Zähler in dieſe Potenz durch den Nenner dividirt, wobey aber oft ein Reſt bleibt, den man inzwiſchen beliebig vermindern kann, da die Potenz der 10 nach Belieben groß genommen werden mag.

Z. B. $\frac{9}{17} = 0,5294117 \ldots$

Ein Reſt bleibt immer, wenn der Nenner andere Factoren als 2 und 5 hat, vorausgeſetzt, daß der Bruch auf die kleinſte Zahlen gebracht ſey.

Addition. Decimalbrüche werden wie ganze Zahlen addirt, nachdem man ſie ſo geordnet hat, daß die Kommata, und alſo die Einheiten von gleichem Werthe, über einander ſtehen.

Beyſpiel.

84,732
7,5048
432,14
0,05389
Summe = 524,43069

Subtraction. Dieſe geſchieht auf die nämliche Art.

43,06847	537,48
17,487	12,5934
25,58147	524,8866

Multiplication. Man verfährt, als wenn man ganze Zahlen mit Weglaſſung des Komma zu multipliciren hätte, und ſchneidet von dem Producte ſo viele Ziffern von der rechten nach der linken Hand ab, als in beiden Factoren zuſammen abgeſchnitten ſind.

Beyſpiele.

7526	7,526	75,26	0,274
3,47	3,47	0,347	0,0426
526,82	0,52682	0,52682	1644
3010,4	3,0104	3,0104	548
22578	22,578	22,578	1096
26115,22	26,11522	26,11522	0,0116724

In dem letzten Exempel ſind die Nullen vor den bedeutenden Ziffern in den Partialproducten zur Bequemlichkeit weggelaſſen.

Diviſion. I. Fall, wenn Dividendus und Diviſor ganze Zahlen ſind. Iſt jener größer als dieſer, und es bleibt ein Reſt, nachdem die Einer in dem Quotienten gefunden ſind, ſo macht man dieſen durch Hinzuſetzung einiger Nullen zu Decimaltheilen, welches folgweiſe geſchehen mag, nämlich den erſten Reſt zu Zehntheilchen, den folgenden Reſt zu Hunderttheilchen u. ſ. f. wodurch die Theile des Quotienten nach der Reihe in gleichnamigen Decimaltheilen gefunden werden. Wenn die Reduction eines Reſtes auf eine zehnfach kleinere Einheit zur Diviſion nicht genügt, ſo bringt man ihn auf eine noch kleinere Einheit, bis er durch den Diviſor theilbar wird. Iſt der Dividendus kleiner als der Diviſor, ſo verwandelt man ihn in Decimaltheile, wie ſchon gewieſen iſt.

Exempel.

37	872	23, 567 567 567 . . .
74	132	Einer
111	210	Zehnth.
185	250	Hundertth.
222	280	Tauſendth.
259	210	Zehntauſendth.

Die Producte aus dem Diviſor in jeden Theil des Quotienten ſind zur Seite geſetzt. Da der Reſt 21 Tauſendth. ſchon, was die Ziffern betrifft, bey den Einern vorgekommen iſt, ſo kehren dieſelben Ziffern von den Zehntheilchen an, wieder. In jedem nicht vollſtändigen Decimalbruche giebt es ſolche Perioden, wovon hernach.

II. Fall, wenn der Dividendus allein Decimaltheile enthält. Die Diviſion wie vorher, nur daß das Komma in dem Quotienten um ſo viele Stellen nach der linken Hand fortrückt, als Ziffern in dem Dividendus abgeſchnitten ſind.

37	8, 72	0, 23567 567 . . .

III. Fall, wenn der Diviſor Decimaltheile enthält. Man rückt das Komma in demſelben vorwärts bis zur letz-

ten Ziffer, und das Komma in dem Dividendus um eben ſo viele Stellen, in welche man für die etwa fehlenden Ziffern Nullen ſetzt.

Exempel.

	3,7	87,2	
das iſt	37	872 ‖	23,567 567 . . .

oder

0,37	872	
37	87200 ‖	2356,7567 . .

Perioden der Decimalbrüche.

Wenn ein Reſt, zu welchem keine Ziffer aus dem Dividendus zu nehmen war, wieder kommt, was nämlich die Ziffern, ohne Rückſicht auf ihre Einheit betrifft, ſo kehren die Ziffern in dem Dividendus, von derjenigen an, die aus jenem Reſte entſtanden iſt, wieder, wie das vorige Beyſpiel gezeigt hat. Nun können nicht mehr verſchiedene Reſte Statt haben, als der Diviſor Einheiten weniger eine hat. Daher hat jeder Decimalbruch, der einem rationalen Bruche gleich iſt, wenn er nicht abbricht, von einer Stelle an Perioden wiederkehrender Ziffern. Man braucht die wirkliche Diviſion nicht weiter als bis zu dem Ende einer Periode fortzuſetzen. Alle folgenden Ziffern ſind dadurch gegeben.

Die Perioden können aber auch weniger Ziffern enthalten als der um Eins verminderte Diviſor Einheiten hat.

Wenn der Diviſor die Form $10^m - 1$ hat, ſo enthält jede Periode des Quotienten m Ziffern. Denn es ſey der Bruch $= \frac{N}{D}$, und $D = 10^m - 1$, ſo iſt $\frac{N}{D} =$ $N(10^{-m} + 10^{-2m} + 10^{-3m} + \text{etc.})$. (Buchſtabenrechnung, 26.). Z. B.

$$\frac{247386}{9999} = 24,7386$$

$$\begin{array}{r} 24,\ 7386 \\ 24\ \ 7386 \\ 24\ \ 7386 \\ 247\ldots \\ \hline 24,\ 7410\ \ 7410\ \ 7410\ldots \end{array}$$

Eben das findet Statt, wenn der Diviſor ein Factor von $10^m - 1$ iſt. Es ſey nämlich $D = \frac{10^m - 1}{a}$, wo a eine ganze Zahl iſt, ſo iſt $\frac{N}{D} = \frac{N.a}{10^m - 1}$.

Da $10^{2m} - 1 = (10^m - 1)(10^m + 1)$ iſt, ſo geben Diviſoren, welche die Form $10^m + 1$ haben, oder Factoren einer Zahl von dieſer Form ſind, Perioden von 2m Ziffern.

Es iſt

$10 - 1 = 9.1 = 3.3$	$10^3 - 1 = 9.3.37$
$10^2 - 1 = 9.11$	$10^4 - 1 = 9.11.101$

$10^5 - 1 = 9.41.271$

$10^6 - 1 = 9.3.7.11.13.37.$

Auch $10^4 + 1 = 73.137$,

Die Primzahlen, die hier als Factoren vorkommen, geben als Diviſoren Perioden von ſo viel Ziffern, als der Exponent der Potenz von 10 in dem niedrigſten zugehörigen Producte $10^m - 1$ Einheiten enthält. Die Factoren 73 und 137 von $10^4 + 1$ geben Perioden von 2 mahl 4 Ziffern.

Eine allgemeinere Theorie als dieſe fragmentariſche iſt, giebt Gauß in den Disquiſitionibus arithmeticis, ſect. VI. Aus dieſer iſt folgende Tafel für die einfachen Diviſoren bis 97, und die Anzahl der Ziffern in den Perioden der Quotienten gezogen. Der Diviſor iſt mit D, die Anzahl der Ziffern in den Perioden mit Z bezeichnet.

D	Z	D	Z
3	1	47	46
7	6	53	13
11	2	59	58
13	6	61	60
17	16	67	33
19	18	71	35
23	22	73	8
29	28	79	13
31	15	83	41
37	3	89	44
41	5	97	96
43	21		

Der Nenner D des Bruchs $\frac{N}{D}$ ſey das Product von zwey Primzahlen A und B. Der Quotient $\frac{1}{A}$ enthalte Perioden von m Ziffern, der Quotient $\frac{1}{B}$ enthalte Perioden von n Ziffern, ſo beſtehen die Perioden des Bruches $\frac{N}{A.B}$ aus ſo viel Ziffern, als die kleinſte Zahl, worin m und n aufgehen, Einheiten hat, alſo aus m n Ziffern, wenn m und n keinen gemeinſchaftlichen Theiler haben. Zum beſſern Verſtändniß des Beweiſes diene vorläufig folgendes Exempel.

$\frac{1}{7} = 0,\ 142857\ 142857\ 142857 \ldots$

$\frac{1}{101} = 0,\ 0099\ 0099\ 0099\ 0099 \ldots$

Hier iſt $m = 6$; $n = 4$, und die kleinſte Zahl, worin beide aufgehen, iſt 12; alſo hat $\frac{1}{7 \times 101}$ Perioden von 12 Ziffern. Es iſt

$$\frac{1}{7 \times 101} = 0,001414127157\ 00141 \ldots$$

Man bemerke hierbey, daß die beiden erſten Perioden des Bruches $\frac{1}{7}$ ſich durch den Nenner des andern Bruches, ſo wie die vier erſten Perioden dieſes zweyten ſich durch den Nenner des erſten ohne Reſt theilen laſſen.

Es ſey nun, wenn m und n einen gemeinſchaftlichen Theiler haben, $m : n = p : q$, wo $p : q$ die kleinſten Zahlen für dieſes Verhältniß ſind. Man bezeichne die Ziffern in einer Periode des Bruches $\frac{1}{A}$ durch . . . $a, b, c \ldots k$, etc. die zum Theil 0 ſeyn können, ſo daß $\frac{1}{A} = a.10^{-1} + b.10^{-2} + c.10^{-3} \ldots + k.10^{-m} + a.10^{-m-1} \ldots + k10^{-2m} + a^{-2m-1} \ldots + k.10^{-qm} + \frac{1}{A.10^{qm}}$. Der Reſt am Ende der erſten Periode iſt nämlich $= 1.10^{-m}$, am Ende der zweyten . . . $= 1.10^{-2m}$; am Ende der qten $= 1.10^{-qm}$. Dieſer Reſt mit A dividirt giebt die Ergänzung des Decimalbruchs zu dem vollſtändigen Werthe des Bruches $\frac{1}{A}$.

Demnach iſt

$$10^{qm} - 1 = (a.10^{qm-1} + b.10^{qm-2} \ldots + k) A.$$

Man bezeichne nun auch die Ziffern in einer Periode des Bruches $\frac{1}{B}$ durch $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varkappa$, ſo iſt auf dieſelbe Art

$$10^{pn} - 1 = (\alpha, 10^{pn-1} + \beta.10^{pn-2} \ldots + \varkappa) B$$

Da $pn = qm$ iſt, ſo iſt $(a, 10^{qm-1} \ldots + \varkappa) A = (\alpha.10^{pn-1} \ldots + \varkappa) B$. Folglich iſt A ein Theiler des Factors von B, ſo wie B ein Theiler des Factors von

A iſt, da A und B Primzahlen ſind. Alſo iſt auch A ein Theiler von $\alpha . 10^{-1} + \beta . 10^{-2} \ldots + \varkappa . 10^{-pn}$, ſo wie B ein Factor von $a . 10^{-1} + b . 10^{-2} \ldots + k . 10^{-qm}$. Wird nun der ohne Ende fortlaufende Decimalbruch $\frac{1}{A}$ durch B dividirt, ſo geht die Diviſion bey je q m Ziffern, von der Stelle der Zehntheilchen angefangen, ohne Reſt auf, und in den Stellen $- qm - 1$; $- 2qm - 1$; $- 3qm - 1$; etc. kehren dieſelben Ziffern wieder. Eben ſo verhält es ſich, wenn der Decimalbruch $\frac{1}{B}$ durch A dividirt wird. Mit je pn Stellen kommen dieſelben Ziffern wieder. Der Bruch $\frac{1}{A . B}$ enthält alſo Perioden von q m, das iſt, pn Ziffern. Kürzer ſind die Perioden nicht, weil die obigen Producte nur dann gleich ſind, wenn $10^{qm} - 1 = 10^{pn} - 1$, oder wenn $qm = pn$ iſt.

Der Bruch $\frac{N}{A . B}$ enthält daher auch Perioden von qm ($= pn$) Ziffern, Denn bey der Multiplication des Decimalbruchs $\frac{1}{A . B}$ durch N enthalten die Partialproducte durch die Theile von N jedes q m ($= pn$) Perioden, und werden in allen Perioden von $\frac{1}{A . B}$ auf gleiche Art unter einander geordnet.

Der Decimalbruch $\frac{N}{A . B . C}$, wo A, B, C Primzahlen ſind, enthält ſo viele Ziffern in jeder Periode, als die kleinſte Zahl, worin das Product der Ziffer-Menge in den Perioden von $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{B}$, $\frac{1}{C}$ aufgeht, Einheiten enthält. Auf ähnliche Art verhält es ſich bey noch mehr untheilbaren Factoren in dem Diviſor.

Wenn der Diviſor eine Potenz von 2, oder von 5,

oder von beiden enthält, ſo iſt die Ziffer-Menge in den Perioden dieſelbe, welche in dem Decimalbruche, nach Abſonderung jener Factoren, Statt hat. Denn $\frac{1}{2}$ iſt $\frac{5}{10}$; $\frac{1}{4} = \frac{25}{100}$; $\frac{1}{8} = \frac{125}{1000}$; etc. und $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$; $\frac{1}{25} = \frac{4}{100}$, etc. Die Diviſion durch die Potenzen von 10 verändert die Ziffern nicht, nur ihre Stellen in Abſicht auf die Stelle der Einer; und die Multiplication durch die Zähler verändert den Umfang der Perioden nicht. Bey der Beſtimmung der Größe der Perioden in einem Decimalbruche hat man daher die Factoren 2 und 5, wenn ſolche in dem Diviſor vorhanden ſind, abzuſondern.

Zu vergleichen: Walliſii Algebra, cap. 89.

Eulers Algebra, §. 525. ff.

Robertſon on the theory of circulating Decimal Fractions. Philoſ. Tranſ. 1768.

Bernoulli ſur les fractions décimales périodiques. Mem. de Berlin 1771.

Gauſs disquiſitiones arithmeticae. §. 312. ſ. ſ. Lipſiae 1801.

Decimalmaaß iſt die Eintheilung der Einheit zum Meſſen oder Zählen, in Zehntheile, Hunderttheile u. ſ. f. nach der Decimalprogreſſion. Man ſagt Fuße, Zolle, Linien, Decimalmaaß, oder Decimalfuß, Decimal-Zoll, Decimallinie. Ein Decimalfuß bezieht ſich auf eine Ruthe als Einheit; ein Fuß ſchlechtweg iſt eine willkürliche Einheit für ſich ſelbſt. Man hat jetzt angefangen, den Quadranten eines Kreiſes in Decimaltheile zu theilen, ſo daß der zehnte Theil des Quadranten, ein Decimalgrad, der hundertſte Theil eine Decimalminute heißen müßte, wenn man die alten Benennungen neben den neuen Theilen behalten wollte. Die franzöſiſchen Mathematiker nennen den hundertſten Theil des Quadranten einen Decimalgrad; den hundertſten Theil dieſes Grades eine Decimal-Minute; den hundertſten der Minute, eine Decimal-Secunde, (Tables trigonométriques décimales par Borda et Delambre, pag. 18). Die Benennung Centeſimale wäre beſtimmter.

Die Eintheilung nach der Decimalprogreſſion iſt ohne Streit die bequemſte, weil man nach derſelben die Bruchtheile wie ganze Zahlen, ohne die umſtändliche Reduction, die bey andern Eintheilungen nöthig iſt, behandeln kann. Freylich werden die trigonometriſchen und aſtronomiſchen Tafeln, die nach der Sexageſimaltheilung eingerichtet ſind, dadurch faſt unbrauchbar, und man muß ſich an ganz neue Zahlen für bekannte individuelle Größen in der Phyſik und Aſtronomie gewöhnen. Allein die viel größere Leichtigkeit der Rechnungen nach dem Decimalmaaße vergütet das alles. Wenn die aſtronomiſchen Tafeln mit den neueſten Verbeſſerungen nach dem Decimalſyſtem abgefaßt ſind, ſo wird jeder Aſtronom ſeine Rechnungen nach demſelben machen müſſen, da die ältern Tafeln ihm nicht die gehörige Genauigkeit gewähren würden. In kleinern Rechnungen z. E. bey geodätiſchen, wird man ſich der bisherigen Eintheilung noch bedienen können, ſo lange die Inſtrumente nach derſelben verfertigt ſind.

Decimal-Rechnung, iſt das Verfahren mit Decimalbrüchen zu rechnen. Sie iſt in dem Artikel, Decimalbruch, vorgetragen. Regiomontanus hat die Veranlaſſung zu dieſer Rechnung gegeben, da er die Sexageſimal-Eintheilung des Halbmeſſers eines Kreiſes mit der bequemern in zehn Millionen Theile vertauſchte. Um die Mitte des ſechszehnten Jahrhunderts zeigten Buckley und Recorde in England und Ramus in Frankreich, wie die Bruchtheile bey der Ausziehung der Quadratwurzel in Decimaltheilen auszudrücken ſind, da man vorher irgend einen andern Bruch der ganzen Wurzelzahl angehängt hatte. Simon Stevin ſcheint die Rechnung mit Decimaltheilen wirkſam empfohlen zu haben, in einer beſondern Schrift, die 1585 in einer franzöſiſchen Ueberſetzung herausgekommen, und ſeiner praktiſchen Arithmetik, in der Sammlung ſeiner Werke beygefügt iſt, worin er den Nutzen der Eintheilung und Rechnung nach Zehnen zeigt.

Er bedient ſich noch nicht des jetzt gewöhnlichen Komma oder Punctes, die Stelle der Einer anzuzeigen. Er giebt jeder Stelle einen eignen Namen: Primen, Secunden f. ſ. welches die Feldmeſſer lange Zeit beybehalten haben.

Decken ſ. Congruenz.

Decrementa, die Unterſchiede der Glieder einer fallenden oder abnehmenden Reihe von den nächſt vorhergehenden. Man begreift dieſe auch unter dem Namen, Incrementa, die in dieſem Falle negative Zunahmen, d. i. Abnahmen ſind. Die Benennung, Differenz, begreift beides. Gewöhnlich wird das vorhergehende Glied von dem folgenden abgezogen, ſo daß die Differenz negativ iſt, wenn jenes größer als dieſes iſt, beide poſitiv genommen.

Decuſſare, ſich ſchneiden, wird von Linien gebraucht. Decuſſis hieß bey den Römern ein Gewicht von zehn Pfund, decem aſſes. Dieſes ward durch X bezeichnet, daher auch dieſe Figur ſelbſt decuſſis hieß.

Deficiens hyperbola iſt nach Newton eine Gattung von Linien aus der dritten Ordnung, welche nur eine Aſymptote haben, an welcher ſie mit zwey Schenkeln nach entgegengeſetzten Richtungen hinlaufen. Sie heißen mangelnde, weil die Hyperbel, welche ein Kegelſchnitt iſt, zwey Aſymptoten mit vier Schenkeln hat. Unter den Linien der dritten Ordnung giebt es auch Hyperbeln mit drey Aſymptoten und ſechs Schenkeln. Dieſe nennt Newton hyperbolas redundantes..

Die Gleichung für die hyperbola deficiens iſt . . $xyy + ax^3 + bx^2 + cx + ey + d = o$, wo b, c, e, d negativ ſeyn können, a aber poſitiv iſt. Nimmt man die Ordinaten y auf der Aſymptote, ſo ſchränkt ſich für ein unendlich großes y und unendlich kleines x die Gleichung auf die Glieder $xyy + ey$ ein, daher die Gränzgleichung iſt $xy + e = o$, eine Gleichung für die gemeine Hyperbel, wenn die Abſciſſen von dem Mittelpuncte aus auf der einen Aſymptote genommen werden, und die Ordinaten der

anderen Aſymptote parallel ſind. Die Hyperbel nähert ſich mit denjenigen beiden Schenkeln, die zu der Aſymptote der Curve gehören, dieſer ohne Ende. Sechs Arten der defectiven Hyperbel haben keinen Durchmeſſer; ſieben Arten haben einen, der nämlich die mit der Aſymptote parallelen Doppelordinaten halbirt. Dieſe Hyperbeln können mit einer Ovale, einer knopfartigen Biegung, einem Knoten, einer Spitze verbunden ſeyn. Newtoni enum. linearum tertii ordinis. Fig. 43 — 53. S. Krumme Linien vom dritten Grade.

Deficiens numerus, eine Zahl, deren aliquote Theile zuſammen genommen, weniger betragen als die Zahl ſelbſt. Z. B. Die Zahl 105, deren einfache Factoren ſind 3, 5, 7, und deren Theiler ſind 1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, von welchen die Summe iſt 87. Die Formeln, wodurch Zahlen von dieſer Beſchaffenheit gefunden werden, ſind denen ähnlich, wodurch die überſchießenden Zahlen (numeri abundantes) gefunden werden, nur daß das Zeichen der Ungleichheit entgegen geſetzt zu nehmen iſt. S. abundans numerus. Eine Zahl deren Theiler zuſammen der Zahl ſelbſt gleich ſind, heißt eine **vollkommene Zahl**. Dieſer Zahlen ſind ſehr wenige.

Definition. ſ. Erklärung

Dekadik, dekadiſches Zahlenſyſtem, dekadiſche Form der Zahlen, iſt die Vertheilung der Zahlen in Claſſen von zehnfach ſteigenden Einheiten, deren jede Claſſe zehn enthält, ſo daß zehn Einheiten einer Claſſe eine Einheit der nächſt höhern Claſſe ausmachen. Die Einheiten der vier erſten Claſſen heiſſen: **Einer**, **Zehner**, **Hunderte**, **Tauſende**. Die Tauſende zählen wir wie Einer bis zu tauſend Tauſenden, das iſt einer **Million**; die Millionen wie Einer bis zu einer Million derſelben oder einer **Billion**. Von dieſer ſteigen wir zu einer **Trillion**, **Quadrillion**, **Quinquillion**, u. ſ. f., welche Einheiten jede eine Million mahl größer ſind, als die nächſt vorhergehende. In der Fortſchreitung nach Zehnern iſt auch die Fortſchreitung nach Tauſenden enthalten, ſo daß wir mit

den Tauſenden der Einer, der Tauſende ſelbſt, der Millionen, einen Ruhepunct im Zählen machen, daher wir die Tauſende als Ordnungen der Zahlen, jede von drey Claſſen anſehen können. Die Abtheilung der Zahlen in Millionen, Billionen, Trillionen u. ſ. w. rührt von einem Niederländiſchen Mathematiker, Albert Girard, her, ſ. Algebra.

Die Bezeichnung der Zahlen geſchieht auf eine dieſer Vertheilung gemäße Art. Die Einer, Zehner, Hunderte, u. ſ. f. werden alle durch dieſelben Zeichen, deren nur neun nöthig ſind, angedeutet; die Größe oder die Beſchaffenheit der Einheit wird durch die Stelle des Zeichens angezeigt. Die Einer nehmen den erſten Platz rechter Hand ein, die Zehner den zweyten, die Hunderte den dritten, u. ſ. f. die Einer von Millionen den ſiebenten, die Einer von Billionen den dreyzehnten, die Einer von Trillionen den neunzehnten, u. ſ. w. Die Stelle der Millionen kann man oben mit einem Striche, der Billionen mit zwey Strichen u. ſ. w. bezeichnen; odee man rückt die Millionen, die Billionen, u. ſ. f. oder die Abtheilungen von je ſechs Ziffern ein wenig von einander ab. Wenn eine Gattung von Einheiten fehlt, ſo wird ihre Stelle durch o ausgefüllt. Die Sache iſt ſo bekannt, daß es an einem Beyſpiele genügen wird. Die folgende Zahl,

18‴ 446744″ 073709′ 551615

iſt die Summe der Körner, welche man erhält, wenn für das erſte Feld eines Schachbrettes eins, für das zweyte zwey, für das dritte vier, und ſo immer weiter doppelt gerechnet werden. Das Zeichen 5 zeigt fünf an, aber in der erſten Stelle bedeutet es fünf Einer, in der fünften fünf Zehntauſende, in der ſechsten fünf Hunderttauſende. So auch für jede andere Zahlziffer.

Die alten Völker, ſelbſt die Griechen, haben faſt alle ſehr unbequeme Bezeichnungsarten der Zahlen gehabt. Die Indier haben die gegenwärtig allgemein gebräuchliche erfunden; von dieſen iſt ſie durch die Araber nach Europa gekommen. Die Geſchichte der verſchiedenen Bezeichnungsarten iſt in dem Artikel: **Zahlzeichen**, anzutreffen.

Dekadiſche Arithmetik. Die Rechnung mit Zahlen von der dekadiſchen Form. Zu vergleichen ſind die Artikel; dodekadiſche und dyadiſche Arithmetik.

Dekagonalzahl iſt eine ganze Zahl von der Form n(4n — 3). Sie gehört unter die **Polygonalzahlen.** Siehe dieſen Artikel.

Deliſche Aufgabe iſt eine bey den Alten ſehr berühmte Aufgabe von der Verdoppelung eines Würfels, das iſt, die Seite eines Würfels zu finden, welcher doppelt ſo groß iſt als ein gegebener. Sie führt darauf, daß zwiſchen zwey gegebenen Linien zwey in ſtetiger Proportion gefunden werden. Denn das Verhältniß zweyer Würfel iſt das dreyfache (triplicata) ihrer Seiten. In der ſtetigen Progreſſion, a: b: c: d, iſt das Verhältniß a: d auch das dreyfache des Verhältniſſes a: b, indem es aus den drey gleichen Verhältnißen a: b; b: c; c: d zuſammen geſetzt wird, (ſ. Verhältniß). Sind a und b die Seiten zweyer Würfel, ſo verhalten ſich dieſe Körper wie a: d, und umgekehrt iſt das Verhältniß der Würfel gegeben, ſo iſt das Verhältniß ihrer Seiten das von a: b oder c: d, wo b und c die beiden mittlern Proportionalen zwiſchen a und d ſind. Dieſe können durch die gemeine Geometrie nicht gefunden werden; daher ward die Aufgabe für die Alten von Wichtigkeit, indem ſie zu Unterſuchungen höherer Art führte. Sie iſt auch durch Sagen von der Veranlaſſung dazu verherrlicht. Der König Minos, iſt die eine Sage, habe ſeinem Sohn Glaukus ein Grabmahl errichten laſſen. Da die Bauleute es hundert Fuß lang, breit und hoch gemacht hatten, fand er es zu klein, und verlangte, daß es noch einmahl ſo groß ſollte gemacht werden. Hier entſtand die Frage, wie die Seiten zweyer Würfel ſich verhalten, deren einer doppelt ſo groß iſt, als der andere. Die zweyte Sage iſt, das Orakel zu Delos habe einmahl befohlen, den Altar des Apollo, welcher ein Würfel war, zu verdoppeln. Da man dieſes nicht zu bewerkſtelligen wußte, habe man bey Plato dazu die Anweiſung geſucht. Dieſes erzählt Eratoſthenes in

einem Schreiben an den König Ptolemäus Evergetes, worin er ein von ihm erfundenes Inſtrument zur Erfindung zweyer oder auch mehrerer ſtetiger mittlern Proportionallinien beſchreibt. Das Schreiben hat Eutocius in ſeinem Commentar über des Archimedes Schrift von Kugel und Cylinder aufbehalten. Plutarch in der Schrift von dem Genius des Sokrates führt die zweyte Sage noch mit mehrern Umſtänden an. Eine Peſt in Griechenland habe veranlaßt das Orakel in Delos zu befragen, worauf man eine Antwort erhalten; da man aber die Vergrößerung des Altars auf unrechte Weiſe gemacht, und die Peſt nicht nachgelaſſen habe, ſo ſey man bey wiederholter Anfrage belehrt worden, daß die Form cubiſch bleiben müßte. Plato habe den an ihn Abgeordneten geantwortet; dem Gott ſey eigentlich an der Verdoppelung ſeines Altars nichts gelegen; er verweiſe dadurch den Griechen ihre Gleichgültigkeit gegen die Geometrie, befehle ihnen den Kriegen zu entſagen, und vermahne ſie, ſich der Erwerbung von Kenntniſſen mit Ernſt zu befleißigen. Vielleicht hat Plato ſelbſt den Ausſpruch des Orakels veranlaßt. Die Aufgabe von der Verdoppelung des Würfels iſt älter. Denn Hippokrates von Chios, der durch die Quadratur der Lunula bekannt iſt, iſt ſchon vor Platons Zeit darauf gefallen, und hat auch eingeſehen, daß die Auflöſung auf die Erfindung zweyer mittlern Proportionallinien ankomme.

Die Aufgabe hat die vornehmſten Geometer unter den Alten beſchäftigt. Ihre Auflöſungen hat uns Eutocius a. a. O. aufbewahrt. Die von Eratoſthenes, Nikomedes und Hero gegebenen hat Pappus in ſeine mathematiſchen Sammlungen aufgenommen, im 3ten Buche, wozu er noch eine von ihm gefundene fügt. Plato gebraucht eine Art von Parallellinial zur mechaniſchen Auflöſung. Archytas von Tarent, ein vertrauter Freund des Plato, gab eine verwickelte, bloß intellectuelle Auflöſung, welche gewiſſe Bewegungen von einem Dreyeck und einer Kreisfläche gebraucht. Menächmus, der, wie es ſcheint, zuerſt die Kegelſchnitte

betrachtet hat, gebrauchte den Durchſchnittspunct einer Parabel und Hyperbel, desgleichen auch den Durchſchnittspunct zweyer Parabeln, mit einem gemeinſchaftlichen Scheitelpuncte. Apollonius von Pergä hat nach dem Berichte des Pappus auch die Kegelſchnitte zur Auflöſung unſerer Aufgabe angewandt, aber ſein Verfahren iſt nicht zu uns gekommen. Seine mechaniſche Conſtruction iſt dieſelbe, wie die von Hero angegebene, welcher ſie vielleicht von ihm entlehnt hat. Da man von der Aufgabe Gebrauch bey den Kriegsmaſchinen machen konnte, wenn man die Verhältniſſe der Hauptmaaßen, nach der Wirkung, die ſie leiſten ſollten, zu beſtimmen hatte, ſo war man auf praktiſche Conſtructionen bedacht, die durch Probiren das Geſuchte geben. Solche gaben Hero von Alexandrien, und Philo von Byzanz. Die Auflöſung des erſtern beruhte darauf, daß eine gerade Linie durch einen gegebenen Punct ſo gelegt ward, daß die Durchſchnittspuncte mit den Schenkeln eines rechten Winkels von einem beſtimmten Puncte, der Mitte zwiſchen dem gegebenen Puncte und dem Scheitel des rechten Winkels, gleiche Abſtände bekamen. Davon mußte man ſich durch unmittelbare Meſſung verſichern. Die Conſtruction des Philo iſt etwas leichter. Durch einen gegebenen Punct in dem Umfange eines gegebenen Kreiſes wird eine gerade Linie ſo gelegt, daß die Theile derſelben zwiſchen dem Umfange des Kreiſes und den Schenkeln eines rechten Winkels gleich groß ausfallen. Eratoſthenes, der wegen ſeiner aſtronomiſchen und geographiſchen Unterſuchungen berühmt iſt, erdachte ein Inſtrument, zwey oder mehrere mittlere Proportionallinien zwiſchen zwey gegebenen zu finden. Er ſchätzte dieſes ſo hoch, daß er es in einem Tempel mit einer Beyſchrift in Verſen aufhängen ließ, und auch in einem Schreiben an den König Ptolemäus die Einrichtung und den Gebrauch erklärte. Pappus nennt es ein Meſolabum. Nikomedes erfand die Conchoide, und ein Inſtrument zu ihrer Zeichnung, um dadurch unſere Aufgabe aufzulöſen. Er gebraucht ſie, um zwiſchen zwey

geraden Linien eine von gegebener Größe ſo zu legen, daß ihre Verlängerung durch einen gegebenen Punct geht. Sie dient ihm alſo das Verſuchen, das ohne ſie nöthig ſeyn würde, zu vermeiden. Die Conſtruction an ſich, auch ohne den Gebrauch der Conchoide, iſt ſinnreich, und die künſtlichſte von allen, ſo daß man Mühe hat, die Analyſis, wodurch der Urheber dazu gekommen iſt, zu errathen. Diokles gebrauchte die Ciſſoide, um durch ihren Durchſchnitt mit einer gegebenen geraden Linie zwey mittlere Proportionalen zu finden. Er fand durch eine Conſtruction mehrere Puncte derſelben, und zog durch dieſe eine krumme Linie, die für die Ciſſoide ſelbſt gelten konnte. Seine Abſicht ſcheint die Anwendung auf Wurfgeſchütze geweſen zu ſeyn. Er hat ſeine Auflöſung in einer Schrift περι πυριων (de pyriis) vorgetragen, in welcher vermuthlich diejenige Art von Wurfgeſchütz beſchrieben iſt, womit brennende Dinge geworfen wurden. Die Auflöſung, welche Pappus (mathem. Samml. 3. B. 5. S. und 8. B. 11. S.) giebt, iſt im Weſentlichen dieſelbe mit der von Diokles gegebenen, nur daß er den Punct, den dieſer durch die Ciſſoide findet, empiriſch mittelſt der Gleichheit zweyer Abſchnitte auf einer um einen feſten Pucnt gedrehten geraden Linie findet. Die Auflöſung des Sporus, welche Eutocius ebenfalls anführt, iſt von der nach Pappus gar nicht verſchieden.

In den neuern Zeiten iſt die Aufgabe von zwey mittlern ſtetigen Proportionalen oft vorgenommen worden. Orontius Finäus (Oronce Finée), Profeſſor der Mathematik zu Paris im 16ten Jahrhundert, glaubte auf mehrerley neue Arten die Aufgabe auflöſen zu können, aber irrig, welches Buteo und Nonius zeigten. Daſſelbe iſt mehrern begegnet, die nicht hinlängliche Kenntniß der Geometrie beſaſſen. Vieta gab eine Auflöſung mittelſt des Kreiſes und gerader Linien, wobey aber, wie in mehrern Conſtructionen der Alten eine gerade Linie durch einen gegebenen Punct ſo gezogen werden muß, daß der durch zwey gegebene Linien auf ihr abgeſchnittene Theil

dem Halbmeſſer des Kreiſes gleich ſey. (Opp. mathem. p. 242). Für den Fall, da die beiden gegebenen Linien ſich wie 1 : 2 verhalten, hat er noch eine beſondere Auflöſung (a. a. O. p. 354).

Die analytiſche Behandlung der Geometrie, welche Des-Cartes lehrte, gab die völlige Aufklärung über die Beſchaffenheit dieſer Aufgabe. Man ſah, daß ſie nur ein ſehr beſonderer Fall derjenigen iſt, jede Gleichung vom dritten oder vierten Grade durch eine geometriſche Conſtruction aufzulöſen, wozu man nothwendig einen Kegelſchnitt in Verbindung mit einem andern, oder bequemer mit einem Kreiſe gebraucht. Die alten Geometer haben allerdings eingeſehen, daß die Aufgabe von den beiden mittlern Proportionalen ein problema ſolidum ſey, wozu Linien aus einem Körper geſchnitten, das iſt Kegelſchnitte, erfordert werden, welches Pappus deutlich bezeuget (Collect. mathem. pag. 7.). Weil die Kegelſchnitte nicht leicht zu zeichnen ſind, ſo haben ſie, ſagt er, zu einer bequemen und ſchicklichen Conſtruction, die mit der Hand auszuführen iſt, verſchiedene ſinnreiche Werkzeuge erdacht. Wir ſehen den Grund deutlich ein aus der Beſchaffenheit der Gleichung, welche die Ordinaten oder Abſciſſen zu den Durchſchnittspuncten zweyer Linien angiebt. Soll eine Gleichung durch die Durchſchnitte zweyer Linien conſtruirt werden, ſo kann das Product der Exponenten ihrer Ordnungen nicht niedriger ſeyn, als der Grad der Gleichung. Die Gleichung für die erſte der mittlern Proportionalen zwiſchen a und b iſt $aab = z^3$. Denn es ſeyn die beiden erſten in der Progreſſion, a und z, ſo iſt die dritte $\frac{z^2}{a}$ und die vierte $\frac{z^3}{a^2}$. Heißt dieſe b, ſo iſt $a^2 b = z^3$. Man müßte eine Linie vom dritten Grade conſtruiren, wenn die andere eine gerade Linie ſeyn ſollte. Dieſes könnte nur auf ſehr beſchwerliche Art durch einzelne Puncte geſchehen. Man muß alſo zwey krumme Linien nehmen, zwey Kegelſchnitte, worunter auch der Kreis mit

begriffen ſeyn mag. Dieſe Linien ſind vom zweyten Grade, und dienen daher zwar ſchon zur Auflöſung der Gleichungen vom vierten Grade, aber auch derer vom dritten Grade, die durch die Multiplication mit der unbekannten Größe zu einer Gleichung vom vierten hinaufſteigen, wie $a^2 bz = z^4$. Eine Wurzel iſt $= 0$, ſo wie in der Conſtruction für den einen Durchſchnittspunct die Ordinate $= 0$ iſt.

Descartes gebraucht hier, wie überhaupt für Gleichungen vom dritten und vierten Grade, den Kreis mit der Parabel, weil der Kreis leicht beſchrieben wird. Sein Commentator, der P. Rabuel, zeigt (p. 530) wie man auf zweyerley Art die Hyperbel mit dem Kreiſe verbinden könne, und bringt auch die Conſtruction des Menächmus mit zwey Parabeln bey, die in Abſicht der Deduction die leichteſte iſt. De Slüſe zeigte in der Schrift, die er Meſolabum betitelte, wie die beiden Proportionalen auf mancherley Art durch zwey Kegelſchnitte gefunden werden können, ſynthetiſch nach der Form der alten Geometrie, (ſ. oben S. 61.). Einige ſolche Conſtructionen findet man in Wolfs Elementis Analyſeos finit. §. 624. Newton theilt in der Arithm. univerſali in Append. de aequat. conſtr. lineari drey Conſtructionen mit. Sie beruhen darauf, daß entweder zwiſchen zwey der Lage nach gegebenen geraden Linien, oder zwiſchen einem Kreiſe und einer geraden Linie, oder zwiſchen zwey Kreiſen eine gerade Linie ſo gelegt werde, daß ſie durch einen gegebenen Punct gehe. Bey den beiden erſten iſt die Conchoide anwendbar. Die erſte von allen dreyen iſt die eine von Vieta angegebene mit einer geringen Abänderung. Newton ſetzt auch hinzu, daß dieſe Conſtruction bekannt ſey.

Von den manchen Auflöſungen ſetze ich hierher eine vorzügliche unter den alten, die von Nikomedes gegebene, mit ihrem geometriſchen Beweiſe, und die einfachſte unter den neuern, nach Descartes mit der analytiſch-geometriſchen Herleitung.

Auf die Schenkel eines rechten Winkels EAF (Fig. 111. Tab. VII.) trage man die beiden äußern der vier

Proportionalen AB, AC von dem Scheitelpuncte aus, und vollende das Parallelogramm, ABDC. Die Linie AB halbire man in G, und AC in H. Durch D und G ziehe man die gerade DG, welche den nach K verlängerten Schenkel FA in K ſchneide. In H errichte man die ſenkrechte HL, und ziehe von C aus an dieſelbe die CL = AG. Durch K und L werde KL gezogen, und mit dieſer die Parallele CM. Durch L lege man die gerade LNF ſo, daß das zwiſchen CF und CM abgeſchnittene Stück NF = AG ſey. Dieſes geſchieht (wenn man ſich keines empiriſchen Verfahrens bedienen will) vermittelſt einer Conchoide, die aus dem Pol L über der Grundlinie CM mit der gegebenen AG beſchrieben wird. Nun ziehe man durch F und D die gerade FDE, welche den andern Schenkel des rechten Winkels in E ſchneidet, ſo ſind die Linien DC : CF : BE : BD, oder AB : CF : BE : AC in ſtetiger Proportion.

Es wird eine Übung in der geometriſchen Analyſis ſeyn, den Weg zu ſuchen, auf welchem Nikomedes zu ſeinem ſynthetiſchen Beweiſe gelangt ſeyn mag.

Nachdem das Parallelogramm ABDC gezeichnet iſt, ziehe man die Linie EDF willkührlich, ſo iſt DC : CF = EB : BD. Die vier Linien ſind immer proportionale, und in einem beſondern Falle ſtetige. Man ſetze, ſie ſeyn ſtetige proportionale, ſo iſt DC : CF = CF : EB, wodurch auch CF : EB = EB : BD iſt. Die erſte dieſer Proportionen giebt $CF^2 = DC . EB$. Um die beiden Theile der Gleichung ſich ähnlich zu machen, nehme man anſtatt des Verhältniſſes DC : CF das ihm gleiche AE : AF, ſo iſt AE : AF = CF : EB, und daher AE . BE = AF . CF. Halbirt man AB in G, und AC in H, ſo iſt $AE . BE + BG^2 = EG^2$, und $AF . CF + HC^2 = FH^2$, (Euklides II. 6.). Iſt AC kleiner als AB, ſo iſt HC kleiner als BG, und da AE . BE = AF . CF iſt, ſo iſt FH kleiner als EG. Um eine Gleichung zu behalten, addire man zu FH^2 ein Quadrat ſo groß, daß die Summe gleich EG^2 ſey. Zu dem Ende errichte man in H auf AC die ſenkrechte HL, und ſetze, daß $FH^2 + HL^2 = EG^2$

ſeyn. Es iſt alſo $AF.CF + HC^2 + HL^2 = AE.BE + BG^2$. Da die beiden Rechtecke $AF.CF$ und . . $AE.BE$ gleich ſind, ſo iſt $HC^2 + HL^2 = BG^2$. Zieht man CL, ſo iſt $HC^2 + HL^2 = CL^2$, alſo $CL = BG$, folglich iſt die Linie HL gegeben. Man ziehe FL, ſo iſt $FL = EG$. Es werde nun $NF = BG$ genommen, ſo iſt $LN = EB$. Nun ziehe man CN, und mit dieſer die parallele LK bis an die verlängerte FA, ſo iſt . . $FN:NL = FC:CK$, das iſt, $BG:BE = FC:CK$. Es iſt aber $BE:AB = (ED:DF =) AC:CF$, alſo iſt $BG:AB = AC:CK$. Da BG die Hälfte von AB iſt, ſo iſt AC die Hälfte von CK, oder $AK = AC$, alſo iſt K ein gegebener Punct. Da man nun von dem als gegeben angenommenen, aber geſuchten Puncte F auf einen gegebenen gekommen iſt, ſo kann man auch von dieſem zu jenem gelangen. Das giebt die von Nikomedes vorgetragene Conſtruction.

Die analytiſch-geometriſche Auflöſung iſt eine Conſtruction der Gleichung, $x^3 = aab$, oder der, $y^3 = abb$. Denn es ſeyn a und b die zwey gegebenen Größen, x die erſte der beiden mittlern Proportionalen, und y die zweyte, ſo iſt $a:x = x:y$ und $x:y = y:b$. Aus jener wird erhalten $x^2 = ay$; aus dieſer, $y^2 = bx$. Jene Gleichung quadrirt wird $x^4 = a^2 y^2$, alſo iſt $x^3 = aab$. Eben ſo iſt $y^3 = abb$. Die Conſtruction dieſer Gleichungen iſt in der allgemeinen begriffen, die in dem Artikel, Anwendung der Geometrie auf die Algebra, II. S. 134. gelehrt iſt. Aus jener folgt für dieſen Fall folgende Conſtruction der Gleichung $y^3 = abb$. Man zeichne (Fig. 112. Tab. VII.) eine Parabel AM, deren Parameter $= b$, und Axe AX iſt. Auf AX nehme man $AB = \frac{1}{2}b$, und ſetze auf AB in B die ſenkrechte $BC = \frac{1}{2}a$, beſchreibe aus C mit dem Halbmeſſer AC durch den Scheitel A einen Kreis, welcher die Parabel in M ſchneide, und ziehe durch M die ſenkrechte MP auf AX, ſo iſt $AP = x$; $PM = y$.

Aus dieſer Conſtruction folgen umgekehrt die beiden Gleichungen $x^2 = ay$ und $y^2 = bx$. Die letztere iſt die Gleichung für die angenommene Parabel. Man ziehe

CQ ſenkrecht auf MP, ſo iſt $MC^2 = (x - \frac{1}{2}b)^2 + (y - \frac{1}{2}a)^2 = x^2 - bx + \frac{1}{4}b^2 + y^2 - ay + \frac{1}{4}a^2$. Da $MC^2 = AC^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2$, und $bx = y^2$ iſt, ſo iſt $x^2 = ay$, welches die erſte jener Gleichungen iſt. Folglich ſind $a:x:y:b$ continuirlich proportionale.

Der geometriſche Beweis dieſer Auflöſung iſt folgender. Der Kreis ſchneide die Axe der Parabel außer in A noch in D, und die Ordinate außer in M noch in N, ſo iſt $AB = BD$, und $MQ = NQ$, da die ſenkrechte aus dem Mittelpuncte eines Kreiſes auf eine Chorde ſie halbirt. An der Parabel iſt $AD \times AP = PM^2$, da AD oder 2 AB der Parameter iſt. Es iſt, in dem Falle der Figur, $AD = AP + PD$, und $PM = 2PQ + PN$, daher iſt $APqu + AP \times PD = 2PQ \times PM + PM \times PN$. An dem Kreiſe iſt $AP \times PD = PM \times PN$; folglich iſt $APqu = 2PQ \times PM = 2CB \times PM$. Daraus iſt $2CB : AP = AP : PM$. An der Parabel iſt $AP : PM = PM : 2AB$. Folglich ſind $2CB : AP : PM : 2AB$ continuirlich proportionale.

Die Conſtruction befriedigt den Verſtand vollkommen. Die Ausübung verlangt ein leichteres Verfahren, das ſchärfer iſt als die Zeichnung ſinnlicher Linien ſeyn kann. Dieſes iſt die Ausziehung der Cubikwurzel aus aab und abb, wenn a und b als Zahlgrößen gegeben werden. Da dieſe den Alten Schwierigkeit machte, ſo waren ihnen geometriſche Conſtructionen nöthig. Dieſe zogen ſie auch wegen ihrer intellectuellen Vollkommenheit der arithmetiſchen Annäherung vor.

Montucla hiſtoire des recherches ſur la quadrature du Cercle — avec une addition concernant les problêmes de la duplication du cube et de la triſection de l'angle, à Paris 1754. 8.

Hiſtoria problematis de cubi duplicatione ſive de inveniendis duabus mediis continue proportionalibus inter duas datas, auct. N. Th. Reimer. Gottingae 1798. 222 pag. 8. iſt eine mit philologiſcher Gelehrſamkeit und mathematiſchen Einſichten abgefaßte Schrift. Die Auflöſungen der Alten ſind darin alle mit

mancherley Bemerkungen vorgetragen. Von den neuern iſt eine kurze Anzeige geſchehen.

Demonſtration, ſ. Beweis.

Denominator Fractionis, ſ. Nenner.

Denominator rationis iſt entweder einerley mit dem Exponenten eines Verhältniſſes, oder wie Wolf es annimmt, der Quotient von der Diviſion des größern Gliedes durch das kleinere, (Elem. Anal. §. 113.). Allein für allgemeine Rechnungen, in welchen die Quantität nicht beſtimmt wird, iſt dieſe Einſchränkung hinderlich.

Derivations-Rechnung iſt die Methode, eine Function einer oder mehrerer veränderlichen Größen ſo zu entwickeln, daß die Glieder der entwickelten Function nach einem beſtimmten Geſetze aus einander hergeleitet werden. Arbogaſt, Mitglied des franzöſiſchen National-Inſtituts, und Profeſſor der Mathematik zu Straßburg, hat dieſe Methode in einem beſondern Werke vorgetragen, und auf verſchiedene ſchwere Unterſuchungen angewandt. Der Titel iſt: Du calcul des dérivations, par L. F. A. Arbogaſt. à Strasbourg, An. VIII. (1800), 404 pag. gr. in — 4. Ich werde aus dieſem Werke die Derivations-Rechnung in ihrer Anwendung auf den leichteſten Fall erklären, und einige Erläuterungen hinzufügen. Das ſcharfſinnige und gelehrte Werk verdient von den Liebhabern der höhern Analyſis ganz und mit Fleiß ſtudirt zu werden.

1. Die Art, wie in einer Reihe von Größen jede beſtimmt wird, iſt in der allgemeinen Form verſchieden. Ein Glied der Reihe kann eine beſtimmte Function der Stelle deſſelben ſeyn. Es kann aber auch nach einem gewiſſen Geſetze aus dem vorhergehenden, aus einigen, ja aus allen vorhergehenden Gliedern beſtimmt werden. Dieſe Art der Verknüpfung unter den Gliedern einer Reihe iſt eine Derivation. Die Glieder der entwickelten Potenz eines Binomium $(a+b)^m$, ſind ein Beyſpiel einer einfachen Derivation. Zwey auf einander folgende Glieder der Potenz ſeyn $Pa^{m-n}b^n$ und $Qa^{m-n-1}b^{n+1}$, ſo iſt . . .

$Q = \frac{P(m-n)}{n+1}$. Ein anderes Beyſpiel dieſer Art von Derivation geben die Glieder der Reihe für den Bogen oder Winkel φ durch den Sinus, oder des Sinus durch den Winkel. Alle ſucceſſiven Differentiale einer Function, durch die conſtanten Differentiale der Functionalgröße dividirt, geben eine ſolche einfache Derivation. La Grange hat daher auch dieſe Quotienten dérivées genannt, und ein neues ſehr fruchtbares Syſtem von analytiſchen Operationen darauf gegründet. Wenn man zu einer Function einer veränderlichen Größe das Differential derſelben als Factor ſetzt, dann das Integral nimmt, mit dieſem wieder ſo verfährt, und ſo immer weiter geht, ſo entſteht auch eine Reihe von einfach derivirten Größen.

2. Die Derivation kann auch eine zuſammengeſetzte, mehr oder weniger verwickelte, ſeyn, wenn ſie nicht bloß nach einem gewiſſen Geſetze aus dem vorhergehenden Gliede einer Reihe geſchieht, ſondern dabey noch die Größen einer andern Reihe, ja auch mehrerer Reihen, eingeführt werden, doch ſo, daß die Verknüpfung derſelben mit den einfachen Derivationen nach einem gewiſſen Geſetze geſchehe, ſo viele Glieder der andern Reihe auch genommen werden müſſen. Ein Beyſpiel giebt die Potenz eines Polynomium, $p = a + bz + cz^2 + dz^3 +$ etc. Es ſey $p^m = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 +$ etc. ſo werden die Coefficienten in dieſer Reihe jeder aus allen vorhergehenden, und eben ſo vielen Coefficienten in der Wurzel nebſt dem gleichſtelligen in derſelben nach einem allgemeinen Geſetze hergeleitet, ſ. combinatoriſche Analyſis (52.). Die unabhängigen Werthe dieſer Coefficienten, welche das Verfahren in (35.) daſelbſt liefert, werden ebenfalls durch Vertauſchung jedes einzelnen Coefficienten a, b, c, d, etc. mit dem nächſtfolgenden b, c, d, e, etc. und Diviſion mit der Anzahl derſelben in jeder Combination hergeleitet. Z. B. es iſt

$$E = \mathfrak{A}a^{m-1}e + \mathfrak{B}a^{m-2}(2bd + c^2)$$
$$+ \mathfrak{C}a^{m-3}.3b^2c + \mathfrak{D}a^{m-4}b^4,$$

wo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, die Binomialcoefficienten in der mten

Potenz ſind. Durch die angegebene Vertauſchung und Diviſion wird der folgende Coefficient,

$$F = \mathfrak{A} a^{m-1} f + \mathfrak{B} a^{m-2}(2be + 2cd)$$
$$+ \mathfrak{C} a^{m-3}(3b^2 d + 3bc^2) + \mathfrak{D} a^{m-4}. 4b^3 c + \mathfrak{E} a^{m-5} b^5.$$

Die Derivationen der zweyten Art, oder die zuſammengeſetzten, ſind es, womit ſich die Derivationsrechnung vornämlich beſchäftigt.

3. Die leichteſte Aufgabe für die Derivationsrechnung iſt die Entwickelung einer unbeſtimmten Function einer zweytheiligen Größe. Dieſe geſchieht mittelſt des Taylorſchen Lehrſatzes. Die zweytheilige Größe ſey $\alpha + x$, wo α eine veränderliche Größe iſt, deren Differential unveränderlich genommen wird, und x eine von derſelben unabhängige Größe bedeutet. Irgend eine Function von beiden zuſammen, werde durch $F(\alpha + x)$ bezeichnet, ſo iſt

$$F(\alpha + x) = F\alpha + \frac{dF\alpha}{1.d\alpha} x + \frac{d^2F\alpha}{1.2.d\alpha^2} x^2$$
$$+ \frac{d^3F\alpha}{1.2.3.d\alpha^3} x^3 + \frac{d^4F\alpha}{1\ldots4.d\alpha^4} x^4 + \text{etc.}$$

Die Differentialquotienten hängen von der Beſchaffenheit der Function $F\alpha$ ab, und werden jeder aus dem vorhergehenden allein, auf eine gleichmäßige Art nach den Regeln der Differentialrechnung hergeleitet. Der Lehrſatz macht die Grundlage der Derivationsrechnung.

4. Es ſey x eine aus Potenzen einer andern unbeſtimmten Größe z mit unveränderlichen Coefficienten zuſammengeſetzte Reihe, und die entwickelte Function, $F(\alpha + x)$, werde nach den Potenzen dieſer Größe z geordnet, ſo beſtehen die Coefficienten von z theils aus den Coefficienten derſelben z in der Functionalgröße, theils aus den Differentialquotienten der Function $F\alpha$; aber die Factoren, welche aus jenen zuſammmengeſetzt werden, ſind von dieſen Quotienten unabhängig. Die Form jener Factoren iſt nicht allein unabhängig von der Relation und der Quantität der Coefficienten in der durch x bezeichneten Reihe, ſondern auch unabhängig von der Art und Beſchaffenheit der Function.

5. Die Differentialquotienten, $\frac{dF\alpha}{d\alpha}$, $\frac{d^2F\alpha}{d\alpha^2}$, $\frac{d^3F\alpha}{d\alpha^3}$; etc. bezeichnet Arbogaſt durch $\text{D}F\alpha$, $\text{D}^2F\alpha$, $\text{D}^3F\alpha$, u. ſ. f. wo der Buchſtab D aus der kleinen Capitalſchrift genommen iſt, um dieſe Operation von der Differentiation, und zugleich das Zeichen derſelben von dem Symbol D eines Coefficienten zu unterſcheiden. Die Operationen, wodurch die Größen $\text{D}F\alpha$, $\text{D}^2F\alpha$, $\text{D}^3F\alpha$, etc. die erſte aus $F\alpha$, die andern jede aus der nächſt vorhergehenden hergeleitet werden, nennt er **Derivationen**. Die Größen ſelbſt werden **derivirte** genannt.

6. Dieſem nach iſt $F(\alpha+x)=F\alpha+\frac{\text{D}F\alpha}{1}x$
$$+\frac{\text{D}^2F\alpha}{1.2}x^2+\frac{\text{D}^3F\alpha}{1.2.3}x^3+\frac{\text{D}^4F\alpha}{1.2.3.4}x^4+\text{etc.}$$

7. Wenn $F\alpha=\alpha$ genommen wird, ſo iſt . .
$\text{D}\alpha=\frac{d\alpha}{d\alpha}=1$. Arbogaſt ſetzt $d\alpha=1$, weil es unveränderlich iſt. Allein dieſes verurſacht einen Anſtoß, da ein Differential mit keiner endlichen Größe verglichen werden kann.

8. Die Functionalgröße ſey $\alpha+\beta x$, ſo iſt $F(\alpha+\beta x)=$
$F\alpha+\frac{\text{D}F\alpha}{1}\beta x+\frac{\text{D}^2F\alpha}{1.2}\beta^2x^2+\text{etc.}$ Um β mit in den derivirten Größen zu begreifen, gebraucht Arbogaſt das Derivationszeichen mit einem Puncte dahinter, folgendermaßen:

$$F(\alpha+\beta x)=F\alpha+\frac{\text{D}.F\alpha}{1}x+\frac{\text{D}^2.F\alpha}{1.2}x^2$$
$$+\frac{\text{D}^3.F\alpha}{1.2.3}x^3+\text{etc.}$$

ſo daß $\text{D}^n.F\alpha=\text{D}^nF\alpha.\beta^n$ iſt.

9. Eben dieſe Bezeichnung gebraucht Arbogaſt auch auf eine allgemeinere Art bey der Entwickelung der Function,

$$\varphi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}),$$

ſo daß die entwickelte Function folgendergeſtalt bezeichnet wird,

$$\varphi\alpha + \frac{D.\varphi\alpha}{1} x + \frac{D^2.\varphi\alpha}{1.2} x^2 + \frac{D^3.\varphi\alpha}{1.2.3} x^3 + \text{etc.}$$

wo die punctirten Derivationszeichen Zuſammenſetzungen aus den Coefficienten β, γ, δ, etc. und den derivirten von $\varphi\alpha$ bedeuten. Kurz, das Derivationszeichen ohne Punct zeigt eine einfache Derivation, das mit einem Puncte verbundene eine zuſammengeſetzte, oder eine Derivation der zweyten Art an.

10. Die Coefficienten in der entwickelten Reihe zu beſtimmen giebt Arbogaſt zwey Methoden an, deren erſtere er gegen die zweyte zurückſetzt, wiewohl ſie doch über die Derivation der Coefficienten ſehr guten Aufſchluß giebt. Das Verfahren iſt folgendes.

Von der Function $F(\alpha + \beta x)$ nehme man wieder eine Function, deren Beſchaffenheit durch φ bezeichnet wird, nämlich $\varphi F(\alpha + \beta x)$, wie z. B. log. sin ω eine ſolche Doppelfunction von dem Winkel ω iſt. Es iſt

$$\varphi F(\alpha + \beta x) = \varphi F\alpha + \frac{d\varphi F\alpha}{1.d\alpha} \beta x$$
$$+ \frac{d^2\varphi F\alpha}{1.2.d\alpha^2} \beta^2 x^2 + \text{etc.}$$

oder in Derivations-Ausdrücken,

$$\varphi F(\alpha + \beta x) = \varphi F\alpha + \frac{D.\varphi F\alpha}{1} x + \frac{D^2.\varphi F\alpha}{1.2} x^2$$
$$+ \frac{D^3.\varphi F\alpha}{1.2.3} x^3 + \text{etc.}$$

Da die Functionalgröße, nämlich $F(\alpha + \beta x)$, eine Reihe iſt, die in (8.) entwickelt worden, ſo hat man hier die Entwickelung einer Function einer vieltheiligen Größe zu machen, deren Glieder aber von einander abhängig ſind.

Man ſetze, um abzukürzen, $F\alpha = a$, ſo iſt nach der Bezeichnung in (9.)

$$\varphi\left(a + \frac{D.a}{1}x + \frac{D^2.a}{1.2}x^2 + \frac{D^3.a}{1.2.3}x^3 + \text{etc.}\right)$$

$$=$$

$$\varphi a + \frac{D.\varphi a}{1}x + \frac{D^2.\varphi a}{1.2}x^2 + \frac{D^3.\varphi a}{1.2.3}x^2 + \text{etc.}$$

Es ſind nun die Werthe von $D.\varphi a$; $D^2.\varphi a$, etc. durch $D\varphi a$, $D^3\varphi a$, etc. und durch $D.a$, $D^2.a$, etc auszudrucken, oder die zuſammengeſetzten Derivationen auf einfache zu bringen.

11. So wie in (8.) iſt $D.F\alpha = DF\alpha.\beta$, ſo iſt hier $D.\varphi a = D\varphi a.D.a.$ indem die in der Functionalgröße befindlichen, zu x^2 und den folgenden Potenzen gehörigen Coefficienten auf den von x in der entwickelten Function keinen Einfluß haben, und in Abſicht auf dieſen als nicht vorhanden zu betrachten ſind. Allein bey den folgenden Derivationen kommen die derivirten von $D.a$, nämlich D^2a; $D^3.a$, etc. allerdings nach einander in Rechnung, ſo weit als die mit ihnen in der Function $\varphi\left(a + \frac{D.a}{1}x + \text{etc.}\right)$ verbundenen Potenzen es erfordern. Das Verfahren iſt dem ähnlich, welches bey der Differentiation eines Products aus zwey oder mehreren veränderlichen Factoren angewandt wird. Die derivirte jedes Factors wird in das Product der übrigen Factoren multiplicirt.

Die derivirte $D^2.\varphi a$ entſteht durch eine Derivation der zweyten Art aus $D.\varphi a$, oder aus $D\varphi a.\ D.a$. Es iſt $D.(D.a) = D^2.a$, aus der Reihe für $F(\alpha + \beta x)$, und $D.D\varphi a = D^2\varphi a.\ D.a$, eben ſo wie aus $D.\varphi a$ hergeleitet iſt $D\varphi a.D.a$. Alſo iſt

$$D^2.\varphi a = D\varphi a.D^2.a + D^2\varphi a.(D.a)^2.$$

Auf ähnliche Art wird die derivirte $D^3.\varphi a$ gefunden. Es iſt $D.(D^2.a) = D^3.a$, und $D.(D.a)^2 = 2D.a \times D^2.a$,

indem für jeden der beiden Factoren der derivirte zu ſetzen iſt. Auch iſt $\text{D}.(\text{D}^2\varphi a) = \text{D}^3\varphi a.\text{D}.a.$ Folglich iſt

$$\begin{aligned}\text{D}^3.\varphi a &= \text{D}\varphi a.\text{D}^3.a + \text{D}^2\varphi a.\text{D}.a.\text{D}^2.a \\ &\quad + \text{D}^2\varphi a \times 2\text{D}.a.\text{D}^2.a + \text{D}^3\varphi a.(\text{D}.a)^3 \\ &= \text{D}\varphi a.\text{D}^3.a + 3\text{D}^2\varphi a.\text{D}.a.\text{D}^2.a \\ &\quad + \text{D}^3\varphi a.(\text{D}.a)^3.\end{aligned}$$

Ferner iſt

$$\begin{aligned}\text{D}^4.\varphi a &= \text{D}\varphi a.\text{D}^4.a + \text{D}^2\varphi a(4\text{D}.a.\text{D}^3.a + 3(\text{D}^2.a)^2) \\ &\quad + 6\text{D}^3\varphi a.(\text{D}.a)^2.\text{D}^2.a + \text{D}^4\varphi a.(\text{D}.a)^4.\end{aligned}$$

u. ſ. w.

12. Die Derivation der Größen $\text{D}^4.\varphi a$; $\text{D}^3.\varphi a$, u. ſ. f. jeder aus der nächſt vorhergehenden geſchieht auf eine ſehr einfache Art. Es werden nur die Derivirten $\text{D}.a$, $\text{D}^2.a$, $\text{D}^3.a$. etc. und $\text{D}\varphi a$, $\text{D}^2\varphi a$, $\text{D}^3\varphi a$, etc. mit den nächſtfolgenden vertauſcht; und den letztern wird bey der Vertauſchung noch $\text{D}.a$ als Factor beygefügt.

13. Zur deutlichen Einſicht in dieſe Herleitungen iſt es dienlich die Differentialrechnung, die bey dem ganzen Proceß zum Grunde liegt, unmittelbar anzuwenden. Arbogaſt hat dieſes nicht für nöthig gehalten.

Es iſt $\text{D}.\varphi a = \frac{d\varphi a}{d\alpha}\beta$, zufolge der Form des Taylorſchen Lehrſatzes für $\varphi F(\alpha+\beta x)$ in Derivations-Ausdrücken (10.). Da hier das Differential im Nenner nicht das Differential der Functionalgröße iſt, ſo drucke man dieſe Derivirte ſo aus: $\frac{d\varphi a}{da}\cdot\frac{da}{d\alpha}\beta$. Dieſe iſt nach der angenommenen Bezeichnung, $\text{D}\varphi a.\ \text{D}a.\beta$. Es iſt nämlich $\frac{d\varphi a}{da}$ der Coefficient von x in der Entwickelung der Function $\varphi(a+x)$, und $\frac{da}{d\alpha}$ oder $\frac{dF\alpha}{d\alpha}$ in der Entwickelung der Function $F(\alpha+x)$.

Um $D^2.\varphi a$ zu finden, bemerke man, daß dieſer Ausdruck $= \frac{d^2\varphi a}{d\alpha^2}.\beta^2$ iſt, zufolge der Form des Taylorſchen Lehrſatzes für $\varphi F(\alpha+\beta x)$. Nun iſt

$$\frac{d^2\varphi a}{d\alpha} = d\left(\frac{d\varphi a}{d\alpha}\right) = d\left(\frac{d\varphi a}{da}.\frac{da}{d\alpha}\right)$$

$$= \frac{d\varphi a}{da}.\frac{d^2 a}{d\alpha} + \frac{d^2\varphi a}{da}.\frac{da}{d\alpha}.$$ Beide Factoren der Größe, die differentirt wird, ſind endliche Functionen, ohne Differentiale, daher die Veränderlichkeit von $d\alpha$ nicht in Betracht kommt, indem der Diviſor, $d\alpha$, nur anzeigt, daß dieſes Differential durch die Diviſion weggeſchafft ſey, Alſo iſt

$$\frac{d^2\varphi a}{d\alpha^2} = \frac{d\varphi a}{da}.\frac{d^2 a}{d\alpha^2} + \frac{d^2\varphi a}{da^2}.\frac{da^2}{d\alpha^2}.$$

Hier iſt $\frac{d^2\varphi a}{da^2}$ der Coefficient von x^2 in der Entwickelung der Function $\varphi(a+x)$, ſo wie $\frac{d\varphi a}{da}$ der von x in derſelben iſt, wenn da als conſtant betrachtet wird. In dieſer Rückſicht wird dieſer durch $D\varphi a$, jener durch $D^2\varphi a$ bezeichnet. Eben ſo ſind $\frac{da}{d\alpha}$ und $\frac{d^2 a}{d\alpha^2}$, jener der Coefficient von x, dieſer von x^2 in der Entwickelung von $F(\alpha+x)$, wenn $d\alpha$ unveränderlich genommen wird, und in dieſer Rückſicht werden ſie durch $DF\alpha$ und $D^2F\alpha$ oder $D\alpha$ und $D^2 a$ bezeichnet. Es iſt nun

$$D^2.\varphi a = (D\varphi a.D^2 a + D^2\varphi a.Da^2)\beta^2.$$

Auf dieſe Art wird auch $D^3.\varphi a$ gefunden. Es iſt nämlich dieſe $= \frac{d^3\varphi a}{d\alpha^3}\beta^3$, (10.). Nun iſt

$$\frac{d^3\varphi a}{d\alpha^2} = d\left(\frac{d^2\varphi a}{d\alpha^2}\right) = \frac{d\varphi a}{da} \cdot \frac{d^3 a}{d\alpha^3}$$

$$+ \frac{d^2\varphi a}{da} \cdot \frac{d^2 a}{d\alpha^2} + \frac{d^2\varphi a}{da^2} \cdot \frac{2da.d^2 a}{da^2}$$

$$+ \frac{d^3\varphi a}{da^2} \cdot \frac{da^2}{d\alpha^2},$$ durch Differentiation des gleich vorher gefundenen Werthes von $\frac{d^2\varphi a}{d\alpha^2}$. Wegen $\frac{d^2\varphi a}{da^2}$ iſt daſſelbe zu bemerken, was vorher wegen $\frac{d\varphi a}{da}$ erinnert iſt; es iſt aus $\frac{d\varphi a}{da}$, einer endlichen Function von a, die keine Differentiale enthält, entſtanden, und das Differential da iſt aus dem Differential dieſer Function weggeſchafft. Wir haben nun

$$\frac{d^3\varphi a}{d\alpha^3} = \frac{d\varphi a}{da} \cdot \frac{d^3 a}{d\alpha^3} + \frac{3d^2\varphi a}{da^2} \cdot \frac{da.d^2 a}{d\alpha^3}$$
$$+ \frac{d^3\varphi a}{da^3} \cdot \frac{da^3}{d\alpha^3},$$

und daher

$$\mathrm{D}^3.\varphi a = (\mathrm{D}\varphi a.\mathrm{D}^3 a + 3\mathrm{D}^2\varphi a.\mathrm{D}a.\mathrm{D}^2 a$$
$$+ \mathrm{D}^3\varphi a.\mathrm{D}a^3)\beta^3.$$

Wenn man in dieſen Formeln $\mathrm{D}a.\beta$ mit $\mathrm{D}.a$; $\mathrm{D}^2 a.\beta^2$ mit $\mathrm{D}^2.a$; $\mathrm{D}^3 a.\beta^3$ mit $\mathrm{D}^3.a$ vertauſcht, ſo erhält man die vorher durch Derivation gefundenen Werthe.

14. Nun ſoll die Function

$$\varphi\left(a + bx + \frac{c}{1.2}x^2 + \frac{d}{1.2.3}x^3 + \text{etc.}\right)$$

in eine Reihe von der Form

$$A + Bx + \frac{C}{1.2}x^2 + \frac{D}{1.2.3}x^3 + \frac{E}{1.2.3.4}x^4 + \text{etc.}$$

verwandelt werden.

Die Werthe von B, C, D, E, etc. laſſen ſich aus den vorher für $\text{D}.\varphi a$; $\text{D}^2.\varphi a$; $\text{D}^3.\varphi a$; etc. gefundenen herleiten. Denn wenn $b = \text{D}.a$; $c = \text{D}^2.a$; $d = \text{D}^3.a$ u. ſ. f. iſt, ſo iſt, da $A = \varphi a$ bleibt, aus (11).

$$B = \text{D}\varphi a.b$$

$$C = \text{D}\varphi a.c + \text{D}^2\varphi a.b^2$$

$$D = \text{D}\varphi a.d + \text{D}^2\varphi a.3bc + \text{D}^3\varphi a.b^3$$

$$E = \text{D}\varphi a.e + \text{D}^2\varphi a(4bd + 3c^2) + \text{D}^3\varphi a.6b^2c + \text{D}^4\varphi a.b^4$$

etc.

Nun kommt es, zufolge der Bemerkung in (4.), nicht auf die beſtimmte Quantität und Relation der Coefficienten von x in der zu entwickelnden Function an, ſondern die Form der Coefficienten in der entwickelten Function bleibt, wie auch jene ſich verhalten mögen. Alſo gilt die gefundene Entwickelung allgemein, wie auch die gegebene Function beſchaffen ſeyn mag.

15. Man ſieht nun, wie auch in dieſer allgemeinen Form die Größen B, C, D, E, etc. die erſte aus A oder φa, die andern jede aus der vorhergehenden entſtehen. Sie ſind wie Derivirte zu betrachten, jede in Abſicht auf die vorhergehende, indem b, c, d, e, etc. auch als ſolche angeſehen werden.

Bey den ſucceſſiven Derivationen von φa wird jedesmahl der Factor b zugeſetzt. So kommt für $\text{D}\varphi a$ die derivirte $\text{D}^2\varphi a.b$; für $\text{D}^2\varphi a$ eben ſo $\text{D}^3\varphi a.b$, u. ſ. f.

16. Man habe nun die Function

$$\varphi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.})$$

in eine Reihe von der Form

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}$$

zu verwandeln, ſo iſt, wenn die gehörigen Subſtitutionen in (14.) gemacht werden,

$$A = \varphi\alpha$$

$$B = D\varphi\alpha . \beta$$

$$C = D\varphi\alpha . \gamma + \frac{D^2\varphi a}{1 . 2}\beta^2$$

$$D = D\varphi\alpha . \delta + \frac{D^2\varphi\alpha}{1 . 2} . 2\beta\gamma + \frac{D^3\varphi a}{1 . 2 . 3}\beta^3$$

$$E = D\varphi\alpha . \varepsilon + \frac{D^2\varphi\alpha}{1 . 2}(2\beta\delta + \gamma^2)$$

$$+ \frac{D^3\varphi\alpha}{1 . 2 . 3} . \beta^2 2\gamma + \frac{D^4\varphi\alpha}{1 . 2 . 3 . 4} . \beta^4$$

u. ſ. f.

17. Dieſe Werthe der Coefficienten treffen mit denen in dem Artikel, combinatoriſche Analyſis (43.) überein, wenn die gehörigen Vertauſchungen der Buchſtabenzeichen gemacht werden. Für die Derivationen $D\varphi\alpha$, $D^2\varphi\alpha$, $D^3\varphi\alpha$, etc. kommen dort α, 2β, 6γ, etc. Hier iſt nun auch der Grund der Bemerkung gefunden, die daſelbſt (46.) über die Derivation der ſchon gefundenen Formen der Coefficienten gemacht ward.

18. Arbogaſt findet die Coefficienten B, C, D, etc. noch auf eine zweyte Art durch ſucceſſive Entwickelung der Derivirten, die entſtehen, wenn die ganze Reihe, $\beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 +$ etc. als der zweyte Theil eines Binomium betrachtet wird. Die zu entwickelnde Function iſt

$$\varphi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.}).$$

Man ſetze

$$\pi = \beta + \gamma x + \delta x^2 + \varepsilon x^3 + \text{etc.}$$

ſo iſt, nach dem Taylorſchen Lehrſatze,

$$\varphi(\alpha + \pi x) = \varphi\alpha + D\varphi a.\pi x + \frac{D^2\varphi\alpha}{1.2}.\pi^2 x^2$$

$$+ \frac{D^3\varphi\alpha}{1.2.3}.\pi^3 x^3 + \text{etc. (I.)}$$

Hier wird die Functionalgröße als ein Binomium behandelt. Betrachtet man ſie als eine polynomiſche, ſo iſt, nach der Bezeichnung in (9.), die entwickelte Function

$$\varphi\alpha + \frac{D.\varphi\alpha}{1}x + \frac{D^2.\varphi\alpha}{1.2}x^2 + \frac{D^3.\varphi\alpha}{1.2.3}x^3$$

$$+ \text{etc. (II.)}$$

Subſtituirt man in jener erſtern Reihe für die Potenzen von πx ihre entwickelten Werthe, ſo erhält man die Werthe der Coefficienten in der zweyten Reihe. Anſtatt die Potenzen von πx nach dem polynomiſchen Lehrſatze zu entwickeln, behandelt Arbogaſt ſie wie Functionen einer polynomiſchen Größe, welchen er die Form in (9.) giebt. Es iſt nämlich

$$\pi = \beta + \frac{D.\beta}{1}x + \frac{D^2.\beta}{1.2}x^2 + \frac{D^3.\beta}{1.2.3}x^3 + \text{etc.}$$

$$\pi^2 = \beta^2 + \frac{D.\beta^2}{1}x + \frac{D^2.\beta^2}{1.2}x^2 + \frac{D^3.\beta^2}{1.2.3}x^3 + \text{etc.}$$

$$\pi^3 = \beta^3 + \frac{D.\beta^3}{1}x + \frac{D^2.\beta^3}{1.2}x^2 + \frac{D^3.\beta^3}{1.2.3}x^3 + \text{etc.}$$

etc. etc.

Bey der Subſtitution dieſer Reihen in (I.) nehme man die Glieder, welche dieſelbe Potenz von x enthalten, zuſammen, ſo werden dadurch die Coefficienten in (II.) erhalten. Es iſt nämlich

$$D . \varphi\alpha = D\varphi\alpha . \beta$$

$$\frac{D^2 . \varphi\alpha}{1 . 2} = D\varphi\alpha . \frac{D . \beta}{1} + \frac{D^2\varphi\alpha}{1 . 2} . \beta^2$$

$$\frac{D^3 . \varphi\alpha}{1 . 2 . 3} = D\varphi\alpha . \frac{D^2 . \beta}{1 . 2} + \frac{D^2\varphi\alpha}{1 . 2} . \frac{D . \beta^2}{1} + \frac{D^3\varphi\alpha}{1 . 2 . 3} . \beta^3$$

$$\frac{D^4 . \varphi\alpha}{1 .. 4} = D\varphi\alpha . \frac{D^3 . \beta}{1 . 2 . 3} + \frac{D^2\varphi\alpha}{1 . 2} . \frac{D^2\beta^2}{1 . 2} + \frac{D^3\varphi\alpha}{1 . 2 . 3} . \frac{D . \beta^3}{1} + \frac{D^4\varphi\alpha}{1 .. 4} . \beta^4$$

$$\frac{D^5 . \varphi\alpha}{1 .. 5} = D\varphi\alpha . \frac{D^4 . \beta}{1 .. 4} + \ldots . + \frac{D^4\varphi\alpha}{1 .. 4} . \frac{D . \beta^4}{1} + \frac{D^5\varphi\alpha}{1 .. 5} . \beta^5$$

etc. etc.

19. Um die Derivationen von β und deren Potenzen zu machen, betrachte man β als das erſte Glied des Polynomium $\beta + \gamma x + \delta x^2 + \varepsilon x^2 +$ etc. und ſetze dem zu folge in den jetzt gefundenen Formeln $\varphi\beta$ für $\varphi\alpha$, und γ für β. Nun iſt $\varphi\beta$ eine Potenz von β oder β ſelbſt. Es ſey $\varphi\beta + \beta^n$, ſo iſt $D\varphi\beta = n\beta^{n-1}$; $D^2\varphi\beta = n . n - 1 . \beta^{n-2}$; $D^3\varphi\beta = n . n - 1 . n - 2 . \beta^{n-3}$; u. ſ. f.

Dadurch iſt für $\varphi\beta = \beta$, und $n = 1$, $D\varphi\beta = 1$, und alle folgenden Derivirten von $\varphi\beta$ ſind $= 0$, ſo daß $D . \beta = 1 . \gamma$; $\frac{D^2 . \beta}{1 . 2} = 1 . D . \gamma$; $\frac{D^3 . \beta}{1 . 2 . 3} = 1 . \frac{D^2 . \gamma}{1 . 2}$; $\frac{D^4 . \beta}{1 .. 4} = 1 . \frac{D^3 . \gamma}{1 . 2 . 3}$, u. ſ. f.

Ferner nehme man $\varphi\beta = \beta^2$, ſo iſt $D\varphi\beta = 2\beta$; $D^2\varphi\beta = 2 . 1$; $D^3\varphi\beta = 0$; und dadurch iſt aus den Formeln in (18.)

$$\mathrm{D}.\beta^2 = 2\beta\gamma$$

$$\frac{\mathrm{D}^2.\beta^2}{1.2} = 2\beta.\mathrm{D}.\gamma + \frac{2.1}{1.2}\gamma^2$$

$$\frac{\mathrm{D}^3.\beta^2}{1.2.3} = 2\beta.\frac{\mathrm{D}^2.\gamma}{1.2} + \frac{2.1}{1.2}.\mathrm{D}.\gamma^2$$

$$\frac{\mathrm{D}^4.\beta^2}{1..4} = 2\beta.\frac{\mathrm{D}^3.\gamma}{1.2.3} + \frac{2.1}{1.2}.\frac{\mathrm{D}^2.\gamma^2}{1.2}$$

etc. etc.

Dann nehme man $\varphi\beta = \beta^3$, ſo iſt $\mathrm{D}\varphi\beta = 3\beta^2$; $\mathrm{D}^2\varphi\beta = 3.2\beta$; $\mathrm{D}^3\varphi\beta = 3.2.1.\beta$, und dadurch

$$\mathrm{D}.\beta^3 = 3\beta^2\gamma$$

$$\frac{\mathrm{D}^2.\beta^3}{1.2} = 3\beta^2.\mathrm{D}.\gamma + \frac{3.2.\beta}{1.2}.\gamma^2$$

$$\frac{\mathrm{D}^3.\beta^3}{3} = 3\beta^2.\frac{\mathrm{D}^2.\gamma}{1.2} + \frac{3.2\beta}{1.2}.\mathrm{D}.\gamma^2$$

$$+ \frac{3.2.1}{1.2.3}.\gamma^3$$

etc. etc.

Noch nehme man $\varphi\beta = \beta^4$, ſo iſt $\mathrm{D}\varphi\beta = 4\beta^3$; . . . . $\mathrm{D}^4\varphi\beta = 4.3.2.1$, und

$$\mathrm{D}.\beta^4 = 4\beta^3\gamma$$

$$\frac{\mathrm{D}^2.\beta^4}{1.2} = 4\beta^3.\mathrm{D}.\gamma + \frac{4.3\beta^2}{1.2}.\gamma^2$$

$$\frac{\mathrm{D}^3.\beta^4}{1.2.3} = 4\beta^3.\frac{\mathrm{D}^2.\gamma}{1.2} + \frac{4.3\beta^2}{1.2}.\mathrm{D}.\gamma^2$$

$$+ \frac{4.3.2\beta}{1.2.3}\gamma^3$$

$$\frac{\mathrm{D}^4.\beta^4}{1...4} = 4\beta^3.\frac{\mathrm{D}^3.\gamma}{1.2.3} + \frac{4.3\beta^2}{1.2}.\frac{\mathrm{D}^2.\gamma^2}{1.2}$$

$$+ \frac{4.3.2\beta}{1.2.3}.\mathrm{D}.\gamma^3 + \frac{4..1}{1..4}.\gamma^4$$

etc. etc.

Auf ähnliche Art werden die Derivationen von den folgenden Potenzen gefunden.

20. Bey den Derivationen von γ und deren Potenzen betrachte man γ als erſtes Glied des Polynomium $\gamma + \delta x + \varepsilon x^2 +$ etc. Folglich hat man nur in den jetzt gefundenen Formeln γ für β, und δ für γ zu ſetzen. Auf ähnliche Art werden daraus die Derivationen von δ und deren Potenzen gemacht, hieraus die von ε u. ſ. f.

Es iſt alſo

I. $\text{D}.\beta = \gamma$; $\frac{\text{D}^2.\beta}{1.2} = \delta$; $\frac{\text{D}^3.\beta}{1.2.3} = \varepsilon$;

$\frac{\text{D}^4.\beta}{1..4} = \zeta$; etc.

II. $\text{D}.\beta^2 = 2\beta\gamma$; $\frac{\text{D}^2.\beta^2}{1.2} = 2\beta\delta + \gamma^2$

$\frac{\text{D}^3.\beta^2}{1.2.3} = 2\beta\varepsilon + 2\gamma\delta$; $\frac{\text{D}^4.\beta^2}{1..4} = 2\beta\zeta + 2\gamma\varepsilon + \delta^2$.

etc.

III. $\text{D}.\beta^3 = 3\beta^2\gamma$; $\frac{\text{D}^2.\beta^3}{1.2} = 3\beta^2\delta + 3\beta\gamma^2$

$\frac{\text{D}^3.\beta^3}{1.2.3} = 3\beta^2\varepsilon + 3\beta.2\gamma\delta + \gamma^3$;

$\frac{\text{D}^4.\beta^3}{1..4} = 3\beta^2\zeta + 3\beta(2\gamma\varepsilon + \delta^2) + 3\gamma^2\delta$

etc.

IV. $\text{D}.\beta^4 = 4\beta^3\gamma$; $\frac{\text{D}^2.\beta^4}{1.2} = 4\beta^3\delta + 6\beta^2\gamma^2$;

$\frac{\text{D}^3.\beta^4}{1.2.3} = 4\beta^3\varepsilon + 6\beta^2.2\gamma\delta + 4\beta\gamma^3$;

$\frac{\text{D}^4.\beta^4}{1..4} = 4\beta^3\zeta + 6\beta^2(2\gamma\varepsilon + \delta^2) + 4\beta.3\gamma^2\delta + \gamma^4$

etc.

21. Man bezeichne die aus $\varphi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 +$ etc.) entwickelte Function durch $\text{A} + \text{B}x$

$+ Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 +$ etc. ſo daß $B = D.\varphi\alpha$;
$C = \frac{D^2.\varphi a}{1.2}$; $D = \frac{D^3.\varphi\alpha}{1.2.3}$; u. ſ. f. Es iſt nun, wenn in den Werthen der Coefficienten (18.) die entwickelten Werthe (20.) geſetzt werden,

$$A = \varphi\alpha$$

$$B = D\varphi\alpha.\beta$$

$$C = D\varphi\alpha.\gamma + \frac{D^2\varphi\alpha}{1.2}\beta^2$$

$$D = D\varphi\alpha.\delta + \frac{D^2\varphi\alpha}{1.2}.2\beta^5\gamma + \frac{D^3\varphi a}{1.2.3}.\beta^3$$

$$E = D\varphi\alpha.\varepsilon + \frac{D^2\varphi\alpha}{1.2}(2\beta\delta + \gamma^2) + \frac{D^3\varphi\alpha}{1.2.3}.3\beta^2\gamma + \frac{D^4\varphi\alpha}{1..4}.\beta^4$$

$$F = D\varphi\alpha.\zeta + \frac{D^2\varphi\alpha}{1.2}(2\beta\varepsilon + 2\gamma\delta) + \frac{D^3\varphi\alpha}{1.2.3}(3\beta^2\delta + 3\beta\gamma^2) + \frac{D^4\varphi\alpha}{1..4}.4\beta^3\gamma + \frac{D^5\varphi\alpha}{1..5}.\beta^5$$

u. ſ. f. eben ſo, wie in (16.) gefunden iſt.

22. Dieſes Verfahren iſt weit kürzer als das von Arbogaſt gebrauchte. Er entwickelt eine Derivirte von β^n erſtlich zu Derivirten von γ und deren Potenzen, dieſe wieder zu Derivirten von δ u. ſ. f., bis keine Derivationen mehr übrig bleiben. Hier findet er bey der Vergleichung der letzten Entwickelungen von . . $\frac{D^5.\beta^4}{1..5}$ und $\frac{D^6.\beta^4}{1..6}$ das Geſetz der Formation, welches in dem Artikel, combinatoriſche Analyſis (45.) angemerkt und auch bewieſen iſt. Der Beweis, den A. giebt, iſt verwickelt. Hernach zeigt er ein leichteres Verfahren, die Derivirten, wie z. B. $D.\beta^4$; $\frac{D^2.\beta^3}{1.2}$; $\frac{D^3 2\beta^4}{1.2.3}$, u. ſ. f.

jede aus den vorhergehenden hergeleitet werden können. Der Weg dazu iſt etwas lang, und das Verfahren ſelbſt beruht auf einer Induction.

23. Bequemer und natürlicher iſt es, die unbeſtimmte Potenz eines Polynomium durch die Combinationslehre zu finden, und die Formel für dieſelbe zu den Subſtitutionen bey den Potenzen von π (18.) anzuwenden, wie es in dem Artikel, combinatoriſche Analyſis (43.), geſchehen iſt. Arbogaſt hat ein durchgängig gleichförmiges Verfahren beobachten wollen, und hat deswegen auch den polynomiſchen Lehrſatz nach ſeiner Methode behandelt.

24. Dieſer Analyſt läßt zwar der Hindenburgiſchen Combinations-Rechnung Gerechtigkeit wiederfahren, allein er giebt doch ſeiner Methode in Abſicht auf die Principien, die Rechnungsweiſe und die Bezeichnung den Vorzug.

Die Principien der Derivations-Rechnung ſeyn mehr befaſſend, da ſie mit der allgemeinen Theorie der Functionen verknüpft iſt, und einen Zweig derſelben ausmacht.

Das von ihm angewandte Verfahren bey der Entwickelung der Functionen ſey leichter, auch mehr analytiſch, als das combinatoriſche. Nach dem letztern würden die von ihm ſo genannten Polynomialgrößen (die aus β, γ, δ, ε, etc. zuſammengeſetzten) ſtückweiſe gefunden, zuerſt die Literalproducte, dann die numeriſchen Factoren. Hingegen gebe ſein Verfahren die vollſtändigen Terminos der Entwickelungen durch eine zuſammenhangende Rechnung, Literalgrößen mit den numeriſchen Coefficienten zugleich, und die Polynomialgrößen eine von der andern hergeleitet, ganz reducirt (durch β, γ, δ, ε, etc. dargeſtellt), ſo daß es faſt nichts als die Mühe des Schreibens erfordere; man habe weder zum voraus berechneter Combinationstafeln, noch anderer, gleichſam mechaniſcher Hülfsmittel, durch Vertheilung in Fächer, nöthig, um die Polynomialgrößen zu berechnen.

25. Inzwiſchen iſt zu bemerken, daß die Derivations-Rechnung ihren Weg durch die Differential-Rechnung nimmt, oder doch der Methoden dieſer Rechnung benöthigt iſt, um die Derivationen der Function $\varphi\,\alpha$ bequem zu

finden. Die Derivations-Größen ſind nichts anders als Differential-Quotienten. Es möchten daher die Gränzen der beiden Haupttheile der Analyſis mit einander vermiſcht werden, oder wenigſtens bliebe in einem Syſtem, wo die Derivations-Rechnung vor der Differentialrechnung voran gienge, das Verfahren der ſucceſſiven Derivationen etwas dunkel. Hingegen iſt die Combinations-Rechnung in ihren Anfängen ſehr einfach, ſo wie in der Ausübung leicht, und ſtellt ſich gleich bey dem Eingange in die Analyſis als eine ganz unabhängige Methode dar. Sie dient als fruchtbares Hülfsmittel bey allen Operationen des Multiplicirens und des Zerlegens in gleiche oder ungleiche Factoren; und eben daher, weil ſie alle Vorarbeiten liefert, kann ſie zur Entwickelung der Functionen, mit Zuziehung des Taylorſchen Lehrſatzes, ſehr bequem gebraucht werden. Daß die Literalproducte der Größen und die numeriſchen Coefficienten abgeſondert von einander gefunden werden, iſt nicht als ein Umſchweif anzuſehen; es ſind ganz verſchiedene Operationen. Die Literalproducte ſind die verſchiedenen Gattungen der Combinationen, die in einem Factor zuſammen genommen werden, die numeriſchen Coefficienten zeigen die möglichen Verſetzungen der Elemente in den Combinationen an, und beide zuſammen geben alle Variationen der Verbindungen der Elemente. Es iſt daher etwas ſehr weſentliches, den Urſprung der numeriſchen Coefficienten, als Verſetzungszahlen, zu kennen, welches die Derivations-Rechnung nicht erfahren läßt. In der That iſt es bequemer, zuerſt die Combinationen zu bilden, und dann die Verſetzungszahlen beyzufügen, als wenn man, um beides zugleich zu thun, die Aufmerkſamkeit theilen muß. Allein die combinatoriſche Rechnung kann, eben ſo gut wie die Derivations-Rechnung, das Geſetz angeben, nach welchem die Combinationen der Coefficienten aus der Functionalgröße und ihre numeriſchen Begleiter in der entwickelten Function folgweiſe aus einem Coefficienten in den andern hergeleitet werden, wie es in der combinat. Analyſis (45.) geſchehen iſt. Zugleich ſieht man den Urſprung ſowohl der Combinationen als ihrer numeriſchen

Begleiter durch ſie deutlich ein. Wenn übrigens die Combinationslehre bey ihrer Anwendung auf die Analyſis nicht ſelten zum voraus berechnete Combinationstafeln aufſtellt, auch wohl die Größen zuweilen in Fächer vertheilt, ſo geſchieht das keineswegs deswegen, als ob die combinatoriſche Methode ſolche gleichſam mechaniſche Hülfsmittel nicht entbehren könnte. Die combinatoriſche Entwickelung und Darſtellung der Größen iſt immer leicht, und kann gleich da vorgenommen werden, wo man ſie braucht. Vorgearbeitete Tafeln haben die Bequemlichkeit anderer Tafeln, und ſind auch zur Vergleichung brauchbar; die Vertheilung in Fächer dient dazu, den Zuſammenhang mehrerer Gröſſen untereinander anſchaulich darzuſtellen und nachzuweiſen.

26. Arbogaſt wendet die Derivationsrechnung auf verſchiedene ſchwierige analytiſche Entwickelungen an. Er zeigt, wie Producte von mehrern Polynomien und Functionen eines Polynomium gemacht, und wie Functionen von zwey oder mehrern einfachen Polynomien entwikkelt werden. Er erweitert ſeine Methode auf Functionen zweyer oder mehrerer veränderlichen Größen, und macht die Anwendung davon theils auf die rücklaufenden Reihen, ſowohl einfache, als gedoppelte oder dreyfache, theils auf die allgemeine Umkehrung der Reihen. Zuletzt zeigt er ihren Gebrauch in der Differential- und Integralrechnung. Noch fügt er nützliche Anwendungen derſelben bey, die ſich bey den Reihen mit Sinus oder Coſinus von Winkeln in arithmetiſcher Progreſſion, bey Producten von Factoren in einer ſolchen Fortſchreitung, und in der Differenzen-Rechnung machen laſſen.

27. Eine der Derivations-Rechnung ähnliche Methode hat ſchon von Segner in den Elementis Anal. Infin. P II. §. 543. angewandt, ein Polynomium auf eine unbeſtimmte Potenz zu erheben. Sie verdient hier mitgetheilt zu werden, aber auf eine deutlichere, kürzere und allgemeinere Art, als ſie daſelbſt vorgetragen iſt.

28. Es ſey $Z = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon \zeta^4 +$ etc. wo α, β, γ, δ, ε, etc. unabhängige Größen ſind. Es

ſoll irgend eine Function von Z durch die gleichnahmige Function von α, und durch die gegebenen Größen, nach Potenzen von z geordnet, ausgedruckt werden.

Zu dem Ende ſehe man z als die endliche Veränderung Δx einer veränderlichen x an, und α als eine Function von x. Den andern Größen, β, γ, δ, ε, etc. gebe man man abhängige Werthe, nämlich $\beta = \frac{d\alpha}{dx}$;

$$\gamma = \frac{d\beta}{2dx}; \delta = \frac{d\gamma}{3dx}; \varepsilon = \frac{d\delta}{4dx}; \zeta = \frac{d\varepsilon}{5dx};$$

u. ſ. f. Alſo iſt Z eine Function $y + \Delta y$ von $x + \Delta x$, wenn y die gleichnamige von x iſt.

Nun iſt nach dem Tayloriſchen Lehrſatze

$$y + \Delta y = y + \frac{dy}{dx} . \Delta x + \frac{d^2 y}{1.2 dx^2} . \Delta x^2$$
$$+ \frac{d^3 y}{1.2.3 dx^3} . \Delta x^3 + \frac{d^4 y}{1..4 dx^4} . \Delta x^4 + \text{etc.}$$

Dadurch iſt $y = \alpha$, und die ganze Reihe iſt mit der Reihe für Z dieſelbe, wenn $\Delta x = z$ genommen wird, bey der für jetzt eingeſchränktern Bedeutung von β, γ, δ, etc.

Es ſey nun $\varphi(y + \Delta y)$ irgend eine zu entwickelnde Function von $y + \Delta y$. Man ſetze

$$\varphi(y + \Delta y) = A + B\Delta x + C\Delta x^2 + D\Delta x^3 + E\Delta^4 + \text{etc.}$$

wo A, B, C, D, etc. Functionen von x ſind. Da $\varphi(y + \Delta y) = \varphi y + \Delta . \varphi y$, ſo kommt anſtatt y in der obigen Formel hier φy, und anſtatt Δy daſelbſt hier $\Delta . \varphi y$, folglich iſt $A = \varphi y$; $B = \frac{dA}{dx}$; $C = \frac{dB}{2dx}$;

$$D = \frac{dC}{3dx}; E = \frac{dD}{4dx}, \text{ u. ſ. f.}$$

Da $y = \alpha$, ſo iſt $A = \varphi\alpha$, und $B = \frac{d\varphi\alpha}{dx}$, oder

$$B = \frac{d\varphi\alpha}{d\alpha} . \frac{d\alpha}{dx}, \text{ das iſt, } B = \frac{d\varphi\alpha}{d\alpha} . \beta.$$

Da $\frac{d\varphi\alpha}{d\alpha}$ eine endliche Größe iſt, ſo iſt . . .

$d.\frac{d\varphi\alpha}{d\alpha} = \frac{d^2\varphi\alpha}{d\alpha}$, und es iſt $dB = \frac{d\varphi\alpha}{d\alpha}.d\beta$

$+\frac{d^2\varphi\alpha}{d\alpha}.\beta = \frac{d\varphi\alpha}{d\alpha}.2\gamma dx + \frac{d^2\varphi\alpha}{d\alpha^2}.\beta d\alpha.$

alſo

$$C = \frac{d\varphi\alpha}{d\alpha}.\gamma + \frac{d^2\varphi\alpha}{d\alpha^2}.\tfrac{1}{2}\beta^2.$$

Hieraus iſt

$$dC = \frac{d\varphi\alpha}{d\alpha}.d\gamma + \frac{d^2\varphi\alpha}{d\alpha^2}(\gamma da + \beta d\beta) + \frac{d^3\varphi\alpha}{dx^3}.\tfrac{1}{2}\beta^2 d\alpha.$$

und dadurch

$$D = \frac{d\varphi\alpha}{d\alpha}.\delta + \frac{d^2\varphi\alpha}{2d\alpha^2}.2\beta\gamma + \frac{d^3\varphi\alpha}{6d\alpha^3}.\beta^3.$$

Das Differential dD giebt nach den gehörigen Subſtitutionen, durch $4dx$ dividirt,

$$E = \frac{d\varphi\alpha}{d\alpha}.\varepsilon + \frac{d^2\varphi\alpha}{2d\alpha^2}(2\beta\delta + \gamma^2) + \frac{d^3\varphi a}{6d\alpha^3}.3\beta^2\gamma + \frac{d^4\varphi\alpha}{24d\alpha^4}.\beta^4.$$

u. ſ. f.

Verändert man die Function α von x auf irgend eine Art, ſo bekommen β, δ, ε, etc. andere Werthe, ohne daß die Art der Zuſammenſetzung der mit den Differential-Quotienten verbundenen Factoren ſich ändert. Die Beſchaffenheit der Function $\varphi\alpha$ beſtimmt nur die Form der Differentialquotienten, nicht die Form der ſie begleitenden Factoren. Daher bleibt bey der Entwickelung der Fun-

ction, $\varphi(\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \text{etc.})$ die Form der Coefficienten von z dieſelbe, welche hier gefunden iſt, wenn gleich die Coefficienten β, γ, δ, etc. ganz unabhängig von einander ſind. Auch braucht α nicht mehr als eine Function von x betrachtet zu werden, und z nicht als die Veränderung von x. Die Größe α kann eine abſolute veränderliche Größe, oder eine Function von einer veränderlichen ſeyn, und z iſt irgend eine willkührliche, unabhängige Größe.

28. Zur Vergleichung der Derivations-Rechnung mit der combinatoriſchen Methode, und zugleich zur deutlichern Einſicht in jene dient vortrefflich eine akademiſche Schrift von Prof. Hindenburg: Functionum polynomiorum evolutionem per ſeries, adhibito calculo derivationum nuperrime invento, ad ſubſtitutiones in ſubſtitutiones operoſas deducere, et in combinatorias tandem, quibus nullo modo carere poteſt, operationes et involutiones facillimas deſinere. Lipſiae 1801. Ich würde die beſcheidene Unpartheylichkeit des Verfaſſers rühmen, wenn man ſie nicht bey einem ſolchen Gelehrten, wie derſelbe iſt, vorausſetzen müßte. Eine ausführlichere Vergleichung beider Methoden iſt in einer Sammlung hierher gehöriger Abhandlungen anzutreffen: Über combinatoriſche Analysis und Derivationscalcul. Einige Fragmente, geſammelt und zum Druck befördert von Carl Friedrich Hindenburg. Leipzig, bey Schwikkert, 1803. Die erſtern franzöſiſch geſchriebenen Aufſätze darin: Caracteriſtique combinatoire; Développement général aux fonctions arbitraires; Polynome combinatoire, ſind von Profeſſor Bürmann, und haben die Abſicht, Ausländern die combinatoriſche Analyſis bekannter zu machen und zu empfehlen. Die letzte Abhandlung vom Profeſſor Hindenburg: Derivationscalcul und combinatoriſche Analyſis in Beziehung auf einander, dient zur nähern und ausführlichern Vergleichung beider Methoden gegen einander.

Determinirt, ſ. Beſtimmt.

Diacauſtica iſt die Brennlinie durch Brechung, das iſt, die Linie, auf welcher die Durchſchnittspuncte je zweyer nächſten, nach Art der Lichtſtrahlen von einer Linie gebrochenen, geraden Linien liegen, wenn dieſe, wie die zugehörigen auffallenden Linien in ſtetiger Folge genommen werden. Oder, ſie iſt die Linie, welche von allen ſolchergeſtalt gebrochenen geraden berührt wird.

1. Es iſt CMNO (Fig. 113.) die brechende Linie. An dieſe ſind von einem gegebenen Puncte A die Linien AM, AN gezogen, welche nach MS, NS gebrochen werden, wodurch ſie ſich in S ſchneiden. Die Normalen in M und N ſind MR, NR, deren Durchſchnittspunct R iſt. Alle Linien liegen in einer Ebene. Es ſoll die Gränze gefunden werden, welcher ſich der Abſtand MS des Durchſchnittspunctes S von M immer mehr nähert, je näher die Puncte M, N einander liegen.

Zu dieſem Ende müſſen die Unterſchiede der auffallenden Strahlen AM, AN, der gebrochenen SM, SN, der Bogen CM, CN, und die Unterſchiede der Winkel jener Linien mit ihren zugehörigen Normalen als Differentiale behandelt werden, da ihre Quadrate und höhere Potenzen nicht mit in Rechnung gezogen werden können, ohne der Vorausſetzung, daß eine Gränze gefunden werden ſoll, zu widerſprechen.

2. Es ſey $AM = z$, $SM = u$, der Winkel der Normale MR mit Ma, der Verlängerung von AM, oder der Einfallswinkel $RMa = \varphi$; der Brechungswinkel $RMS = \omega$. Der Bogen CM ſey $= s$, der Halbmeſſer der Krümmung in $M = r$. Das Brechungsverhältniß ſey $m : n$, ſo daß $m : n = \sin\varphi : \sin\omega$.

3. Die Linie NR ſchneide Ma in P. Es iſt $RPa = RMa + MRN$, und $APN = RNb - MAN$. Daher iſt jene Summe dieſem Unterſchiede gleich, und daraus iſt

$$MRN + MAN = RNb - RMa.$$

Die Linie NR ſchneide MS in Q, ſo iſt der Winkel

RQS = RMS + MRN, und auch = RNS + MSN, alſo iſt

$$MRN - MSN = RNS - RMS.$$

4. Man beſchreibe mit AM als Halbmeſſer den Kreisbogen Mm innerhalb des Winkels MAN, und mit SN den Kreisbogen Nn innerhalb des Winkels MSN. Der Winkel NMm iſt = RMa, weil beide mit NMa einen Rechten ausmachen, und der W. NMn = 90° − RMS.

5. Weil die Unterſchiede der Bogen MN, Mm, Nn, von der geraden Linie hier nicht in Betrachtung kommen können, ſo iſt Mm = MN.coſRMa; Nn = MN.coſRMS. Ferner iſt der W. MAN = $\frac{Mm}{AM}$ = $\frac{\partial s.\cos\varphi}{z}$; MSN = $\frac{Nn}{SM}$ = $\frac{\partial s.\cos\omega}{u}$. Auch iſt MRN = $\frac{\partial s}{r}$. Es iſt nämlich MR die Gränze der Durchſchnittsweite zweyer Normalen, ſo wie MS der Durchſchnittsweite zweyer zurückgeworfenen Strahlen; daher iſt für MR der Halbmeſſer der Krümmung in M zu ſetzen. Die Quotienten bedeuten Kreisbogen für den Halbmeſſer gleich der Einheit. Nun iſt aus (3.)

$$\text{I.}\ \frac{\partial s}{r} + \frac{\partial s.\cos\varphi}{z} = \partial\varphi,$$

$$\text{II.}\ \frac{\partial s}{r} - \frac{\partial s.\cos\omega}{u} = \partial\omega.$$

6. Da m sin ω = n sin φ, ſo iſt m coſ ω. ∂ω = n coſ φ. dφ, und

$$\text{III.}\ \frac{\partial\varphi}{\partial\omega} = \frac{m\cos\omega}{n\cos\varphi}.$$

7. Aus den Gleichungen I. II. wird noch ein Werth des Quotienten $\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}$ erhalten. Dieſer giebt mit dem in III. die Gleichung

$$\frac{uz + ru\cos\varphi}{uz - rz\cos\omega} = \frac{m\cos\omega}{n\cos\varphi}.$$

Hieraus wird erhalten

$$u = \frac{mrz\cos\omega^2}{mz\cos\omega - nz\cos\varphi - nr\cos\varphi^2}.$$

Setzt man in dieſem Werthe für m und n ihre proportionalen sin φ und sin ω, ſo wird

$$u = \frac{rz\sin\varphi.\cos\omega^2}{z\sin(\varphi - \omega) - r\sin\omega.\cos\varphi^2}.$$

8. Wenn φ und $\omega = 0$ ſind, ſo iſt . . . .

$u = \frac{mrz}{(m-n)z - nr}$. Den Vereinigungspunct auf dem ſenkrecht einfallenden, ungebrochenen Strahle nehme man zum Anfangspuncte der Brennlinie.

9. Wenn $m:n = \varphi:\omega$ geſetzt wird, ſo iſt . . .

$\frac{\partial\omega}{\partial\varphi} = \frac{n}{m}$, und daraus $u = \frac{mrz\cos\omega}{(m-n)z - nr\cos\varphi}$.

Dieſe Formel iſt in der Dioptrik nützlich, wo bey den Linſengläſern kleine Einfalls- und Brechungswinkel vorkommen, die man nicht als verſchwindend anſehen, nur als ihren Sinus proportional annehmen darf. Die Länge u iſt nun nicht auf dem ungebrochenen Strahle, ſondern auf dem gebrochnen zu nehmen.

10. Für eine gegebene krumme Linie iſt die Gleichung zwiſchen AM und dem Winkel derſelben mit einer Anfangslinie AB gegeben, dadurch der Winkel der AM mit der in M berührenden, alſo der Winkel mit der Normale (hier φ); ferner der Halbmeſſer der Krümmung, und durch das Brechungsverhältniß der Sinus von ω. Solchergeſtalt läßt ſich die Lage der gebrochnen Linie MS, und durch die für u gefundene Formel die Länge von MS beſtimmen. Im Allgemeinen aber iſt es ſehr mühſam, aus der Gleichung für die brechende Linie die Gleichung für ihre Diacauſtica zu finden.

11. Für den Kreis iſt r eine gegebene Größe. Für eine gerade Linie iſt r unendlich groß. Daher iſt für die

Diacauſtica der letztern $u = - \frac{m \cos\omega^2}{n \cos\varphi^2} z$. Die Brennlinie liegt auf derſelben Seite mit dem ſtrahlenden Puncte.

12. Wenn die Strahlen oder Linien parallel unter ſich auffallen, ſo iſt z unendlich groß, alſo

$$u = \frac{m r \cos\omega^2}{m \cos\omega - n \cos\varphi}.$$

13. Iſt $m = - n$, ſo verwandelt ſich die Diacauſtica in die Catacauſtica. Für dieſe iſt, $m = - n$, und $\omega = - \varphi$ geſetzt,

$$u = \frac{r z \cos\varphi}{2z + r \cos\varphi}.$$

In dem Artikel, Catacauſtica (13. S. 411), iſt $u = \frac{r z \cos\omega}{2z - r \cos\omega}$ gefunden. Daſelbſt liegen die Puncte R und S auf derſelben Seite der zurückwerfenden Linie mit dem ſtrahlenden Puncte; hier würden ſie auf der andern Seite, als wo dieſer liegt, ſich befinden. Daher ſind hier u und r den u und r in jenem Artikel entgegengeſetzt. Übrigens iſt ω daſelbſt was hier φ iſt.

14. Die Diacauſtica wird von der gebrochnen berührt. Denn wenn man die Puncte der Brechung in endlichen Abſtänden von einander nimmt, ſo wird durch die ſucceſſiven Durchſchnitte der gebrochenen Linien eine geradlinichte vielſeitige Figur gebildet, indem auf jede gebrochene zwey Durchſchnittspuncte fallen. Je näher die Puncte der Berührung ſich kommen, deſto kleiner werden die Seiten des Polygons, und bey einer ſtetigen Folge der Brechungspuncte iſt jede Seite in die Lage eines Elements der Brennlinie gerückt, das iſt in die Lage einer berührenden.

15. Die Diacauſtica iſt rectificabel, wenn die brechende eine geometriſche Linie iſt. Denn es ſey BST (Fig. 113.) ein Bogen der Diacauſtica zu der brechenden CMNO, und CB die berührende in B, welche mit AC in gerader Linie liege, wenn nämlich AC ſenkrecht auf die

brechende iſt. Man ſtelle ſich BC als einen geſpannten Faden vor, der in B die Diacauſtica berührt, und ſucceſſiv an BST angelegt wird. Während dieſer Bewegung wird der Faden an dem Ende bey C allmählig verkürzt, und dieſe Verkürzung iſt für jede unendlich kleine Veränderung der Lage das Differential $-\partial u$. Für unendlich kleine Veränderungen iſt $Nm = NM . \sin NMm = NM . \sin RMa$; und $Mn = MN . \cos NMn = MN . \sin RMS$, das iſt $\partial z = \partial s . \sin \varphi$, und $-\partial u = \partial s . \sin \omega$. Daher iſt $\partial z : -\partial u = m : n$, und die momentane Verkürzung iſt $= \frac{n \partial z}{m}$. Die Summe aller Verlängerungen der auffallenden Strahlen iſt $AM - AC$; alſo die Summe aller Verkürzungen der gebrochnen Strahlen an der Seite der brechenden Linie iſt $\frac{n}{m}(AM - AC)$. Folglich iſt $BC = BS + SM + \frac{n}{m}(AM - AC)$, alſo der Bogen $BS = BC - SM - \frac{n}{m}(AM - AC)$.

16. Für die krumme Linie CMD, (Fig. 114), welche alle von A auffallenden Strahlen in einen einzigen Punct B durch die Brechung vereinigt, iſt $\frac{n}{m} AM + BM = \text{Conſt.}$ Denn für dieſe wird der Bogen BS der Brennlinie in Fig. 113. $= 0$, und SM daſelbſt hier BM; folglich iſt $\frac{n}{m}(AM - AC) = BC - BM$, oder $\frac{n}{m} AM + BM = \frac{n}{m} AC + BC$. Der zweyte Theil dieſer Gleichung iſt eine gegebene Größe. Iſt C auf der geraden AB, ſo geht der Strahl AC ungebrochen durch, und iſt ſenkrecht auf die krumme Linie. Die AB verlängert ſchneide ſie in D, ſo iſt $\frac{n}{m} AD + BD$

$= \frac{n}{m} AC + BC$. Es iſt hier nur die eine Hälfte der Linie gezeichnet.

Von C bis an den Punct E, wo die krumme Linie von einer aus A gezogenen Linie AE berührt wird, fallen die von A ausgehenden Strahlen auf die convexe Seite der Linie. Jenſeits jenes Punctes E fallen ſie auf die concave Seite, und hier liegen die auffallenden und die gebrochenen auf derſelben Seite der berührenden. Wenn dieſes gleich im phyſiſchen Sinne keine Brechung heißen kann, ſo mag man ſie doch als eine geometriſche anſehen. Der Winkel, deſſen Sinus $= \frac{n}{m} \sin \varphi$ iſt, kann ſo gut ſtumpf als ſpitz ſeyn. Von C bis an den Berührungspunct E iſt dieſer Winkel ſpitz, von E bis D iſt er ſtumpf. Man mag es auch als eine Zurückwerfung betrachten, nur daß die Winkel des auffallenden und zurückgehenden Strahls nicht gleich groß ſind.

17. Dieſe krumme Linie iſt von Descartes zuerſt betrachtet worden. Geometriae L. II. pag. 42. et 50 ſeqq. edit. Amſtel. Er nennt ſie eine Ellipſe der zweyten Gattung, und giebt noch die Conſtruction von drey andern Curven dieſer Art, die er Ovalen nennt. Für alle iſt $m : n = \sin \varphi : \sin \omega$. Die abgelenkte Linie kann viererley Lagen um den Brechungspunct bey der geometriſchen Behandlung haben. Daher entſtehen die vier Ovalen. Descartes giebt die Art, wie er auf ſie gekommen iſt, nicht an, ſondern zeigt aus andern Gründen, daß ſie die von einem Puncte auffallenden Linien nach einem gegebenen hinlenken. Er wollte ſie in der praktiſchen Optik anwenden, zu Linſengläſern ohne Zerſtreuung der Strahlen. Allein es iſt theils nicht möglich, durchs Schleifen die gehörige Krümmung genau zu erhalten, theils aber wird die Farbenzerſtreuung durch keine Art der Krümmung gehoben. S. Ovalen des Descartes.

18. Huygens iſt zwar der erſte, der die Diacauſtica betrachtet hat, allein er hat ſie nur für einen beſondern Fall durch Beſtimmung einzelner Puncte gezeichnet. Ja-

cob Bernoulli iſt der erſte, der eine allgemeine Conſtruction angab, für jede brechende krumme Linie mittelſt ihrer Krümmungshalbmeſſer die Puncte der Diacauſtica zu beſtimmen. Acta Er. 1693 und Opp. T. I. nr. 56. wo der Herausgeber, Cramer, den Beweis beygefügt hat. Aus ſeinen nachgelaſſenen Papieren iſt in den Opp. T. II. nr. 103. art. 17. eine Auflöſung mitgetheilt, die mit der hier vorgetragenen in einigen Stücken übereinkommt, doch aber ſowohl in Abſicht der angewandten geometriſchen Conſtruction als der ganzen Form der Rechnung verſchieden iſt. Joh. Bernoulli hat von der Brennlinie durch Brechung am Ende der Lectionum Hoſpitalianarum gehandelt. Sein Verfahren iſt aber ſehr unbequem. Er ſucht die Länge des gebrochnen Strahls aus der Gleichung zwiſchen rechtwinklichten Coordinaten an der brechenden Curve. Bey parallelen auffallenden Strahlen iſt die Rechnung noch erträglich; allein für divergirende Strahlen iſt Bernoulli gezwungen ſie unvollendet zu laſſen. Die Länge des gebrochenen Strahls hängt von einer gewiſſen Linie ab, für welche die Gleichung unentwickelt bleibt.

L'Hopital hat in der Analyſe des infiniment petits, nr 133. eine analytiſche Auflöſung gegeben, die leicht genug iſt, aber wegen der Differenzen der Einfalls-Sinus und der Brechungs-Sinus noch einen Anſtoß laſſen möchte. Er hat daraus die von Jakob Bernoulli gegebene Conſtruction hergeleitet. Das Verfahren iſt im Weſentlichen daſſelbe mit dem von Cramer dieſer Conſtruction beygefügten Beweiſe, und dem von Käſtner in dem Lehrbegriffe der Optik, S. 226 gebrauchten. Die in dieſem Artikel vorgetragene Auflöſung wird vollkommen ſcharf ſeyn; ſie gebraucht die Hülfe der Geometrie nicht weiter, als es die Natur der Frage nothwendig macht.

19. Ein beſonderer Fall bey der Brechung durch den Kreis, wo die nach einem Puncte hin zielenden Strahlen nach einem einzigen hin gebrochen werden, verdient noch Bemerkung.

Es iſt AMB (Fig. 115.) ein Halbkreis aus C über AB beſchrieben. In M falle ein Strahl LM auf, der nach

einem gegebenen Puncte D auf der Verlängerung von AB gerichtet iſt. Man nehme AD:AE gleich dem Brechungsverhältniſſe, ſo iſt ME der gebrochne Strahl.

Das Brechungsverhältniß ſey m : n. der Einfallswinkel CMD $= \varphi$, der Brechungswinkel CME $= \omega$. Es iſt

$$\sin\varphi : \sin D = CD : CM$$

$$\sin E : \sin\omega = CM : CE,$$

alſo $\sin\varphi . \sin E : \sin\omega . \sin D = CD : CE$,

oder $m \times MD : n \times ME = CD : CE$.

Damit für den gegebenen Vereinigungspunct D der auffallenden Strahlen auch der für die gebrochenen E derſelbe bleibe, muß das Verhältniß MD:ME unveränderlich ſeyn. Der Kreis hat die Eigenſchaft, daß das Verhältniß MD:ME für jeden Punct M einem gegebenen gleich bleibt, wenn die Puncte D, E ſo genommen werden, daß die Verhältniſſe AD : AE und BD:BE dem gegebenen gleich ſind, ſ. Kreis. Es ſey nun AD:AE $=$ BD:BE, ſo iſt

$AD : AE = AD + BD : AB = AB + 2BD : AB$
$= CD : CB$, alſo

$$AD : AE = CD : CB.$$

Daraus iſt ferner

$$AD : AE = AD - CD : AE - CB = AC : CE$$
$$= CB : CE,$$

alſo $AD : AE = CB : CE$.

Aus dieſer Proportion und der vorher gefundenen folgt

$AD\,qu : AE\,qu = CD : CE$, und $AD : AE$

$= \frac{CD}{AD} : \frac{CE}{AE}$. Da $MD : ME = AD : AE$, ſo

iſt $m : n = \frac{CD}{AD} : \frac{CE}{AE}$, alſo $m : n = AD : AE$.

Hieraus iſt $m^2 : n^2 = CD : CE$.

Huygens hat dieſen Satz in dem tract. de Lumine, Opp. reliqu. I. p. 82, ohne Beweis.

Diagonalfläche iſt eine Ebene, die durch zwey parallele Seitenlinien eines Parallelepipedum, welche nicht zu derſelben Seitenfläche gehören, gelegt wird. Sie theilt den Körper in zwey gleiche und ähnliche Theile. Eine Ebene, durch eine Seitenlinie der einen Grundfläche eines Prisma, und eine ihr parallele Diagonallinie der andern Grundfläche, iſt auch eine Diagonalfläche. Ein Schnitt durch die Diagonale der Seitenfläche eines dreyeckigen Prisma und eine der beiden gegen über lie⸗genden Ecken iſt es auch.

Diagonal⸗Linie oder **Diagonale** iſt eine gerade Linie, welche in einer geradlinichten Figur durch zwey Win⸗kelpuncte, die nicht zunächſt bey einander liegen, gezogen iſt.

In einem Parallelogramm ſeyn die beiden Seiten a, b, der eingeſchloſſene ſpitze Winkel $= \varphi$, die gegen über liegende Diagonale $= d$, ſo iſt $dd = aa + bb - 2ab \cos \varphi$; und das Quadrat der andern Diagonale D, welche dem ſtumpfen Winkel, $2R - \varphi$, gegen über liegt, iſt $D^2 = aa + bb + 2ab \cos \varphi$, (ſ. Dreyeck und Formeln d. ebenen Trigon.). In der Lehre von der Zu⸗ſammenſetzung der Bewegungen ſind dieſe Sätze nöthig. Bey Zeichnung von Grundriſſen iſt es nützlich, die Diago⸗nalen zu wiſſen.

Diagramma, eine geometriſche Zeichnung zum Verſtändniß des Beweiſes eines Satzes, oder der Auflö⸗ſung einer Aufgabe, es ſey in der reinen, oder in der ange⸗wandten Mathematik. Das Wort wird nur bisweilen ſtatt Figur im Lateiniſchen gebraucht.

Diagramma Hipparchi heißt insbeſondere die Zeich⸗nung von der Lage der Sonne, des Mondes und der Erde bey Finſterniſſen, mit den dazu gehörigen Linien, weil Hipparchus durch Beobachtungen der Finſterniſſe den Ab⸗ſtand der Erde von der Sonne zu beſtimmen geſucht hat.

Diameter, ſ. Durchmeſſer.

Diametralzahl iſt ein Product aus zwey Factoren, von deren Quadraten die Summe das Quadrat einer rationalen Zahl iſt. Z. B. 12 iſt das Product von 3 und 4, deren Quadrate addirt das Quadrat von 5 geben. Eine Diametralzahl druckt den Inhalt eines Rechtecks aus, deſſen Diagonale und Seiten rationale Verhältniſſe gegen einander haben. Stifel hat in ſeiner Arithmetica integra dieſe Form einer Zahl, die jetzt nicht gebraucht wird, umſtändlich abgehandelt.

Differentia, differentialis numerus, heißt in Nepers Canone mirifico Logarithmorum, der Unterſchied der Logarithmen von dem Sinus und Coſinus eines Winkels, oder der Logarithme von der Tangente dieſes Winkels. Dieſe iſt nämlich die vierte Proportionallinie zu dem Coſinus, dem Sinus und dem Sinus totus. Den letztern nimmt Neper zwar . . = 1000 0000, aber den Logarithmen deſſelben ſetzt er in ſeinem Syſtem = 0. In der neuern Trigonometrie wird der Sinus totus gewöhnlich = 1 geſetzt, daher deſſen Logarithme in unſern Syſtem auch = 0 iſt. In des Urſinus Canone triangulorum logarithmico, dem erweiterten Neperiſchen, iſt die Benennung, differentialis, für den Logarithmen der Tangente auch beybehalten.

Differentiiren iſt das Verhältniß der Differentiale zweyer oder mehrerer zuſammen gehörigen Größen finden, ſ. Differentialformeln und Differentialgleichung.

Differenz *) iſt allgemein der Theil, um welchen eine Größe vermehrt oder vermindert einer andern Größe gleich wird, was mit einem deutſchen Worte, der Unterſchied heißt. Insbeſondere iſt Differenz die Veränderung der Function einer veränderlichen Größe, welche jener zukommt, wenn dieſe um einen beliebigen Theil ver-

*) Bey den Artikeln, welche die Differenzen- und Differentialrechnung betreffen, iſt die ſyſtematiſche Anordnung der alphabetiſchen vorgezogen, weil ſie nothwendig in der Ordnung, wie ſie hier folgen, geleſen werden müſſen.

mehrt oder vermindert wird; oder die Veränderung einer Function mehrerer veränderlichen Größen, deren jede um einen beliebigen Theil verändert wird, wofern ſie von einander unabhängig ſind, oder um einen ſolchen Theil, wie es die Verbindung derſelben erfordert. Sind x und y zwey mit einander verknüpfte Größen, ſo iſt jede eine Function der andern, und ihre Differenz angeben, iſt die zuſammengehörigen Veränderungen derſelben mit einander vergleichen. Eben ſo, wenn mehr als zwey veränderliche Größen mit einander in Verbindung ſtehen. Es kommt hier alſo darauf an, zuſammengehörige Veränderungen von Größen mit einander zu vergleichen, und hierdurch ſind Differenzen den Differentialen analog, nur daß letztere ſich mit keiner endlichen Größe vergleichen laſſen. Deswegen ſoll auch die Benennung, Differenz, für diejenige Art des Unterſchiedes, welche die allgemeine Veränderung einer Function durch die Veränderung ihrer veränderlichen Größe darſtellt, eigen bleiben. In engliſchen Schriften pflegt dieſe Art des Unterſchiedes Incrementum genannt zu werden, welches aber nicht immer eine Vergrößerung anzeigt. Die deutſche Benennung, Unterſchied, werde gebraucht von dem Unterſchiede zweyer beſtimmten Zahlen, oder dem Unterſchiede unveränderlicher, der Quantität nach unbeſtimmter Größen, ſo fern er ohne Rückſicht auf den Unterſchied anderer Größen auf irgend eine Art angegeben wird, dergleichen in algebraiſchen, analytiſchen und geometriſchen Sätzen häufig vorkommt, z. B. in dem Satze, $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

Die Differenz einer veränderlichen Größe, als x, y, z, wird durch das vorgeſetzte Zeichen Δ bezeichnet, nämlich Δx, Δy, Δz. Dieſe Symbole ſind einfache Größenzeichen, wenn gleich der Figur nach zuſammengeſetzt. Sie bedeuten Größen, die mit x, y, z, gleichartig ſind. Wird für die veränderliche Größe x eine Größe von einer gewiſſen Form geſetzt, ſo muß ſie durch einen Punct von dem Differenzzeichen abgeſondert werden. Z. B. $\Delta . x^2$ bedeutet die Veränderung von x^2, dagegen Δx^2 das Quadrat von Δx bedeutet. Auf gleiche Art ſind $\Delta . x^n$ und Δx^n

zu unterſcheiden. Auch bedeutet $\Delta . xy$ die Veränderung des Products xy, aber $y \Delta x$ das Product aus y in die Veränderung von x.

In allgemeinen Rechnungen bedeutet Δz eine Zunahme der veränderlichen Größe z, weil man in einer Reihe von Größen die größern auf die kleinern folgen zu laſſen pflegt, lieber als umgekehrt. Inzwiſchen kann Δz auch negativ werden, ſo wie z ſelbſt von dem poſitiven Werthe, den es unter den zum Grunde der Rechnung gelegten Umſtänden hat, unter andern Umſtänden zu einem negativen übergehen kann. Ein negatives Δz bedeutet eine Abnahme von z. Iſt nämlich $\Delta z = V \Delta x$, wo V eine Function von x allein, nebſt Δx, oder auch von x und z, bedeutet, ſo wird für ein poſitives Δx die Differenz Δz negativ, wenn V negativ wird.

In beſondern Fällen zeigt man die Abnahme einer veränderlichen Größe z durch $- \Delta z$ an, ſo daß Δz ſchlechtweg die Quantität der Abnahme bedeutet. Wird dieſes negativ, ſo verwandelt ſich das Abnehmen in ein Zunehmen.

Wenn die durch z allgemein bezeichneten Glieder einer Reihe nicht gleichförmig zunehmen, ſo läßt ſich aus den Differenzen eine neue Reihe von Unterſchieden derſelben, bilden, aus den Unterſchieden derſelben, wenn ſie nicht alle ſich gleich ſind, wieder eine Reihe, und ſo ferner, entweder ohne Ende fort, oder bis man auf beſtändige Unterſchiede kommt. Ein Glied aus der Reihe der zweyten Unterſchiede wird allgemein durch $\Delta^2 z$, aus der Reihe der dritten durch $\Delta^3 z$, u. ſ. f. bezeichnet.

Differenzen-Rechnung (Methodus incrementorum; Methode des différences; Calcul aux différences finies) iſt die Rechnung, wodurch die Relation der Differenz einer Function zu der Differenz der Functionalgröße, oder umgekehrt die Function aus der Relation der Differenzen gefunden wird. Auch mag die Function mehr als eine veränderliche Größe begreifen. Die Rechnung erſtreckt ſich auch auf die Differenzen höherer Ordnungen.

Die Differenzen-Rechnung ſteht in genauer Beziehung auf die Differentialrechnung. Dieſe ſieht aber die Reihe

der veränderlichen Größen als eine ſtetige an, daher jede Potenz der Differenzen gegen dieſe verſchwindet.

I. Differenzen rationaler Functionen.

1. Es ſey $z = x^n$, und $z + \Delta z = (x + \Delta x)^n$, ſo iſt, nach dem binomiſchen Lehrſatze,

$$\Delta z = n x^{n-1} \Delta x + \frac{n . n-1.}{1 . 2} x^{n-2} \Delta x^2$$

$$+ \frac{n . n-1 . n-2.}{1 . 2 . 3} x^{n-3} \Delta x^3 + \frac{n \ldots n-3}{1 \ldots 4} x^{n-4} \Delta x^4$$

$+$ etc.

2. Alſo iſt $\Delta . x^2 = 2 x \Delta x + \Delta x^2$

$$\Delta . x^3 = 3 x^2 \Delta x + 3 x \Delta x^2 + \Delta x^3$$

$$\Delta . x^4 = 4 x^3 \Delta x + 6 x^2 \Delta x^2 + 4 x \Delta x^3 + \Delta x^4$$

u. ſ. w.

3. Wenn n eine negative ganze Zahl, oder eine gebrochene iſt, ſo bricht die Reihe nicht ab, z. B.

$$\Delta . x^{-1} = \Delta . \frac{1}{x} = - x^{-2} \Delta x + x^{-3} \Delta x^2 - x^{-4} \Delta x^3 + \text{etc.}$$

$$\Delta . x^{-2} = \Delta . \frac{1}{x^2} = -2 x^{-3} \Delta x + 3 x^{-4} \Delta x^2 - 4 x^{-5} \Delta x^3 + \text{etc.}$$

$$\Delta . x^{\frac{1}{2}} = + \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \Delta x - \frac{1}{8} x^{-\frac{3}{2}} \Delta x^2 + \frac{1}{16} x^{-\frac{5}{2}} \Delta x^3 - \text{etc.}$$

Die beiden erſten Reihen geben negative Werthe für die Differenz der Function, für zunehmende x. Ein Bruch nimmt ab, wenn der Nenner wächſt.

4. Man bemerke, daß die Zahl-Factoren der Potenzen von Δx jeder aus dem mit der nächſt vorhergehenden verbundenen durch die Multiplication mit dem Exponenten von x in dieſem, und durch die Diviſion mit der Stellenzahl des Factors ſelbſt entſtehen. Der Zahl-Factor des

erſten Gliedes iſt der Exponent der Function. Dieſes rührt von der Form der Binomial-Coefficienten her. Die Exponenten von x werden folgweiſe um 1 vermindert.

5. Es ſey $z = a + bx + cx^2 + dx^3$, ſo iſt

$$\Delta z = (b + 2cx + 3dx^2)\Delta z + (c + 3dx)\Delta x^2 + d\Delta x^3.$$

Die Factoren der Differenzen werden nach dem in (4) bemerkten Geſetze aus einander nach der Reihe hergeleitet.

6. Es ſeyn t und u zwey veränderliche Größen, und $z = tu$, ſo iſt

$$z + \Delta z = (t + \Delta t)(u + \Delta u),$$ alſo

$$\Delta z = u\Delta t + t\Delta u + \Delta t.\Delta u.$$

7. Es ſey $z = tuv$, ſo iſt

$$\Delta z = uv\Delta t + tv\Delta u + tu\Delta v + v\Delta t.\Delta u + u\Delta t.\Delta v + t\Delta u.\Delta v + \Delta t.\Delta u.\Delta v.$$

8. Sind t und u Functionen von x, ſo ſind Δt und Δu Functionen von x und Δx. Z. B. Es ſey . . . $t = a + bx + cx^2$, und $u = \alpha + \beta x + \gamma x^2$, ſo iſt $\Delta t = (b + 2cx)\Delta x + c\Delta x^2$; und $\Delta u = (\beta + 2\gamma x)\Delta x + \gamma\Delta x^2$. Iſt $z = tu$, ſo iſt

$$\Delta z = (a\beta + b\alpha + 2(a\gamma + b\beta + c\alpha)x + 3(b\gamma + c\beta)x^2 + 4c\gamma x^3)\Delta x + (a\gamma + b\beta + c\alpha + 3(b\gamma + c\beta)x + 6c\gamma x^2)\Delta x^2 + (b\gamma + c\beta + 4c\gamma x)\Delta x^3 + c\gamma\Delta x^4.$$

Aus dem Factor von Δx werden die übrigen zufolge der Bemerkung in (4.) leicht hergeleitet.

9. Es iſt

$$\Delta.x(x+1) = (2x+1)\Delta x + \Delta x^2$$

$$\Delta.x(x+1)(x+2) = (3x^2 + 6x + 2)\Delta x + (3x + 3)\Delta x^2 + \Delta x^3$$

$$\Delta.x(x+1)(x+2)(x+3) = (4x^3 + 18x^2 + 22x + 6)\Delta x + (6x^2 + 18x + 11)\Delta x^2 + (4x + 6)\Delta x^3 + \Delta x^4.$$

Dieſe Differenzen zu erhalten, entwickele man das Product in der Function, ſuche daraus den erſten Terminus, der bloß Δx enthält, und daraus nach (4.) die folgenden.

Setzt man $\Delta x = 1$, ſo iſt

$$\Delta . x(x+1) = 2(x+1)$$

$$\Delta . x(x+1)(x+2) = 3(x+1)(x+2)$$

$$\Delta . x(x+1)(x+2)(x+3) = 4(x+1)(x+2)(x+3)$$

u. ſ. f.

10. Die Differenzen für $\Delta x = 1$ erhält man unmittelbar, wenn man in jedem der Producte $x+1$ für x ſetzt, und es von dem ſolchergeſtalt veränderten abzieht, da beide Producte nur in einem Factor verſchieden ſind. Auf dieſe Art wird auch erhalten

$$\Delta . (mx+a)(mx+m+a) = 2m(mx+m+a)$$

$$\Delta . (mx+a)(mx+m+a)(mx+2m+a)$$
$$= 3m(mx+m+a)(mx+2m+a).$$

10. Es ſey $z = \frac{t}{u}$, ſo iſt

$$z + \Delta z = \frac{t+\Delta t}{u+\Delta u}$$

$$\Delta z = \frac{u\Delta t - t\Delta u}{u(u+\Delta u)}.$$

Exempel. $z = \frac{\alpha + \beta x}{a + bx}$

$$\Delta z = \frac{(a\beta - b\alpha)\Delta x}{(a+bx)(a+bx+b\Delta x)}.$$

12. Wenn $\Delta x = 1$ genommen wird, ſo iſt

$$\Delta . \frac{1}{mx+a} = \frac{-m}{(mx+a)(mx+m+a)};$$

$$\Delta . \frac{1}{(mx+a)(mx+m+a)} =$$

$$\frac{-2m}{(mx+a)(mx+m+a)(mx+2m+a)}$$

u. ſ. f.

13. Es ſey zwiſchen zwey veränderlichen Größen, x, y, eine rationale Gleichung, wie folgende, gegeben:

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=o,$$

ſo iſt das Verhältniß der Differenzen Δx und Δy in folgender Gleichung enthalten,

$$(2ax+by+d)\Delta x+(bx+2cy+e)\Delta y$$
$$+a\Delta x^2+b\Delta x\Delta y+c\Delta y^2=o.$$

Die beiden erſten Glieder der Gleichung werden erhalten, wenn für jeden Factor x geſetzt wird Δx, und für jeden Factor y eben ſo Δy. Aus dieſen Gliedern entſtehen die drey übrigen eben ſo, nur daß durchgehends durch 2 dividirt wird.

II. Differenzen irrationaler Functionen.

14. Für dieſe mag es an einem Beyſpiele genügen. Es ſey $z=\sqrt{(aa+xx)}$, ſo iſt $z+\Delta z=\sqrt{(aa+xx+2x\Delta x+\Delta x^2)}$. Wird die Quadratwurzel aus dem Quadrinomium, oder auch aus dem Trinomium $zz+2x\Delta x+\Delta x^2$, nach dem binomiſchen Lehrſatze entwickelt, ſo erhält man eine Reihe, die nach den Potenzen von Δx fortſchreitet. Bequemer gebraucht man hier die Methode der unbeſtimmten Coefficienten. Es ſey, wenn das einfache Buchſtabenzeichen u für Δx geſetzt wird,

$$z+\Delta z=z+Au+Bu^2+Cu^3+Du^4+Eu^5$$
$$+\text{ etc.}$$

ſo iſt, wenn auf beiden Seiten das Quadrat genommen, und für $(z+\Delta z)^2$ ſein Werth geſetzt wird,

$$aa+xx+2xu+u^2=z^2+2Azu+(2Bz+A^2)u^2$$
$$+(2Cz+2AB)u^3+(2Dz+2AC+B^2)u^4$$
$$+(2Ez+2AD)+2BC)u^5+\text{ etc.}$$

Die Coefficienten derſelben Potenzen von u in beiden Theilen der Gleichung gleich geſetzt, wird, da $aa+xx=zz$ iſt, erhalten

I. $Az = x$, und $A = \frac{x}{z}$.

II. $2Bz + A^2 = 1$; daraus $B = \frac{a^2}{2z^3}$.

III. $2Cz + 2AB = 0$; daraus $C = -\frac{a^2 x}{2z^5}$.

IV. $2Dz + 2AC + B^2 = 0$, daraus

$$D = \frac{a^2(4x^2 - a^2)}{8z^7}.$$

V. $2Ez + 2AD + 2BC = 0$, daraus

$$E = -\frac{a^2 x(4x^2 - 3a^2)}{8z^9}.$$

u. ſ. w.

Wenn man von den Coefficienten die Differentiale nach den Regeln der Differentialrechnung nimmt, ſo iſt $B = \frac{\partial A}{2\partial x}$; $C = \frac{\partial B}{3\partial x}$; $D = \frac{\partial C}{4\partial x}$; $E = \frac{\partial D}{5\partial x}$, u. ſ. f. Es iſt ein ähnliches Verfahren, wie das in (4.) angezeigte.

III. Allgemeine Form der Differenzen.

15. Die Formel für ein Glied einer arithmetiſchen Reihe irgend einer Ordnung in dem Artikel, arithmetiſche Reihen höherer Ordnungen, S. 200, §. 10. wird uns dienen, ſowohl die Geſtalt der für die Differenz Δz gehörigen Reihe zu beſtimmen, als auch die Derivation der Coefficienten zu den Potenzen von Δx, jedes aus den vorhergehenden, zu entdecken. In dieſer Formel, nämlich

$$y = A + u . \frac{\Delta A}{\Delta u} + \frac{u(u - \Delta u)}{1 . 2} . \frac{\Delta^2 A}{\Delta u^2}$$
$$+ \frac{u(u - \Delta u)(u - 2\Delta u)}{1 . 2 . 3} . \frac{\Delta^3 A}{\Delta u^3} + \text{etc.}$$

iſt y eine veränderliche Größe, die nach demſelben Geſetze, wie die Größen einer Reihe, die in gleichen Abſtänden von

von einander nach A folgen, durch ihren Abſtand u von dem Anfangsgliede A der Reihe gebildet wird. Die auſſer A gegebnen Größen der Reihe erſcheinen in der Formel nicht ſelbſt, ſondern mittelbar durch die Anfangsglieder der Differenzreihen, ΔA, $\Delta^2 A$, $\Delta^3 A$, etc. Der Abſtand jeder von der nächſten iſt Δu, welches hier nicht eine Veränderung von u, ſondern ein Intervall bedeutet, das als Einheit für den Abſtand u des Gliedes y von A dient, indem $\frac{u}{\Delta u}$ die Stellenzahl für y iſt. Nun ſey A eine Function von x, es ſey eine geſonderte oder ungeſonderte, eine algebraiſche oder transſcendente, und die Glieder der Reihe, B, C, D, etc. in den Abſtänden Δu, $2\Delta u$, $3\Delta u$, etc. von dem Anfangsgliede A ſeyn nach ihrer Folge eben ſolche Functionen von $x + \Delta u$, $x + 2\Delta u$, $x + 3\Delta u$, etc. ſo ſind die Differenzquotienten $\frac{\Delta A}{\Delta u}$, $\frac{\Delta^2 A}{\Delta u^2}$, $\frac{\Delta^3 A}{\Delta u^3}$; etc. durch die Beſchaffenheit der Function und durch Δu beſtimmt. Umgekehrt beſtimmen dieſe Quotienten zuſammen die Function von x. Nimmt man in der Formel für y die Stellenzahl $\frac{u}{\Delta u}$ einer ganzen Zahl m gleich, ſo iſt y dieſelbe Function von $x + m\Delta u$ oder von $x + u$, wie es A von x iſt. Alle ſolche Werthe von y werden aus den Stellenzahlen auf einerley Art zuſammengeſetzt, oder ſind dieſelben Functionen von u, und daher auch von $x - c$, wenn $u = x - c$ geſetzt wird, folglich auch von x. Iſt $\frac{u}{\Delta u}$ eine gebrochene rationale Zahl, ſo iſt y ein eingeſchaltetes Glied der Reihe, von welchem daſſelbe gilt. Denn bey Einſchaltung irgend einer Anzahl von Gliedern in einer arithmetiſchen Reihe bleibt die erweiterte Reihe immer von derſelben Ordnung, (a. a. O. 26.). Die Glieder der urſprünglichen Reihe werden nun aus den veränderten Stellenzahlen und Anfangsgliedern der Differenzreihen auf dieſelbe Art zuſam-

mengeſetzt, wie die eingeſchalteten Glieder aus ihren zugehörigen Stellenzahlen und jenen Anfangsgliedern. Umgekehrt werden daher dieſe auch aus den gebrochenen Stellenzahlen und den Anfangsgliedern der Differenzreihen in der urſprünglichen Reihe eben ſo zuſammengeſetzt, wie die Glieder derſelben in den durch ganze Zahlen bezeichneten Stellen. Da die Anzahl der einzuſchaltenden Glieder willkührlich iſt, und unbeſtimmt groß gedacht werden kann, ſo gilt eben dieſes für eine ſtetige Folge von Gliedern, die Stellenzahlen mögen rational oder irrational ſeyn. Demnach iſt die durch die angeführte Formel beſtimmte Größe y eben eine ſolche Function von $x + u$ als es das Anfangsglied einer Reihe A von x iſt

16. Man ſetze für die Differenzquotienten $\frac{\Delta A}{\Delta u}$, $\frac{\Delta^2 A}{\Delta u^2}$, $\frac{\Delta^3 A}{\Delta^3 u}$, etc. nach ihrer Folge die einfachen Zeichen, P, Q, R, S, etc. und ſetze auch $A = fx$, einer Function von x, und daher eben ſo $y = f(x+u)$, ſo iſt

$$f(x+u) = fx + Pu + \frac{Q}{1.2} u(u - \Delta u)$$
$$+ \frac{R}{1.2.3} u(u - \Delta u)(u - 2\Delta u)$$
$$+ \frac{S}{1.2.3.4} u(u-\Delta u)(u-2\Delta u)(u-3\Delta u)$$
$$+ \text{etc.}$$

Die Quotienten P, Q, R, etc. enthalten jeder einen Theil, der von Δu frey iſt. Denn ΔA, oder $f(x + \Delta u) - fx$, enthält in allen Gliedern eine Function von Δu oder Δu ſelbſt, weil alles, was von x allein abhängt, oder bloß unveränderliche Größen enthält, beiden Functionen der fx und der $f(x + \Delta u)$ gemein iſt, alſo bey der Subtraction ſich aufhebt. Es muß aber ein Theil von ΔA bloß Δu enthalten, weil das Verhältniß $\Delta A : \Delta u$ ſich einer gewiſſen Gränze nähern muß, je kleiner Δu genommen wird, dieſe Gränze aber nicht von ei-

ner willkührlichen endlichen Größe Δu abhangen kann, ſondern allein durch die Beſchaffenheit der Function fx beſtimmt werden muß. Folglich iſt $\frac{\Delta A}{\Delta u}$ oder P zum Theil eine Function von x allein. Iſt dieſe für den zu A gehörigen Werth von x endlich, ſo iſt die Gränze des Verhältniſſes $\Delta A : \Delta u$ ein endliches Verhältniß; wird dieſe Function Null oder unendlich groß, ſo wird ΔA gegen Δu immer kleiner, oder in dem andern Falle immer größer, je kleiner Δu genommen wird, ohne einen Stillſtand in dem einem wie in dem andern Falle.

Eben ſo iſt Q, welches als Differenzquotient in der zweyten Differenzreihe, aus P auf ähnliche Art hergeleitet wird, wie P aus fx, zum Theil eine Function von x allein. So enthalten auch R, S etc. Functionen von x, frey von Δu.

Wenn das Gränzverhältniß von $\Delta A : \Delta u$; von $\Delta^2 A : \Delta u^2$; von $\Delta^3 A : \Delta u^3$; etc. für den Werth von x, der zu dem Anfangsgliede A gehört, nicht ein endliches iſt, ſo muß es doch für andere Werthe von x, das dazu gehörige Glied der Reihe als Anfangsglied genommen, ein endliches ſeyn können. Darum müſſen die Functionen P, Q, R, etc. einen von Δu freyen Theil enthalten.

17. Es zerfällt dergeſtalt die Differenz $f(x+u) - fx$ in zwey Theile, deren einer bloß von x abhängt, der andere zugleich eine Function von Δu nebſt x iſt. Nun iſt $f(x+u)$ ganz unabhängig von dem Abſtande Δu, in welchem die Glieder der Reihe A, B, C, D, etc. von einander geſetzt werden. Daher müſſen alle Theile, welche Δu enthalten, ſich aufheben. Bezeichnet man nun denjenigen Theil der Quotienten, P, Q, R, S, etc. der kein Δu enthält, nach der Folge durch p, q, s, r, etc. ſo iſt

$$f(x+u) = fx + pu + \frac{1}{2} qu^2 + \frac{1}{6} ru^3$$

$$+ \frac{1}{24} s^4 + \frac{1}{120} t^5 + \text{etc.}$$

18. Hier zeigt ſich nun erſtlich die Geſtalt der Reihe für die Differenz der Function fx. Die Exponenten der Progreſſionalgröße u ſind bloß ganze poſitive Zahlen. Zugleich ergiebt ſich aus dem, was gleich vorher von der Beſchaffenheit der Functionen p, q, r, s, etc, bemerkt worden iſt, ihre Derivation aus einander, nebſt der von p aus fx. Nämlich p entſteht aus fx, wenn, nachdem in fx für x geſetzt iſt $x + \Delta u$, aus der Differenz $f(x + \Delta u) - fx$, bloß die Glieder genommen werden, die Δu allein enthalten, und das Aggregat durch Δu dividirt wird. Der Theil von Q, der kein Δu enthält, das iſt q, wird aus dem von P, der gleichfalls davon frey iſt, oder aus p, eben ſo hergeleitet, wie p aus fx. Aus q wird auf ſolche Art r; aus r wird s, und ſo fort wird in jedem Differenzquotienten der von Δu unabhängige Theil gefunden. Statt Δu kann zur Bequemlichkeit u ſelbſt genommen werden, welches ſo wie Δu eine willkührliche Veränderung von x iſt. In Abſicht auf das Reſultat der Operationen iſt es einerley, ob man Δu oder u ſchreibt. Doch muß man den Abſtand Δu der beiden erſten Glieder der Reihe, und den Abſtand u des Gliedes $f(x + u)$ von dem Anfangsgliede, dabey nicht für gleichgültig nehmen.

19. Die Functionen p, q, r, etc. nenne man die Gränzquotienten von $\frac{\Delta A}{\Delta u}$, $\frac{\Delta^2 A}{\Delta u^2}$, $\frac{\Delta^3 A}{\Delta u^3}$, etc. oder, wenn fx für A, und Δx für Δu geſetzt wird, ſo daß Δx den Abſtand der beiden erſten Glieder der Reihe bedeutet, die Gränzquotienten von $\frac{\Delta fx}{\Delta x}$, $\frac{\Delta^2 fx}{\Delta x^2}$, $\frac{\Delta^3 fx}{\Delta x^3}$, etc.

20. Es iſt ſehr merkwürdig, daß der erſte Gränzquotient p die Function von $x + u$ beſtimmt, da durch p die übrigen Gränzquotienten alle gegeben werden. Der Quotient $\frac{\Delta fx}{\Delta x}$ beſtimmt die Function nicht, weil er, ſo wie alle übrigen ſolche Quotienten, von Δx zugleich abhängt.

An einer krummen Linie beſtimmt er nur die Lage der berüh- renden geraden Linie. Der Gränzquotient p iſt daher charakteriſtiſch für die Function fx.

21. La Grange nennt in ſeiner Théorie des fonctions analytiques die hier durch p, q, r, s, etc. bezeichneten Functionen fonctions dérivées, in Beziehung auf die Function fx, als fonction primitive. Er unterſcheidet ſie in der Bezeichnung durch die Strichelung des Functionszeichens, und nennt die erſte abgeleitete, $f'x$ (d. i. p), fonction prime; die zweyte $f''x$ (oder q), fonction ſeconde; die dritte $f'''x$ (oder r) fonction tierce; u. ſ. f. Die Geſtalt der Reihe für $f(x+u)$, und die Formation der Coefficienten von u leitet la Grange aus ganz andern Betrachtungen her, als hier zum Grunde gelegt ſind. Allein es möchten dabey noch Schwierigkeiten ſeyn, zu deren Erörterung hier aber der Raum fehlt. Einige Erinnerungen hat Pasquich gemacht in den elementis Analyſeos et Geometriae ſublimioris, Introd. XVIII.

22. Exempel. Es ſey $fx = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$, und es ſoll $f(x+u)$ entwickelt werden.

Dieſes zu bewerkſtelligen, muß man den Werth von p allgemein für $fx = (1 - x^2)^{-m}$ ſuchen. Es iſt . . . $f(x+u) = (1 - x^2 - 2xu + u^2)^{-m} = (1 - x^2)^{-m} + 2mx(1 - x^2)^{-m-1}u + Mu^2$ (zufolge des binomiſchen Lehrſatzes) wo Mu^2 alle übrigen Glieder der Function bedeutet, die u^2 und höhere Potenzen von u enthalten. Nun iſt zufolge (18.) $p = 2mx(1 - x^2)^{-m-1}$. Mit Hülfe dieſer allgemeinen Formel laſſen ſich die Gränzquotienten p, q, r, etc. für $fx = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ entwickeln. Hier iſt $p = x(1 - x^2)^{-\frac{3}{2}}$. In beiden Factoren dieſer Function ſetze man $x + u$ für x, und verfahre ferner nach (18) mit Zuziehung der allgemeinen Formel für p, ſo iſt

$$q = (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}$$
$$= (1+2x^2)(1-x^2)^{-\frac{5}{2}},$$

indem der erſte Theil von q in $(1-x^2)(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}$ verwandelt iſt.

In dieſer Function wird wieder $x+u$ für x geſetzt, und eben ſo wie für fx und q verfahren, ſo wird der Gränzquotient

$$r = 4x(1-x^2)^{-\frac{5}{2}} + 5(x+2x^3)(1-x^2)^{-\frac{7}{2}}$$
$$= (9x+6x^3)(1-x^2)^{-\frac{7}{2}}.$$

Hieraus iſt auf gleiche Art

$$s = (9+18x^2)(1-x^2)^{-\frac{7}{2}} + 7(9x^2+6x^4)(1-x^2)^{-\frac{9}{2}}$$
$$= (9+72x^2+24x^4)(1-x^2)^{-\frac{9}{2}}.$$

Daraus noch

$$t = (225x+600x^3+120x^5)(1-x^2)^{-\frac{11}{2}}$$

u. ſ. f.

V. Differenzen transſcendenter Functionen.

23. Für transſcendente Functionen iſt kein algebraiſcher Ausdruck vorhanden. Kann man aber die Gränze des Quotienten $\frac{\Delta f x}{\Delta u}$ oder des $\frac{\Delta f x}{\Delta x}$ angeben, ſo werden daraus nach der in (18.) erklärten Methode die Gränzen der höhern Differenzquotienten, alſo die Coefficienten in der entwickelten Function gefunden.

24. Es ſey $fx = \log x$ in irgend einem Syſtem der Logarithmen; es wird die entwickelte Function, $\log(x+u)$ $= lx + pu + \frac{1}{2}qu^2 + \frac{1}{6}ru^3 + \frac{1}{24}su^4 + \text{etc.}$ geſucht.

Aus dieſer Formel folgt $l(x+u) - lx$, oder $l(1+\frac{u}{x}) = pu + \frac{1}{2}qu^2 + \frac{1}{6}ru^3 + \text{etc.}$ Nun

iſt in jedem logarithmiſchen Syſtem das Gränzverhältniß des Logarithmen einer Zahl zu dem Überſchuſſe der Zahl über die Einheit ein beſtimmtes Verhältniß, (ſ. Logarithmen). Man ſetze $pu + \frac{1}{2} q u^2 + \frac{1}{6} r u^3 + \text{etc.}$ $= Mu$, ſo iſt das Gränzverhältniß von $Mu : \frac{u}{x}$ oder von $M : \frac{1}{x} = c : 1$, wenn $c : 1$ jenes beſtimmte Verhältniß in dem angenommenen Syſtem iſt. Es iſt aber p die Gränze von M, alſo iſt $p : \frac{1}{x} = c : 1$, und $p = \frac{c}{x}$. Nun werden hieraus die folgenden Coefficienten beſtimmt. Man ſetze nämlich $p' = \frac{c}{x+u}$, ſo iſt $p' - p =$ $- \frac{cu}{x(x+u)}$, und die Gränze von $\frac{p'-p}{u}$, das iſt $q = - \frac{c}{x^2}$. Weiter ſey $q' = - \frac{c}{(x+u)^2}$, ſo iſt $q' - q = \frac{c(2ux + uu)}{x^2(x+u)^2}$, daher $r = \frac{2c}{x^3}$. Ferner ſey $r' = \frac{2c}{(x+u)^3}$, ſo iſt

$$r' - r = - \frac{2c(3x^2u + 3xu^2 + u^3)}{x^3(x+u)^3}.$$

Daher $s = - \frac{2.3c}{x^4}$. Daraus erhellet ſchon hinlänglich das Geſetz der Reihe,

$$\log(x+u) = lx + \frac{cu}{x} - \frac{cu^2}{2x^2} + \frac{cu^3}{3x^3} - \frac{cu^4}{4x^4} + \text{etc.}$$

In dem natürlichen Syſtem iſt $c = 1$. Wie eine ſchneller convergirende Reihe gefunden wird, ſ. Logarithmen.

25. Es ſey $fx = a^x$, wo a die Baſis des Syſtems iſt, worin x als Logarithme zu der Zahl a^x gehört. Es ſoll $f(x+u)$ entwickelt werden.

Es ſey $f(x+u) = a^x + pu + \frac{1}{2}qu^2 + \frac{1}{6}ru^3 + \text{etc.} = a^x + Mu$. Alſo iſt $a^{x+u} - a^x = Mu$, oder $\frac{a^x(a^u - 1)}{u} = M$. Die Gränze des Quotienten $\frac{a^u - 1}{u}$ iſt, wie in (24.) bemerkt worden, $= \frac{1}{c}$; alſo iſt $\frac{a^x}{c}$ die Gränze von M, und $p = \frac{a^x}{c}$. Es ſey $p' = \frac{a^{x+u}}{c}$, oder $p' = \frac{a^x.a^u}{c}$, ſo iſt $p' - p = \frac{1}{c}a^x(a^u - 1)$, und die Gränze von $\frac{p'-p}{u}$, das iſt, $q = \frac{1}{c^2}a^x$. Eben ſo iſt $r = \frac{1}{c^3}a^x$; $s = \frac{1}{c^4}a^x$; u. ſ. f. folglich

$$a^{x+u} = a^x\left(1 + \frac{u}{c} + \frac{u^2}{2c^2} + \frac{u^3}{6c^3} + \frac{u^4}{24c^4} + \text{etc.}\right)$$

und

$$a^u = 1 + \frac{u}{c} + \frac{u^2}{2c^2} + \frac{u^3}{6c^3} + \frac{u^4}{24c^4} + \text{etc.}$$

26. Es ſey $fx = \sin x$, oder, wenn der Winkel durch φ bezeichnet wird, $f\varphi = \sin\varphi$. Es ſoll $f(\varphi + \omega)$ oder $\sin(\varphi + \omega)$ durch eine nach ω geordnete Reihe entwickelt werden.

Es ſey $\sin(\varphi + \omega) = \sin\varphi + p\omega + \frac{1}{2}q\omega^2 + \frac{1}{6}r\omega^3 + \text{etc.}$ Nun iſt $\sin(\varphi + \omega) - \sin\varphi = 2\cos(\varphi + \frac{1}{2}\omega) . \sin\frac{1}{2}\omega$, (Goniometrie 28.). Die Gränze des Quotienten $\frac{\sin\frac{1}{2}\omega}{\omega}$ iſt $= \frac{1}{2}$, weil das Gränzverhältniß zwiſchen Bogen und Chorde das der Gleichheit iſt, (ſ. Bogen), und daher eben dieſes auch für $\sin\omega$ und ω Statt hat. Es iſt alſo $p = \cos\varphi$. Um daraus q herzuleiten, ſey $p' = \cos(\varphi + \omega)$, ſo iſt $p' - p = \cos(\varphi + \omega) - \cos\varphi = -2\sin(\varphi + \frac{1}{2}\omega) . \sin\frac{1}{2}\omega$, und die Gränze von $\frac{p' - p}{\omega}$, das iſt $q = -\sin\varphi$. Daraus folgt (eben ſo wie p aus $\sin\varphi$), $r = -\cos\varphi$; hieraus $s = +\sin\varphi$; dann $t = -\cos\varphi$, u. ſ. f Demnach iſt

$$\sin(\varphi + \omega) = \sin\varphi + \cos\varphi . \omega - \frac{1}{2}\sin\varphi . \omega^2 - \frac{1}{6}\cos\varphi . \omega^3 + \frac{1}{24}\sin\varphi . \omega^4 + \frac{1}{120}\cos\varphi . \omega^5 + \text{etc.}$$

27. Es ſey $f\varphi = \cos\varphi$, ſo iſt

$$\cos(\varphi + \omega) = \cos\varphi - \sin\varphi . \omega - \frac{1}{2}\cos\varphi . \omega^2 + \frac{1}{6}\sin\varphi . \omega^3 + \frac{1}{24}\cos\varphi . \omega^4 - \frac{1}{120}\sin\varphi . \omega^5 - \text{etc.}$$

Das Verfahren bey der Entwickelung iſt dem in (29.) ganz ähnlich. Oder man leite die Formel aus der für $\sin(90° - \varphi - \omega)$ her, wo ω negativ, in Beziehung auf ω in (26.) iſt.

28. Setzt man in den beiden gefundenen Formeln $\varphi = 0$, ſo iſt

$$\sin\omega = \omega - \frac{1}{1.2.3}\,\omega^3 + \frac{1}{1..5}\,\omega^5 - \frac{1}{1..7}\,\omega^7 + \text{etc.}$$

$$\cos\omega = 1 - \frac{1}{2}\,\omega^2 + \frac{1}{1..4}\,\omega^4 - \frac{1}{1..6}\,\omega^6 + \text{etc.}$$

29. Wollte man dieſe letztern Formeln unmittelbar finden, ſo daß man gleich anfangs $\varphi = 0$ ſetzte, ſo wäre für den Sinus der Gränzquotient $p = 1$, und für den Coſinus wäre derſelbe $= 0$. Deswegen müßte man die Anfangsglieder der Differenzreihen für die beiden Folgen

$$\sin 0,\ \sin\omega,\ \sin 2\omega,\ \sin 3\omega,\ \sin 4\omega,\ \text{etc.}$$

$$\cos 0,\ \cos\omega,\ \cos 2\omega,\ \cos 3\omega,\ \cos 4\omega,\ \text{etc.}$$

ſelbſt ſuchen, und dann die Gränzen der Quotienten nehmen, welche dieſelben, durch die zugehörige Potenz von ω dividirt, geben.

30. In der Cyklometrie (5, 6.) ſind die Formeln für $\sin\omega$ und $\cos\omega$ mittelſt der Integration durch einen Umweg gefunden, weil die Differentialformeln, $\partial \sin\omega = \cos\omega . \partial\omega$ und $\partial\cos\omega = -\sin\omega . \partial\omega$ ſich nicht gerade zu integriren laſſen. Käſtner nimmt hier eine Differentialgleichung vom zweyten Grade zu Hülfe, Analyſis des Unendl. §. 285. 293, wie es auch Leibnitz für den Sinus gethan hat. Acta Er. 1693. Andere gebrauchen hier die Rechnung mit unmöglichen Größen, wie Euler in der Introd. in Anal. Inf. T. 1. §. 133; la Grange in der Théorie des fonctions, §. 25. Die Differenzenrechnung nimmt hier den kürzeſten Weg. Die Beſtimmung von p wird mit allem Fug aus der Natur der Frage hergeleitet.

31. Es ſey $f\varphi = \tan\varphi$, und $\tan(\varphi + \omega)$

$$= \operatorname{tg}\varphi + p\omega + \frac{1}{2}q\omega^2 + \frac{1}{6}r\omega^3 + \frac{1}{24}s\omega^4 + \text{etc.}$$ In

dieſer Reihe ſollen die Coefficienten beſtimmt werden.

Es iſt $\operatorname{tg}(\varphi + \omega) - \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\omega}{1 - \operatorname{tg}\varphi . \operatorname{tg}\omega} - \operatorname{tg}\varphi$

$= \frac{(1+tg\varphi^2)\,tg\,\omega}{1-tg\,\varphi.\,tg\,\omega}$. Der Kürze wegen ſey $tang\,\varphi = t$, ſo iſt $\Delta f\varphi = \frac{(1+t^2)\,tg\,\omega}{1-t.\,tg\,\omega}$, und . . $\frac{\Delta f\varphi}{\omega}$ oder $\frac{\Delta t}{\omega} = \frac{1+t^2}{1-t.\,tg\,\omega} \cdot \frac{tg\,\omega}{\omega}$. Die Gränze des Quotienten $\frac{tg\,\omega}{\omega}$ iſt $= 1$. Wird nun zugleich in dem andern Factor $tg\,\omega = 0$ geſetzt, ſo wird die Gränze von $\frac{\Delta t}{\omega} = 1+t^2$, und es iſt $p = 1+t^2$. Setzt man hier $t+\Delta t$ für t, und p' für p, ſo iſt $p'-p = 2t\Delta t + \Delta t^2$, und $\frac{p'-p}{\omega} = (2t+\Delta t)\frac{\Delta t}{\omega}$. Die Gränze dieſes Quotienten iſt $q = 2t(1+t^2)$, indem hier alles weggelaſſen werden muß, was von ω abhängt, alſo auch Δt in dem Factor $2t+\Delta t$. Ferner iſt $q'-q = 2\Delta t + 6t^2\Delta t + M\Delta t^2$, wo $M\Delta t^2$ alle Theile begreift, welche Δt^2 und Δt^3 enthalten, und $\frac{q'-q}{\omega} = (2+6t^2)\frac{\Delta t}{\omega} + \frac{M\Delta t^2}{\omega}$. Die Gränze dieſes Quotienten iſt . . $r = (2+6t^2)(1+t^2) = 2+8t^2+6t^4$. Auf dieſelbe Art, wie r aus q hergeleitet iſt, wird aus r der Gränzquotient s gefunden, nämlich $s = (16t+24t^3)(1+t^2) = 8(2t+5t^3+3t^5)$. Hieraus iſt der folgende Gränzquotient, der zum Unterſchiede von t durch (t) bezeichnet werde, $(t) = 8(2+15t^2+15t^4)(1+t^2) = 8(2+17t^2+30t^4+15t^6)$; u. ſ. w.

Demnach iſt, wenn $tg\,\varphi = t$ iſt,

$$tang(\varphi+\omega) = t+(1+t^2)\,[\omega + t\omega^2 + (\tfrac{1}{3}+t^2)\omega^3$$
$$+ (\tfrac{2}{3}t+t^3)\,\omega^4 + (\tfrac{2}{15}+t^2+t^4)\,\omega^5$$
$$+ (\tfrac{17}{45}\,t + \tfrac{4}{3}\,t^3+t^5)\,\omega^6 + \text{etc.}]$$

32. Wenn $\varphi = \frac{1}{4}\pi$ oder 45°, ſo iſt $t = 1$, und

$$\tang(\frac{1}{4}\pi + \omega) = 1 + 2(\omega + \omega^2 + \frac{4}{3}\omega^3 + \frac{5}{3}\omega^4 + \frac{32}{15}\omega^5 + \frac{122}{45}\omega^6 + \text{etc.})$$

Nimmt man ω negativ, ſo iſt

$$\tang(\frac{1}{4}\pi - \omega) = 1 - 2(\omega - \omega^2 + \frac{4}{3}\omega^3 - \frac{5}{3}\omega^4 + \frac{32}{15}\omega^5 - \frac{122}{45}\omega^6 + \text{etc.})$$

Das Product dieſer beiden Reihen iſt $= 1$, wie es ſeyn muß, da die Tangente des einen Winkels die Cotangente des andern iſt. Sie ſind ſehr brauchbar, die Tangenten und Cotangenten ſolcher Winkel zu berechnen, welche unmittelbar keine convergirende Reihen für jene geben. In Eulers Differentialrechnung. II. §. 98. hat die Formel für tang $(\varphi + \omega)$ eine andere Geſtalt.

33. Es ſey $fy = \text{Ang.} \sin y = \varphi$, und $f(y+u) = \text{Ang.} \sin(y+u) = \varphi + \omega$; nun ſoll die Differenz der Winkel durch die Differenz der Sinus ausgedruckt werden.

Man ſetze wiederum $f(y+u) = fy + pu + \frac{1}{2}qu^2 + \frac{1}{6}ru^3 + \text{etc.}$, ſo iſt $\omega = pu + \frac{1}{2}qu^2 + \frac{1}{6}ru^3 + \text{etc.}$, und $\frac{\omega}{u} = p + \frac{1}{2}qu + \text{etc.}$

In (26.) iſt gefunden, daß der Gränzquotient von $\frac{\Delta \sin \varphi}{\Delta \varphi} = \cos \varphi$ iſt, alſo iſt hier $p = \frac{1}{\cos \varphi} = \frac{1}{\sqrt{(1-yy)}}$.

Die Gränzen der Differenzquotienten dieſer Function ſind ſchon in (22.) gefunden. Es iſt daſelbſt fx, was hier

p iſt, wenn für das dortige x hier y genommen wird. Alſo kommen für die dortigen p, q, r, s, t, hier q, r, s, t, (u), wo die Klammern das (u), als Differenzquotienten, von u, als Veränderung des Sinus, unterſcheiden. Man ſetze $\sqrt{(1-yy)} = x$, als $\operatorname{cof}\varphi$, ſo iſt

$$\text{Ang.}\sin(y+u) = \text{Ang.}\sin y + \frac{u}{x} + \frac{yu^2}{2x^3} + \frac{(1+2y^2)u^3}{6x^5} + \frac{(9y+6y^3)u^4}{24x^7} + \frac{(9+72y^2+24y^4)u^5}{120x^9} + \frac{(225y+600y^3+120y^5)u^6}{720x^{11}} + \text{etc.}$$

34. Es ſey $fx = \text{Ang.}\operatorname{cof} x = \varphi$, und $f(x+u) = \text{Ang.}\operatorname{cof}(x+u) = \varphi + \omega$; nun ſoll die Differenz der Winkel entwickelt werden.

Da die Gränze von $\frac{\Delta \operatorname{cof}\varphi}{\Delta\varphi} = -\sin\varphi$ iſt (26 und 27.), ſo iſt hier $p = -\frac{1}{\sin\varphi} = -\frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}$, und die Coefficienten in der entwickelten Reihe ſind dieſelben mit denen in (33.) nur entgegengeſetzt, auſſerdem daß x und y mit einander vertauſcht werden. Es iſt alſo

$$\text{Ang.}\operatorname{cof}(x+u) = \text{Ang.}\operatorname{cof} x - \frac{u}{y} - \frac{xu^2}{2y^3} - \frac{(1+2x^2)u^3}{6y^5} - \frac{(9x+6x^3)u^4}{24y^7} - \frac{(9+72x^2+24x^4)u^5}{120y^9} - \text{etc.}$$

Dieſe Formel und die in (33.) ſind bey kleinen Werthen von u ſehr convergirend, auſſer wenn in jener der Winkel nahe ein rechter, und in dieſer ſehr klein iſt.

35. Wenn $\varphi = 0$ genommen wird, ſo iſt $y = 0$, und $x = 1$, alſo $\text{Ang.}\sin u = u + \frac{u^3}{6} + \frac{9u^5}{120} + \text{etc.}$

Dieſe Reihe wird bequemer durch die Integralrechnung gefunden, ſ. Cyklometrie. 1.

36. Es ſey $ft = \text{Ang. tang}\, t = \varphi$, und $f(t+u) = \text{Ang. tang}(t+u) = \varphi + \omega$; nun ſoll die Differenz der Winkel durch die Differenz der Tangenten angegeben werden.

Man ſetze $f(t+u) = ft + pu + \frac{1}{2}qu^2 + \frac{1}{6}ru^3 + \text{etc.}$ In (31.) iſt gefunden, daß die Gränze von $\frac{\Delta \text{tang}\,\varphi}{\Delta\varphi} = 1 + t^2$ iſt, nämlich der dortige Werth von p. Daher iſt hier p (als Gränze von $\frac{\Delta\varphi}{\Delta \text{tang}\,\varphi}$) $= \frac{1}{1+t^2}$, oder $p = (1+t^2)^{-1}$. Setzt man $t+u$ für u, ſo iſt $p^1 = (1 + t^2 + 2tu + u^2)^{-1} = (1+t^2)^{-1} - 2t(1+t^2)^{-2}u + \text{etc.}$, und die Gränze von $\frac{p^1 - p}{u}$ oder $q = -2t(1+t^2)^{-2}$. Wird hier $t+u$ für u geſetzt, ſo iſt $q^1 = -2(t+u)(1+t^2+2tu+u^2)^{-2} = -2(t+u)((1+t^2)^{-2} - 4t(1+t^2)^{-3}u) + \text{etc.})$ und $q^1 - q = 8t^2(1+t^2)^{-3}u - 2(1+t^2)^{-2}u + \text{etc.} = (8t^2 - 2(1+t^2))(1+t^2)^{-3}u + \text{etc.}$ und die Gränze von $\frac{q^1 - q}{u}$ oder $r = (6t^2 - 2)(1+t^2)^{-3}$. Auf gleiche Art wird hieraus hergeleitet $s = 24(t - t^3)(1+t^2)^{-4}$. Daraus $(t) = 24(1 - 10t^2 + 5t^4)(1+t^2)^{-5}$ u. ſ. f. Die Potenz des Binomium wird bey jeder Operation entwickelt, und die Differenz des einen Factors in den andern Factor multiplicirt; wobey das Quadrat und die höhern Potenzen von u weggelaſſen werden. Demnach iſt

$$\text{Ang. tang}(t+u) = \text{Ang. tang}\, t + \frac{u}{1+t^2} - \frac{tu^2}{(1+t^2)^2}$$
$$+ \frac{(3t^2-1)u^3}{3(1+t^2)^3} - \frac{(t^3-t)u^4}{(1+t^2)^4} + \frac{(5t^4-10t^2+1)u^5}{5(1+t^2)^5}$$
$$- \frac{(3t^5-10t^3+3t)u^6}{3(1+t^2)^6} + \text{etc.}$$

Man vergleiche Euleri Calc. differ. II. §. 86. 87.

37. Wenn $t = 0$ genommen wird, ſo iſt

$$\text{Ang. tang}\, u = u - \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 - \text{etc.}$$

Dieſe Formel wird unmittelbar und leichter durch die Differentialrechnung gefunden, ſ. Cyklometrie. 10.

38. Die Differentialrechnung liefert nach den Regeln ihres Verfahrens die Quotienten p, q, r. etc. leichter. Unſere Formel erhält durch Einführung der Differentialquotienten folgende Geſtalt:

$$f(x+u) = fx + \frac{\partial fx}{\partial x} \cdot \frac{u}{1} + \frac{\partial^2 fx}{\partial x^2} \cdot \frac{u^2}{1.2}$$
$$+ \frac{\partial^3 fx}{\partial x^3} \cdot \frac{u^3}{1.2.3} + \frac{\partial^4 fx}{\partial x^4} \cdot \frac{u^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

Die Differentialquotienten ſind ganz daſſelbe mit dem, was hier Gränzquotienten genannt ſind. Die Formel iſt der nach Taylor benahmte Lehrſatz.

39. Wenn $x = 0$, und A der Werth der Function fx für $x = 0$ iſt, ſo iſt

$$fu = A + \frac{\partial fx}{\partial x} \cdot \frac{u}{1} + \frac{\partial^2 fx}{\partial x^2} \cdot \frac{u^2}{1.2} + \frac{\partial^3 fx}{\partial u^3} \cdot \frac{u^3}{1.2.3}$$
$$+ \frac{\partial^4 fx}{\partial u^4} \cdot \frac{u^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

wo man die Bezeichnung u auch mit x vertauſchen kann, weil u jeden Werth der Functionalgröße bedeuten kann, der durch x bezeichnet wird. Allein in den Differentialquotienten muß man, nachdem ſie durch x ausgedruckt ſind, $x = 0$ ſetzen, weil dieſe Quotienten gar nicht von u ab-

hangen, alſo auch nicht von x, wenn u mit x vertauſcht wird.

Iſt für das Anfangsglied A der Werth von x nicht Null, ſondern = a, ſo muß man in den Differentialquotienten a für das als veränderlich betrachtete x ſetzen.

40. Die Reihe für die Differenz einer Function, oder für $f(x+u) - fx$, (wo x auch o ſeyn mag) kann langſam convergiren, oder gar divergiren, weil eine Reihe im Allgemeinen nur die Form, nicht nothwendig die Quantität einer Größe, angiebt. Doch mag die Reihe für hinlänglich kleine u, die es nämlich in Vergleichung mit der Größen=Einheit ſind, immer convergirend gemacht werden. Für große x den Werth der Function x zu entwickeln, muß man erſt den Werth der Function für ein kleines x ſuchen, dann den Werth für $f(x+u)$, wo u wiederum hinlänglich klein genommen werde. Ferner iſt, wenn dieſes $x+u$ durch x bezeichnet wird, der Werth von $f(x+u)$ auf gleiche Art zu beſtimmen; wodurch man ſo fortfahrend den Werth der Function für irgend ein x herausbringen mag. Ein Beyſpiel iſt in (31.) vorgekommen. Bey der Berechnung der goniometriſchen Linien verfährt man ſolchergeſtalt.

Die Reihe für die Differenz ſtellt die Ordinaten einer paraboliſchen Linie vor, welche die Curve, deren Ordinate die Function ſelbſt iſt, nur oſculirt, aber nicht mit ihr einerley iſt, daher man die Curve in Portionen abtheilen, und dieſe einzeln beſtimmen muß. Dabey kommt es darauf an, wie genau die Endpuncte der Portionen beſtimmt werden. S. berührende Linie.

V. Differenz einer Function zweyer veränderlichen Größen.

41. Es ſey V irgend eine Function von x und y. Man ſucht die allgemeine Form der Differenz von V durch die Differenzen von x und y. Zur Erläuterung mögen die Beyſpiele vorangehen. Es ſey

I. $V = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$.
Man ſetze $x + \Delta x$ für x; $y + \Delta y$ für y, $V + \Delta V$ für V, ſo daß ΔV die Differenz iſt, um welche V ſich verändert, wenn x ſich um Δx, und y ſich um Δy verändert. Zieht man von der durch die Subſtitutionen entſtandenen Gleichung die gegebene ab, ſo iſt

$$\begin{aligned}\Delta V = &(2ax + by + d + a\Delta x)\Delta x\\ &+ (2cy + bx + e + c\Delta y)\Delta y\\ &+ b\Delta x \Delta y.\end{aligned}$$

Das erſte Glied iſt die partielle Differenz von V, wenn x allein verändert wird; das zweyte die partielle Differenz von V, wenn y allein veränderlich geſetzt wird; das dritte iſt die partielle Differenz des erſten Gliedes, y allein darin veränderlich geſetzt, oder des zweyten, wenn x allein darin verändert wird.

II. Es ſey $V = \alpha x^3 + \beta x^2 y + \gamma x y^2 + \delta y^3$, ſo iſt

$$\begin{aligned}\Delta V = &(3\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + 3\alpha x\Delta x + \beta y \Delta x\\ &\qquad + \alpha \Delta x^2)\Delta x\\ &+ (3\delta y^2 + 2\gamma xy + \beta x^2 + 3\delta y\Delta y + \gamma x \Delta y\\ &\qquad + \delta \Delta y^2)\Delta y\\ &+ (2\beta x + 2\gamma y + \gamma \Delta y + \beta \Delta x)\Delta x \Delta y.\end{aligned}$$

Die Form der Glieder iſt dieſelbe wie in dem erſten Beyſpiele.

III. Noch ſey $V = \frac{x}{y}$, ſo iſt $\Delta V = \frac{y\Delta x - x\Delta y}{y(y + \Delta y)}$ wie in (10.), oder $\Delta V = \frac{\Delta x}{y} - \frac{x\Delta y}{y(y+\Delta y)}$ $- \frac{\Delta x . \Delta y}{y(y+\Delta y)}$. Das erſte Glied iſt die partielle Differenz in Rückſicht auf x, das zweyte in Rückſicht auf y, weil $\Delta : \frac{1}{y} = \frac{1}{y+\Delta y} - \frac{1}{y} = - \frac{\Delta y}{y(y+\Delta y)}$ iſt; das dritte iſt die partielle Differenz des erſten Gliedes

in Rückſicht auf y, oder des zweyten in Rückſicht auf x. Daſſelbe gilt, wenn für x, eine Function von x, und für y eine Function von y geſetzt wird.

42. Es ſey V irgend eine Function von x und y. Ihre partielle Differenz in Rückſicht auf x allein ſey $P\Delta x$, und in Rückſicht auf y allein ſey die partielle Differenz $= Q\Delta y$. Die partielle Differenz von P in Rückſicht auf y allein ſey $p\Delta y$; und von Q in Rückſicht auf x allein ſey ſie $q\Delta x$. Durch die Subſtitution von $x + \Delta x$ für x verwandelt ſich V in $V + P\Delta x$, und dieſe durch die Subſtitution von $y + \Delta y$ für y in $V + P\Delta x + Q\Delta y + p\Delta y . \Delta x$. Dieſes iſt die vollſtändige verwandelte Function, da ſowohl $y + \Delta y$ für y, als $x + \Delta x$ für x geſetzt iſt. Alſo iſt $\Delta V = P\Delta x + Q\Delta y + p\Delta y . \Delta x$. Auf gleiche Art verwandelt ſich durch die Subſtitution von $y + \Delta y$ für y die Function V in $V + Q\Delta y$; und dieſe durch Subſtitution von $x + \Delta x$ für x in $V + Q\Delta y + P\Delta x + q\Delta x . \Delta y$. Hieraus iſt $\Delta V = Q\Delta y + P\Delta x + q\Delta x . \Delta y$. Aus der Vergleichung dieſes Werthes mit dem vorhergehenden folgt $p\Delta y . \Delta x = q\Delta x . \Delta y$; alſo $p = q$.

Die partielle Differenz von V in Rückſicht auf x allein hat zur partiellen Differenz in Rückſicht auf y allein dieſelbe, welche die partielle Differenz von V, in Rückſicht auf y allein genommen hat, wenn in derſelben x allein verändert wird.

Der hier vorgetragene Lehrſatz giebt ein Prüfungsmittel an die Hand, zu erfahren, ob eine gegebene Differenz, welche nebſt Δx und Δy auch $\Delta x \Delta y$ enthält, von einer Function zweyer veränderlichen Größen entſtehen könne. Die Gleichung $p = q$ iſt eine Bedingungsgleichung für die Möglichkeit der Relation zwiſchen der gegebenen Differenzengleichung, und einer zuſtimmenden Gleichung für die Größen ſelbſt.

VI. Höhere Differenzen.

43. Wenn von der Differenz einer Function fx die Differenz, von dieſer aufs neue die Differenz genommen, und ſo fortgefahren wird, man mag nun zuletzt auf eine unveränderliche Differenz kommen oder nicht, ſo heißen dieſe Differenzen die höhern. Die Differenz der erſten Differenz heißt die zweyte, die Differenz der zweyten heißt die dritte, u. ſ. f. die Bezeichnungen ſind für dieſe höhere Differenzen, $\Delta^2 fx$, $\Delta^3 fx$, $\Delta^4 fx$, etc. oder wenn $fx = z$ iſt, $\Delta^2 z$, $\Delta^3 z$, $\Delta^4 z$, etc. Sie werden auf dieſelbe Art jede aus der nächſt niedrigern hergeleitet, wie Δz aus fx, indem nämlich für x geſetzt wird $x + \Delta x$. So wie die erſte Differenz den Factor Δx hat, ſo erhält die zweyte den Factor Δx^2, die dritte den Factor Δx^3, u. ſ. f.

44. Die höhern Differenzen ſind ſchon in der allgemeinen Formel für die Differenz einer Function angewandt: nur ſind dabey die höhern Potenzen von Δx, nach der niedrigſten, zu der Differenz gehörigen weggelaſſen, weil dieſe gar keinen Einfluß auf die entwickelte Function, $f(x + \Delta x)$ oder $f(x + u)$, haben.

45. Die zweyte Differenz entſteht aus drey auf einander folgenden Werthen der Function fx; die dritte aus vier ſolchen Werthen, u. ſ. w. (ſ. arithm. Reihen höh. Ordn.) Die Unterſchiede der Werthe von x könnten zwar ungleich genommen werden, allein alsdann iſt das Geſetz zu beſtimmen, nach welchem ſich die zu den Werthen der Function gehörigen x verändern ſollen. Demnach wäre x eine Function einer Größe y, deren Unterſchiede gleich groß ſind, oder man müßte dieſe wiederum eine Function einer andern Größe v ſeyn laſſen, ſo daß man zuletzt doch bey einer Größe ſtehen bleiben muß, deren Veränderungen gleich groß ſind, indem die zugehörigen Werthe der Function fx ſich ungleichförmig verändern. So wie jene das Maaß oder die Einheit für die erſten Differenzen der Function fx ſind, ſo ſind ihre Quadrate es für die zweyten Differenzen, ihre Cubi für die dritten u. ſ. f. Ohne

die Annahme einer beſtändigen Differenz findet keine beſtimmte Vergleichung der höhern Differenzen Statt.

Die zweyte Differenz von fx dividirt durch das Quadrat der unveränderlichen Differenz von x (oder einer andern, wovon x eine Function iſt) iſt im Allgemeinen eine endliche Größe, als Gränze jenes Quotienten; eben ſo die dritte Differenz von fx dividirt durch den Cubus der unveränderlichen Differenz; ſo auch die vierte Differenz von fx dividirt durch das Biquadrat der letztern, u. ſ. f.

Auch ſind $\frac{\Delta^2 z}{\Delta x . \Delta z}$; $\frac{\Delta^3 z}{\Delta x^2 . \Delta z}$; $\frac{\Delta^3 z}{\Delta x . \Delta^2 z}$, im Allgemeinen endliche Quotienten. Denn der erſte kann angeſehen werden als das Product $\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta z}$; der zweyte als das Product $\frac{\Delta^3 z}{\Delta x^3} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta z}$; der dritte als das Product $\frac{\Delta^3 z}{\Delta x^3} \cdot \frac{\Delta x^2}{\Delta^2 z}$. So auch bey Quotienten höherer Ordnungen. Ein Product von Differenzen, deren Ordnungszahlen die Summe m geben, gehört zu derſelben Ordnung mit $\Delta^m z$, oder zu dem mten, und der Quotient $\Delta^m z$ durch jenes Product dividirt, iſt im Allgemeinen eine endliche Größe.

46. Exempel. Es ſey $z = x^4$, und $\Delta x = \text{conſt.}$ Setzt man $\Delta x = u$, ſo iſt

$$\Delta z = 4x^3 u + 6x^2 u^2 + 4xu^3 + u^4$$
$$\Delta^2 z = 12x^2 u^2 + 24x u^3 + 14u^4$$
$$\Delta^3 z = 24 x u^3 + 36u^4$$
$$\Delta^4 z = 24 u^4$$
$$\Delta^5 z = 0$$

Das erſte Glied jeder dieſer Differenzen durch die zugehörige Potenz von u dividirt, giebt die Quotienten p, q, r, s, in (17.), ſo daß nach der Formel daſelbſt

$$(x+u)^4 = x^4 + 4x^3 u + 6x^2 u^2 + 4xu^3 + u^4,$$

wie nach dem binomiſchen Lehrſatze.

47. Exempel. Es ſey $z = xy$, und es bleibe unbeſtimmt, ob von x oder y die Differenzen unveränderlich ſind. Es iſt

$$\Delta z = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y.$$

Setzt man $x+\Delta x$ für x; $y+\Delta y$ für y; $\Delta x+\Delta^2 x$ für Δx; $\Delta y+\Delta^2 y$ für Δy, oder multiplicirt man die Differenz jedes Factors in den andern Factor, und die Differenzen ſelbſt in einander, ſo iſt die zweyte Differenz

$$\begin{aligned}\Delta^2 z = {} & y\Delta^2 x + 2\Delta y\Delta x + \Delta^2 y.x \\ & + 2\Delta y\Delta^2 x + 2\Delta^2 y\Delta x \\ & + \Delta^2 y\Delta^2 x\end{aligned}$$

Hieraus wird auf dieſelbe Art erhalten

$$\begin{aligned}\Delta^3 z = {} & y\Delta^3 x + 3\Delta y\Delta^2 x + 3\Delta^2 y\Delta x + \Delta^3 y.x \\ & + 3\Delta y\Delta^3 x + 6\Delta^2 y\Delta^2 x + 3\Delta^3 y\Delta x \\ & + 3\Delta^2 y\Delta^3 x + 3\Delta^3 y\Delta^2 x \\ & + \Delta^3 y\Delta^3 x.\end{aligned}$$

Man bemerkt hier leicht das Geſetz, nach welchem die Differenzen der verſchiedenen Ordnungen mit einander verbunden werden, und in den Abſchnitten der Differenz von z auf einander folgen, wie auch das Geſetz, der numeriſchen Coefficienten.

VII. Allgemeine Formeln für die Anfangsglieder der Differenzreihen.

48. Eine Function von x ſey fx, und $\frac{\partial fx}{\partial x} = \alpha$; $\frac{\partial^2 fx}{2\partial x^2} = \beta$; $\frac{\partial^3 fx}{6\partial x^3} = \gamma$; $\frac{\partial^4 fx}{24\partial x^4} = \delta$; $\frac{\partial^5 fx}{120\partial x^5} = \varepsilon$; etc. Nun iſt

$$fx = fx$$
$$f(x+u) = fx + \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \varepsilon u^5 + \text{etc.}$$
$$f(x+2u) = fx + 2\alpha u + 4\beta u^2 + 8\gamma u^3 + 16\delta u^4 + 32\varepsilon u^5 + \text{etc.}$$
$$f(x+3u) = fx + 3\alpha u + 9\beta u^2 + 27\gamma u^3 + 81\delta u^4 + 243\varepsilon u^5 + \text{etc.}$$
etc. etc.

Es iſt klar, daß die numeriſchen Coefficienten in den Anfangsgliedern der Differenzreihen von den ſucceſſiven Werthen der Function, oder in Δfx, $\Delta^2 fx$, $\Delta^3 fx$, etc. einerley ſind mit den Anfangsgliedern der Differenzreihen von den Potenzen der natürlichen Zahlen mit Einſchluß der Null, nach ihrer Ordnung genommen. Nämlich

$$\Delta fx = \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \varepsilon u^5 + \text{etc.}$$
$$\Delta^2 fx = 2\beta u^2 + 6\gamma u^3 + 14\delta u^4 + 30\varepsilon u^5 + \text{etc.}$$
$$\Delta^3 fx = 6\gamma u^3 + 36\delta u^4 + 150\varepsilon u^5 + \text{etc.}$$
$$\Delta^4 fx = 24\delta u^4 + 240\varepsilon u^5 + \text{etc.}$$
$$\Delta^5 fx = 120\varepsilon u^5 + \text{etc.}$$

49. Kann man nun zwey Werthe einer Function für die zugehörigen x, nebſt den Differentialquotienten berechnen, ſo kann man zwiſchen jenen Werthen ſehr leicht ſo viele Glieder als man will, einſchalten.

50. Exempel. Es ſey $fx = \sin\varphi$, und $f(x+u) = \sin(\varphi+\omega)$, ſo iſt $x = \varphi$; $u = \omega$; und $\alpha = \cos\varphi$; $\beta = -\frac{1}{2}\sin\varphi$; $\gamma = -\frac{1}{6}\cos\varphi$; $\delta = +\frac{1}{24}\sin\varphi$; $\varepsilon = +\frac{1}{120}\cos\varphi$; etc. Dadurch iſt

$$\Delta \sin\varphi = \cos\varphi \,.\, \omega - \frac{1}{2}\sin\varphi \,.\, \omega^2 - \frac{1}{6}\cos\varphi \,.\, \omega^3$$

$$+ \frac{1}{24}\sin\varphi \,.\, \omega^4 + \frac{1}{120}\cos\varphi \,.\, \omega^5 - \text{etc.}$$

$$\Delta^2 \sin\varphi = - \sin\varphi \,.\, \omega^2 - \cos\varphi \,.\, \omega^3 + \frac{7}{12}\sin\varphi \,.\, \omega^4$$

$$+ \frac{1}{4}\cos\varphi \,.\, \omega^5 - \text{etc.}$$

$$\Delta^3 \sin\varphi = - \cos\varphi \,.\, \omega^3 + \frac{3}{2}\sin\varphi \,.\, \omega^4 + \frac{5}{4}\cos\varphi \,.\, \omega^5$$

$$- \text{etc.}$$

$$\Delta^4 \sin\varphi = + \sin\varphi \,.\, \omega^4 + 2\cos\varphi \,.\, \omega^5 - \text{etc.}$$

$$\Delta^5 \sin\varphi = + \cos\varphi \,.\, \omega^5 - \text{etc.}$$

etc.

Z. B. Es ſey $\varphi = 42$ Centeſimalgrade, und $\omega = 1'$, nach derſelben Eintheilung, ſo daß $\omega = \frac{\pi}{20000}$. Aus der Einleitung zu Hoberts und Idelers Tafeln, S. L, oder Callets Tafeln iſt

$$\text{l} \sin\varphi = 9,\ 78739\ 46195 - 10$$
$$\text{l} \cos\varphi = 9,\ 89771\ 22994 - 10$$

Ferner iſt

$$\text{l}\pi = 0,\ 49714\ 98727$$
$$\text{l}2 \,.\, 10^4 = 4,\ 30102\ 99957$$

$$\text{l}\omega = 6,\ 19611\ 98770 - 10$$
$$\text{l}\omega^2 = 2,\ 39223\ 97540 - 10$$

Mit Hülfe dieſer Logarithmen wird gefunden

$$\cos\varphi \,.\, \omega = 0,000124\ 117259$$
$$\cos\varphi \,.\, \omega^3 = 0,\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots 3$$
$$\sin\varphi \,.\, \omega^2 = 0,\ \ldots\ldots\ .15123$$

Daraus iſt für die Winkel 42°; 42° 1′; 42° 2′; etc.

$$\Delta \sin 42^\circ = + 0{,}000124\ 109698$$
$$\Delta^2 \sin 42^\circ = - 0{,}000000\ 015126$$
$$\Delta^3 \sin 42^\circ = - 0{,} \ldots\ldots\ \ldots\ldots 3$$

übereinſtimmig mit der Tafel der Differenzen a. a. O. S. XXIX, die daſelbſt auf 28 Decimalſtellen berechnet ſind, allein auf eine mühſame Art, nicht durch eine allgemeine Formel.

51. Exempel. Es ſey $f x = \log.\text{nat.}\sin\varphi$, und $f(x+u) = \log.\text{nat.}\sin(\varphi+\omega)$, ſo iſt $x=\varphi$; $u=\omega$, und $\alpha = \frac{\operatorname{coſ}\varphi}{\sin\varphi}$; $\beta = -\frac{1}{2\sin\varphi^2}$; $\gamma = +\frac{\operatorname{coſ}\varphi}{3\sin\varphi^3}$;

$$\delta = -\frac{2+\operatorname{coſ}2\varphi}{12\sin\varphi^4};\quad \varepsilon = +\frac{(5+\operatorname{coſ}2\varphi)\operatorname{coſ}\varphi}{30\sin\varphi^5};$$

etc.

Verlangt man die gemeinen tabulariſchen Logarithmen, ſo müſſen die Differenzen mit dem Modulus des tabulariſchen Syſtems multiplicirt werden. Dieſer iſt

$$M = 0{,}4342944819 \ldots \text{ und}$$
$$\log M = 9{,}6377843114 - 10.$$

Z. B. $\varphi = 42^\circ$ Centeſimale; $\omega = 10' = \frac{\pi}{2000}$.

Es iſt

$$M.\alpha\omega = 0{,}000879\ 471698$$
$$M.\beta\omega^2 = - 0{,}000001\ 426280$$
$$M.\gamma\omega^2 = + 0{,} \ldots\ldots\ \ldots 192553$$
$$M.\delta\omega^2 = - 0{,} \ldots\ldots\ \ldots\ldots 355$$

etc.

Hieraus iſt für die Winkel 42°; 42° 10′; 42° 20′; etc.

$$\Delta \log.\sin 42^\circ = + 0{,}000878\ 047341$$
$$\Delta^2 \log.\sin 42^\circ = - 0{,}000002\ 841056$$
$$\Delta^3 \log.\sin 42^\circ = + 0{,} \ldots\ldots\ .11427$$
$$\Delta^4 \log.\sin 42^\circ = - 0{,} \ldots\ldots\ \ldots 84$$

Dieſe Differenzen ſtimmen zu den aus Callets Tafeln her= geleiteten, ganz genau, oder mit dem Unterſchiede eines Einers in der letzten Ziffer. Es iſt

$$\sin 42^\circ = 0,612907\ 053652$$

$$\mathrm{l}\sin 42^\circ = 9,787394\ 619467$$

Mit dieſen und den gefundenen Anfangsgliedern der Differenzreihen laſſen ſich für die folgenden Winkel die na= türlichen oder logarithmiſchen Sinus finden.

VIII. Umgekehrte Differenzen=Rechnung.

52. Bey der umgekehrten Differenzenrechnung iſt es die Frage, aus einer Function von x, welche die Differenz einer andern Function von x iſt, dieſe letztere zu finden. In manchen Fällen dienen zu der Auflöſung dieſer Aufgabe die Differenzen, die aus allerhand Functionen von x her= geleitet ſind. In vielen Fällen aber iſt die Aufgabe nicht anders aufzulöſen, als daß die Differenz in eine Reihe ver= wandelt wird, wodurch die ihr zugehörige Function auch nur in der Form einer nicht abbrechenden Reihe erhalten wird. Es iſt ein ſolcher Fall, der in der Integralrechnung auch häufig vorkommt. Bey Differenzen mit zwey verän= derlichen Größen muß die Bedingung in (42) erfüllt ſeyn.

53. Die Function fx nenne man die integri= rende Function in Abſicht auf ihre Differenz Δfx. Es ſey nämlich A der Werth der Function für $x = a$, und Q ihr Werth für $x = q$, ſo iſt $Q - A$ das Aggre= gat aller Differenzen, die zwiſchen A und Q fallen. Iſt $A = 0$, und ſind alle Differenzen gleichnamig, ſo iſt Q die Summe aller Differenzen zwiſchen den ſucceſſiven Wer= then von fx, von 0 bis Q.

Wegen der Anwendung auf die Summirung der Reihen, und zur Erleichterung der Unterſuchung, wollen wir $\Delta x = 1$ ſetzen.

54. Es ſey z eine Function von x, und $\Delta z = x$, man ſucht z. Weil dieſe Differenz ein Theil von $\Delta . x^2$ iſt, ſo ſetze man $z = ax^2 + bx + c$, nach der Methode der unbeſtimmten Coefficienten. Dadurch iſt . . . .

$\Delta z = 2ax + a + b$. Die Vergleichung mit dem gegebenen Werthe von Δz giebt, $a = \frac{1}{2}$; und $a + b = 0$,

alſo $b = -\frac{1}{2}$, und die integrirende Function . . .

$z = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + c$. Die Größe c iſt im Allgemeinen unbeſtimmt. In dem Unterſchiede zwiſchen z und $z + \Delta z$ hebt ſich c, welches in beiden enthalten iſt.

55. Es ſey $\Delta z = x^2$. Wie vorher ſetze man $z = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ſo iſt $\Delta z = 3ax^2 + (3a + 2b)x + a + b + c$. Die Vergleichung mit $\Delta z = x^2$ giebt $3a = 1$; $3a + 2b = 0$; $a + b + c = 0$. Daraus wird die integrirende Function $z = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x \pm d$, oder $z = x(x-1)(2x-1) + d$.

56. Iſt $\Delta z = x^3$, ſo iſt

$$z = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \text{Conſt.}$$

$$= \frac{1}{4}x^2(x-1)^2 + \text{Conſt.}$$

57. Iſt $\Delta z = x^4$, ſo iſt

$$z = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x \pm \text{Conſt.}$$

$$= \frac{1}{30}x(x-1)(2x-1)(3x^2-3x-1) + \text{Conſt.}$$

58. Es ſey $\Delta z = (mx + a)(mx + m + a)$, ſo iſt aus (10.),

$$z = \frac{1}{3m}(mx - m + a)(mx + a)(mx + m + a)$$

Iſt $\Delta z = (mx + a)(mx + m + a)(mx + 2m + a)$, ſo iſt

$$z = \frac{1}{4m}(mx - m + a)(mx + a)(mx + m + a)$$
$$\times (mx + 2m + a),$$
wo die Conſt. nach den Umſtänden beyzufügen iſt.

59. Es ſey $\Delta z = - \frac{1}{(mx + a)(mx + m + a)}$,

ſo iſt $z = \frac{1}{m(mx + a)}$.

Iſt $\Delta z = - \frac{1}{(mx+a)(mx+m+a) \ldots (mx+rm+a)}$,
ſo iſt

$$z = \frac{1}{rm(mx+a)(mx+m+a)\ldots(mx+(r-1)m+a)}.$$

60. Es ſey $\Delta z = \frac{1}{x.x+2.}$. Dieſen Bruch zerlege man in die beiden, $\frac{A}{x.x+1} + \frac{B}{x.x+1.x+2.}$.
Man bringe jenen Bruch und dieſe auf gleiche Nenner, ſo geben die Zähler die Gleichung,

$$x + 1 = A(x + 2) + B.$$

Hieraus wird erhalten, $A = 1$; $2A + B = 1$; alſo $B = -1$, und es iſt

$$\frac{1}{x.x+2.} = \frac{1}{x.x+1} - \frac{1}{x.x+1.x+2.}.$$

Folglich iſt aus (59.)

$$z = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x.x+1.}.$$

61. Es ſey $\Delta z = \frac{1}{x.x+3.}$. Dieſen Bruch zerlege man in die drey Brüche,

$$\frac{A}{x.x+1.} + \frac{B}{x.x+1.x+2.}$$
$$+ \frac{C}{x.x+1.x+2.x+3.},$$

Die Reduction auf denſelben Nenner giebt mittelſt der Zähler die Gleichung,

$x+1.x+2.=A.x+2.x+3.+B.x+3.+C,$

das iſt

$x^2+3x+2=Ax^2+(5A+B)x+6A+3B+C.$

Die Vergleichung der Coefficienten auf beiden Seiten giebt, $A=1$; $B=-2$; $C=+2$, ſo daß

$$\frac{1}{x.x+3.}=\frac{1}{x.x+1.}-\frac{2}{x.x+1.x+2.}$$
$$+\frac{2}{x.x+1.x+2.x+3.}.$$

Daraus folgt

$$z=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x.x+1.}-\frac{2}{3x.x+1.x+2.}.$$

Hieraus erhellt, wie die integrirende Function von $\frac{1}{x.x+n.}$ gefunden wird, wenn n eine ganze Zahl iſt.

62. Man nehme die Winkel, $\varphi-\alpha$; φ; $\varphi+\alpha$; und mehrere auf beiden Seiten von φ in arithmetiſcher Progreſſion, ſo iſt (Goniometrie, 28.)

$$\sin\varphi-\sin(\varphi-\alpha)=2\operatorname{coſ}(\varphi-\tfrac{1}{2}\alpha).\sin\tfrac{1}{2}\alpha;$$

$$\sin(\varphi+\alpha)-\sin\varphi=2\operatorname{coſ}(\varphi+\tfrac{1}{2}\alpha).\sin\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Die zweyte Gleichung entſteht aus der erſtern, wenn $\varphi+\alpha$ für φ geſetzt wird. Setzt man die Differenz in der erſtern $=z$, die in der zweyten $=z+\Delta z$, ſo iſt

$$\Delta z=-4\sin\varphi.\sin\tfrac{1}{2}\alpha.\sin\tfrac{1}{2}\alpha$$
$$=-2(1-\operatorname{coſ}\alpha)\sin\varphi.$$

63. Ferner iſt

$$\operatorname{coſ}\varphi-\operatorname{coſ}(\varphi-\alpha)=-2\sin(\varphi-\tfrac{1}{2}\alpha).\sin\tfrac{1}{2}\alpha;$$

$$\operatorname{coſ}(\varphi+\alpha)-\operatorname{coſ}\varphi=-2\sin(\varphi+\tfrac{1}{2}\alpha).\sin\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Setzt man die Differenz in der erſtern Gleichung $= z$, die in der andern $= z + \Delta z$, ſo iſt

$$\Delta z = -4 \cos\varphi . \sin \frac{1}{2} \alpha . \sin \frac{1}{2} \alpha$$

$$= -2(1 - \cos\alpha) \cos\varphi .$$

64. Iſt $\Delta z = \sin\varphi$, ſo iſt z eine Summe von Sinus, deren Winkel in arithmetiſcher Progreſſion ſind, und dieſe integrirende Function iſt

$$z = \frac{-\sin\varphi + \sin(\varphi - \alpha)}{4 \sin \frac{1}{2} \alpha^2},$$

wo im Nenner auch $2(1 - \cos\alpha)$ geſetzt werden kann.

65. Iſt $\Delta z = \cos\varphi$, ſo iſt

$$z = \frac{\cos(\varphi - \alpha) - \cos\varphi}{4 \sin \frac{1}{2} \alpha^2}.$$

IX. Anwendung auf die Summirung der Reihen.

66. Es ſeyn y und Δy Functionen von x, wenn $\Delta x = 1$ geſetzt wird. Man bezeichne die Werthe der Function y, welche den Werthen $0, 1, 2, 3 \ldots x-1, x, x+1$, von x zugehören, durch $y,0$; $y,1$; $y,2$; $y,3 \ldots y,(x-1)$; y,x; $y,(x+1)$, wo x einen unbeſtimmten Werth der Functionalgröße, und y,x die dazu gehörige Function bedeutet. Die Differenzen der letztern bezeichne man durch $\Delta y,0$; $\Delta y,1$; $\Delta y,2$; . . . $\Delta y, x-1$; $\Delta y, x$; $\Delta y, x+1$; ſo daß

$$y,1 - y,0 = \Delta y,0$$
$$y,2 - y,1 = \Delta y,1$$
$$y,3 - y,2 = \Delta y,2$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$y,(x-1) - y,(x-2) = \Delta y,(x-2)$$
$$y,x \quad - y,(x-1) = \Delta y,(x-1)$$
$$y,(x+1) - y,x \quad = \Delta y, \quad x .$$

Hieraus erhellet, daß $y,(x+1) - y\,o$, die Summe der Differenzen von $\Delta y, o$ bis $\Delta y, x$ iſt. Die Größe y, o iſt eine Conſtans oder auch Null.

67. Eine Reihe von Größen, die durch eine Function von x gegeben werden, zu ſummiren, ſehe man dieſe Function als die Differenz einer andern Function von x an, und ſuche dieſe, nach der vorher gegebenen Anleitung, wenn ſolches möglich iſt. In derſelben ſetze man $x+1$ für x, und dann auch $x=o$, ſo iſt die geſuchte Summe gleich der Function von $(x+1)$, vermindert um die Conſtans, die der Werth der Function für $x=o$ iſt. Die Summe begreift die Glieder, deren Stellen $o, 1, 2, 3 \ldots x$ ſind. Auf ähnliche Art findet man die Summe der Glieder, deren erſtes durch irgend einen beſtimmten Werth von x bezeichnet wird.

68. Wenn die Reihe der durch y bezeichneten Werthe eine durchgehends abnehmende iſt, ſo ſind die Differenzen negativ; oder wenn dieſe als poſitive betrachtet werden, ſo iſt die ſummirende Function negativ. Nehmen jene Werthe ohne Ende ab, ſo daß für ein unendliches x der Werth der Function $=o$ iſt, ſo iſt das Anfangsglied, y, o, (für $x=o$) die Summe aller Glieder der zu ſummiren vorgegebenen Reihe, abſolut genommen.

69. Die Summe der ganzen unendlichen abnehmenden Reihe ſey $=A$, die Summe der Glieder von dem in der Stelle o, bis zu dem in der Stelle x, ſey Y, ſo iſt $A - Y$ die Summe aller übrigen. Hieraus ſieht man, was die Negation der integrirenden Function bedeutet. Sieht man die Differenz in einer abnehmenden Reihe als poſitiv an, ſo findet man eigentlich die Summe der Glieder von dem in der Stelle x bis zu dem unendlich entfernten verſchwindenden. Nimmt man aber ſtatt dieſer Summe die von dem Anfangsgliede bis zu jenem in der Stelle x, ſo findet man für dieſe den Werth $-Y$, welches anzeigt, daß man die Summe Y von dem Anfangsgliede abzuziehen habe, und die Summe der ganzen Reihe, nämlich A, iſt die Conſtans.

70. Die Function $y,(x+1)$, nenne man die ſummatoriſche Function zu der Function $\Delta y, x$. Sofern jene Function als eine Summe angeſehen wird, iſt x eine Zahl, die ſich auf $\Delta x = 1$ als ihre Einheit bezieht. Iſt x eine benannte Größe (Linie, Fläche, Zeit, u. m.), ſo iſt Δx die Einheit zu dieſer Gattung. Alsdann ſetze man $\frac{x}{\Delta x} = u$, oder behalte x als eine Zahlgröße, mit der Benennung ihrer Einheit, und verfahre eben ſo bey andern benannten Größen.

71. Die ſummatoriſche Function wird durch den vorgeſetzten Buchſtab S oder Σ bezeichnet, folgendergeſtalt $S.\Delta y$, oder $\Sigma.\Delta y$, wo Δy das Glied einer Reihe in der Stelle x iſt, und durch eine Function von x gegeben wird.

72. Exempel. I. Die Summe der Cuborum der natürlichen Zahlen von 0 bis x zu finden. — Man ſetze $\Delta y = x^3$, ſo iſt $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{4}x^2(x-1)^2$, aus (56.). Setzt man hier $x+1$ für x, ſo iſt

$$S.x^3 = \frac{1}{4}(x+1)^2 x^2.$$ Die Conſt. iſt hier $= 0$.

Weil die integrirende Function die Summe bis zu dem Gliede $(x-1)^3$ giebt, ſo addire man zu jener noch das letzte Glied x^3, und es iſt $S.x^3 = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2$.

73. Exempel. II. Die Summe der Biquadrate der natürlichen Zahlen von 0 bis x zu finden. — Man ſetze $\Delta y = x^4$, ſo iſt $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x$, aus (57.). Setzt man in dieſer Function $x+1$ für x, oder addirt x^4, ſo iſt $S.x^4 = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x$.

oder $S.x^4 = \frac{1}{30} x(x+1)(2x+1)$
$(3x^2+3x-1)$.

Vergl. arithm. Reihen höherer Ordn. S. 201.

74. Exempel. III. Die Summe der Producte, $1.2 + 2.3 + 3.4 \ldots + x(x+1)$, oder der doppelten Triangularzahlen zu finden. — In (58.) ſetze man $a=0$, und $m=1$, ſo daß $\Delta y = x(x+1)$ ſey. Dadurch iſt $y = \frac{1}{3}(x-1)x(x+1)$. Setzt man in dieſer Function $x+1$ für x, ſo erhält man $S.x(x+1) = \frac{1}{3} x(x+1)(x+2)$. Dieſer Werth wird $= 1.2$ für $x=1$, wie es ſeyn muß, daher Conſt. $= 0$ iſt. Das durch $y, 0$ in (66.) bezeichnete Glied iſt hier $= 0$, daher braucht man keine Conſtans, auch wenn man die Reihe mit 1.2 für $x=1$, anfängt.

75. Exempel IV. Die Summe der Producte, $1.3 + 3.5 \ldots + (2x+1)(2x+3)$ zu finden. — In (58.) ſetze man $m=2$; $a=1$, ſo iſt $\Delta y = (2x+1)(2x+3)$, und $y = \frac{1}{6}(2x-1)(2x+1)(2x+3)$. In dieſer Function werde $x+1$ für x geſetzt, ſo iſt $S.(2x+1)(2x+3) = \frac{1}{6}(2x+1) \times (2x+3)(2x+5) +$ Conſt. Für $x=0$ iſt die Summe das erſte Glied, 1.3; alſo iſt $1.3 = \frac{1}{6}.1.3.5 + C.$ und Conſt. $= \frac{1}{2}$, ſo daß $S.(2x+1)(2x+3)$

$$= \frac{1}{6}(2x+1)(2x+3)(2x+5) + \frac{1}{2}.$$

76. Exempel. V. Die Summe der Producte $1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 \ldots + x(x+1)(x+2)$ iſt $= \frac{1}{4} x(x+1)(x+2)(x+3)$.

77. Exempel. VI. Die Summe der Producte $1.4.7 + 4.7.10 \ldots + (3x+1)(3x+4)(3x+7)$ iſt $= \frac{1}{12}(3x+1)(3x+4)(3x+7)(3x+10) + \frac{14}{3}$.

78. Exempel. VII. Die Summe der Quotienten $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} \ldots\ldots + \frac{1}{x(x+1)}$ iſt $= \frac{x}{x+1}$. — Denn in (59.) ſetze man $m = 1$; $a = 0$, ſo iſt die integrirende Function $= -\frac{1}{x}$, und daher $S.\frac{1}{x(x+1)} = \text{Conſt.} - \frac{1}{x+1}$. Für $x = 1$ iſt $\frac{1}{1.2} = \text{Conſt} - \frac{1}{2}$, alſo Conſt. $= 1$, und die Summe $= 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$. Die Gränze, welcher ſich die Summe immer mehr nähert, je größer x genommen wird, iſt $= 1$, oder die Conſt. (ſ. 69.).

79. Die Summe der Quotienten $\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5.} + \ldots\ldots \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$ iſt $= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(x+1)(x+2)}$. Die Gränze der Summe iſt $= \frac{1}{4}$.

80. Die Reihe der Sinus der Vielfachen von dem Winkel α,

$$\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha \ldots\ldots + \sin n\alpha,$$

zu ſummiren, ſetze man $\sin n\alpha = \Delta y$. Aus (64.) iſt, wenn daſelbſt $\varphi = n\alpha$ geſetzt wird,

$$y = \frac{-\sin n\alpha + \sin(n-1)\alpha}{4\sin\frac{1}{2}\alpha^2}.$$

In dieſem Ausdruck ſetze man $(n+1)\alpha$ für $n\alpha$, weil hier $n\alpha$ für x in (66 u. 67.) ſteht. Nun iſt, mit Beyfügung der Conſtans, welches am bequemſten in dem Zähler des Bruches geſchieht,

$$\Sigma.\sin n\alpha = \frac{-\sin(n+1)\alpha + \sin n\alpha + \text{Conſt.}}{4\sin\frac{1}{2}\alpha^2}.$$

Für $n=0$ iſt die Summe $=0$, alſo Conſt. $=\sin\alpha$. Oder auch für $n=1$ iſt die Summe $=\sin\alpha$. Alſo iſt

$$\frac{-\sin 2\alpha + \sin\alpha + \text{Conſt.}}{4\sin\frac{1}{2}\alpha^2} = \sin\alpha, \text{ oder}$$

$$C + \sin\alpha - 2\sin\alpha.\cos\alpha = 2(1-\cos\alpha)\sin\alpha,$$

welches ebenfalls $C = \sin\alpha$ giebt. Solchergeſtalt iſt

$$\Sigma.\sin n\alpha = \frac{\sin\alpha + \sin n\alpha - \sin(n+1)\alpha}{4\sin\frac{1}{2}\alpha^2}.$$

Da $\sin(n+1)\alpha - \sin n\alpha = 2\cos(n+\frac{1}{2})\alpha.\sin\frac{1}{2}x$, und $\sin\alpha = 2\cos\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\alpha$ iſt, ſo iſt der Zähler dieſes Bruchs $= 2\ (\cos\frac{1}{2}\alpha - \cos)\ (n+\frac{1}{2})\ \alpha(\sin\frac{1}{2}\alpha = 4\sin\frac{1}{2}(n+1)\alpha.\sin\frac{1}{2}n\alpha.\sin\frac{1}{2}\alpha$, alſo

$$\Sigma.\sin n\alpha = \frac{\sin\frac{1}{2}(n+1)\alpha.\sin\frac{1}{2}n\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha}.$$

81. Die Reihe der Coſinus der Vielfachen von α,

$$\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha \ldots\ldots + \cos n\alpha,$$

zu ſummiren, ſetze man $\cos n\alpha = \Delta y$, ſo iſt aus (65.)

$$y = \frac{\cos(n-1)\alpha - \cos n\alpha}{4\sin\frac{1}{2}\alpha^2}.$$

Daraus iſt, auf ähnliche Art, wie für die Sinus,

$$\Sigma.\cos n\alpha = \frac{-1 + \cos\alpha + \cos n\alpha - \cos(n+1)\alpha}{4\sin\frac{1}{2}\alpha^2}.$$

Verwandelt man den Zähler in ein Product, ſo iſt derſelbe zuerſt $= 2(\sin(n+\frac{1}{2})\alpha - \sin\frac{1}{2}\alpha)\sin\frac{1}{2}\alpha$; und ferner $= 4\cos\frac{1}{2}(n+1)\alpha.\ \sin\frac{1}{2}n\alpha.\ \sin\frac{1}{2}\alpha$.

Alſo iſt

$$\Sigma . \cos n\alpha = \frac{\cos\frac{1}{2}(n+1)\alpha . \sin\frac{1}{2}n\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha}.$$

X. Geſchichte der Differenzenrechnung.

In der methodiſchen Anordnung der mathematiſchen Unterſuchungen muß die Differenzenrechnung vor der Differentialrechnung vorangehen. Die letztere iſt aber früher bearbeitet worden als jene. Die geometriſchen Fragen über berührende der Curven, ihre Quadraturen, Cubaturen, Rectificationen, größte und kleinſte Ordinaten, u. m. führten auf verſchwindende Differenzen. Dieſe Fragen waren im 17ten Jahrhundert die intereſſanteſten. Entwickelungen einer Function durch Potenzen der Veränderung der Functionalgröße ſetzen ſchon höhere analytiſche Unterſuchungen voraus, um Bedürfniß zu werden. Summirungen von Reihen bewerkſtelligte man auf dieſe oder jene Art, ohne auf den leichteſten Weg, durch Betrachtung der Differenzen, zu gerathen. Inzwiſchen hat Leibnitz mit ſyſtematiſchem Scharfſinn ſich den Weg zur Differentialrechnung durch die endlichen Differenzen gebahnt. In einem Briefe an den Abbé Conti erzählt er, daß er anfangs die Mathematik nur als Nebenſache getrieben, und ſich um manche in der Zeit ſeiner Jugend merkwürdige neue Unterſuchungen nicht bekümmert habe. Aber die Eigenſchaften der Zahlen zu entdecken, habe ihm Vergnügen gemacht, wie ſeine frühzeitige Abhandlung über die Combinationen vom J. 1666 bezeuge. Bald habe er die Anwendung der Differenzen auf Summirungen gefunden, und ſie bey Zahlenreihen gebraucht. Weiterhin ſey er endlich auf ſeine Differentialrechnung gekommen, wobey ihm insbeſondere ſeine frühern Bemerkungen über die Unterſchiede der Zahlenreihen die Augen geöffnet hätten. Denn nicht durch die Fluxionen der Linien, ſondern durch die Unterſchiede der Zahlen ſey er dazu gelangt, vermittelſt der Bemerkung, daß dieſe Unterſchiede auf ſtetige Größenreihen angewandt, verſchwinden, in Vergleichung der

Größen, wovon ſie die Unterſchiede ſind, dagegen ſie in den Zahlenreihen als eigentliche Größen bleiben. Ich glaube, ſetzt er hinzu, daß dieſer Weg ganz analytiſch iſt, da die geometriſche Differenzenrechnung, welche mit der Fluxionenrechnung einerley iſt, nur einen beſondern Fall der allgemeinen analytiſchen Differenzenrechnung ausmacht, der durch die verſchwindenden Größen leichter wird, als der mit endlichen Differenzen.

Die Verbindung zwiſchen der endlichen Differenzenrechnung und der Differentialrechnung kann nicht beſſer dargeſtellt werden, als es hier von Leibnitz ſchon geſchehen iſt. Man erkennt daraus ſeinen ſcharfen ſpähenden Blick in unbekannte Gegenden der Wiſſenſchaft, und erhält daher einen hinreichenden Beweis, daß er die Differentialrechnung durch ſich ſelbſt gefunden habe.

Newtons Methodus differentialis, die 1711 zuerſt gedruckt worden, enthält, wie oben S. 216 angezeigt iſt, nur Methoden zum Einſchalten, mittelſt der ſucceſſiven Differenzen gegebener Glieder einer Reihe. Die erſte Schrift, worin die Differenzenrechnung auf eine der Differentialrechnung analoge Art abgehandelt, und mit dieſer in Verbindung gebracht iſt, iſt Methodus incrementorum directa et inverſa, auctore *Brook Taylor*. Londini 1715 118 pag. 4, in zwey Abtheilungen, von welchen die zweyte die Auflöſungen wichtiger mathematiſcher und phyſikaliſcher Aufgaben, größtentheils aber durch Infiniteſimalrechnung enthält. Die Notation iſt unbequem. Die Differenzen werden durch Puncte oder kleine Buchſtaben, als Zahlzeichen, unter den Symbolen der veränderlichen Größen angedeutet. Die Anzahl der Puncte oder der Buchſtab zeigen die Ordnung der Differenz an, eine Nachahmung von Newtons Bezeichnung der Differentiale, nach welcher Puncte über den Symbolen der veränderlichen Größen Differentiale andeuten. Durch Strichelchen über und unter den Buchſtabenzeichen werden die auf einander folgenden Glieder einer Reihe angegeben. Der Vortrag in dieſer Schrift iſt durch Bezeichnung und Kürze nicht leicht faßlich. Doch iſt ſie wegen der neuen Methode wohl

werth, daß man ſie durchgehe, wenn man mit den Materien ſchon bekannt iſt. Die Formel in (16.) für die Entwickelung der Function, $f(x+u)$, iſt darin der 7te Satz. Sie iſt daſelbſt aus denſelben Gründen, wie hier geſchehen iſt, hergeleitet, nämlich aus der Formation einer arithmetiſchen Reihe irgend einer Ordnung durch die Anfangsglieder der Differenzreihen. Taylor nimmt nur die Stellenzahl des entwickelten Gliedes für eine ganze. Die wichtige Formel in (17.) iſt bey Taylor das zweyte Corollarium des 7ten Satzes. Er findet ſie unmittelbar dadurch, daß er die Incremente als verſchwindend betrachtet, und nun für ſie die ihnen proportionalen Fluxionen (Differentiale) ſetzt. Dadurch werden in unſerer Formel die Factoren u, $u - \Delta u$, $u - 2\Delta u$, $u - 3\Delta u$ etc. ſich alle gleich, jeder $= u$, und die Coefficienten P, Q, R, etc. werden Differentialquotienten der ſucceſſiven Ordnungen, $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ etc. ſo daß der Satz bey Taylor die jetzt gewöhnliche Form, bis auf die Bezeichnungsart, hat. In dem 11ten Satze ſind zwey Integrationsformeln für $\int y \partial x$ enthalten, die mit der Entwickelungsformel nichts gemein haben, als die Fortſchreitung nach den ſucceſſiven Differentialquotienten. Sie ſind allgemeiner als eine ihnen ähnliche, welche Joh. Bernoulli ſchon im J. 1694 bekannt machte, und ſie als die allgemeinſte in ihrer Art angab. Denn in der Taylorſchen Form läßt ſich das conſtante Differential ſo wählen, daß die ſucceſſiven Differentiationen möglichſt einfach ausfallen, da in der Bernoulliſchen Form das conſtante Differential ein beſtimmtes iſt. Davon aber noch in den Integrationsmethoden. Die Formel wird in dem 12ten Satze noch auf Integrale höherer Ordnungen erweitert. In dem 13ten Satze, dem erſten der zweyten Abtheilung, wird gezeigt, wie aus einigen gleich weit abſtehenden Gliedern einer Reihe ein anderes Glied durch ſeinen Abſtand von einem der beiden äußerſten Gliedern annähernd gefunden werde; in dem 14ten Satze, wie die Summe der Glieder aus dem

Geſetze der Formation hergeleitet wird, wenn es möglich iſt. Dazu iſt in der erſten Abtheilung durch Bemerkungen über die umgekehrte Differenzenrechnung Vorbereitung gemacht. Taylor lieferte darüber noch Nachträge in den engliſchen Tranſactionen. Die übrigen Sätze enthalten Anwendungen der Infiniteſimal Differenzen.

Bald nach ihrer Erſcheinung fand die Tayloriſche Schrift einen Commentator an Nicole, der in den Mém. de l' Acad. des Sc. 1717, 1723 und 1724, die Methode und ihre Anwendungen ſehr gut erläuterte, allein nicht über die erſten Differenzen hinausgieng. Er zeigt, wie Reihen, deren Glieder Producte aus Factoren in arithmetiſcher Progreſſion ſind, ſummirt werden; auch, wie die Summe von Brüchen gefunden wird, deren Nenner zweytheilige Factoren von einer gewiſſen Form enthalten.

Jacob Stirling handelte die Differenzenrechnung ausführlich ab in der Schrift: Methodus differentialis: ſive tractatus de ſummatione et interpolatione ſerierum infinitarum, Londini 1730, 153 pag. in 4. Es kommen darin feine und ſchwere Unterſuchungen über die Summirung und ſolche Verwandlungen der Reihen vor, wodurch ſie ſchneller convergirend gemacht werden. Merkwürdig ſind die Methoden, aus der Relation der Differenzen das ſummatoriſche Glied in Geſtalt einer unendlichen Reihe zu liefern, deren Glieder Brüche mit Factoren in arithmetiſcher Progreſſion im Nenner ſind. Auch zeigt Stirling, wie man, nachdem das ſummatoriſche Glied nahe gefunden iſt, eine Ergänzung wiederum nahe, und zu dieſer wieder eine Ergänzung fortſchreitend finden könne.

Euler hat in den beiden erſten Kapiteln ſeiner Differentialrechnung (1755) die Rechnung mit endlichen Differenzen ſehr lichtvoll vorgetragen. Er iſt der erſte, der die umgekehrte Methode der Differenzen ausführlich behandelte, wiewohl er doch bey Formeln mit einer veränderlichen Größe ſtehen blieb. Er macht den Übergang zu der Differentialrechnung mit der Bemerkung, daß die Analyſis des Unendlichen nur ein beſonderer Fall der Methode der Differenzen ſey. Nur läßt er dadurch eine Dunkelheit oder giebt

Veranlaſſung zu Schwierigkeiten, daß er für die endlichen Differenzen unendlich kleine oder dem Nichts gleiche Veränderungen ſetzt.

Unter den Engländern hat noch Emerſon, Verfaſſer vieler mathematiſchen Lehrbücher, im J. 1763 eine Schrift über die Differenzenrechnung (the method of Increments) herausgegeben, welche Hutton und la Lande ſehr rühmen.

Boſſüt hat in der Encyclopédie méthodique, dieſe Rechnung ſehr deutlich in dem Artikel différences finies, vorgetragen, und hernach noch ausführlicher in der Einleitung zu ſeinen traités de Calcul différentiel et integral, à Paris, an VI. Auch hat Couſin in ſeinem traité de calcul différentiel et intégral (à Paris an IV. 1796. in 4.) in der Einleitung, Cap. 3. eine ſehr gute nur kurze Überſicht dieſer Lehre gegeben, und zu Ende des Werks höhere Unterſuchungen über die Integration der Gleichungen mit endlichen Differenzen mitgetheilt.

In den deutſchen Lehrbüchern der Mathematik iſt die Unterſuchung über die endlichen Differenzen der Functionen faſt ganz vernachläſſigt. Etwas findet man in Segners elementis Analyſeos infinit. ſect. 13, und 20. und in Pasquichs mathemat. Analyſis, 1r. Th. 16ten Abſchn. Segner macht dadurch eine Verwirrung, daß er eine Formel mit endlichen vollſtändigen Differenzen eine aequatio differentialis completa nennt, und die Differentialgleichungen als die unvollſtändigſten anſieht.

Zu dieſen literariſchen Bemerkungen füge ich noch die Nachrichten von den neueſten Bemühungen der franzöſiſchen Analyſten aus Montücla Geſchichte der Mathem. 3 Th. 256. f. S. bey.

Die ſchwere Theorie der Integration von Gleichungen mit endlichen Differenzen zwiſchen mehrern veränderlichen Größen, die ſelbſt Euler unberührt gelaſſen hat, iſt von la Grange in dem erſten Bande der Turiner Abhandlungen (1759) vorgenommen worden. Er behandelt ſie auf eine ähnliche Art wie die Differentialgleichungen dieſer Gattung

und gelangt dadurch zu Integrationen endlicher Differenzen, die bis dahin auf keine Weiſe zu erhalten geweſen waren.

Condorcet unternahm über dieſe Differenzengleichungen eine ähnliche Bearbeitung, wie es von ihm mit den Differentialgleichungen geſchehen war. In den Memoiren der Akademie vom J. 1770 lieferte er die Bedingungsgleichungen, welche zu erkennen geben, ob eine Gleichung mit endlichen Differenzen aus einer um einen Grad unmittelbar niedrigern entſtanden ſeyn könne, und dann, wenn dieſes möglich iſt, ſucht er die Mittel, dieſe Gleichung aus jener herzuleiten, wovon er auch einige Beyſpiele beyfügt. Eine weitere Ausführung ſeiner Theorie theilte er in dem Jahrgange für 1771 mit. Freylich hat die Entdeckung jener Gleichung große Schwierigkeit, eben ſo wie in der eigentlichen Integralrechnung. Wenn man ſieht, wie ſehr verwickelte Differenzengleichungen auf die integrirenden gebracht werden, ſo möchte man faſt glauben, daß dieſe ſchon zum voraus bekannt geweſen ſeyn. Viele Leſer werden wünſchen, daß Condorcet ſein Verfahren deutlicher und ausführlicher entwickelt hätte. Aber er ſcheint nur für ſeines gleichen haben ſchreiben zu wollen.

Eine neue Erweiterung erhielt dieſe Rechnung durch la Place in zwey Abhandlungen, die in den Mém. préſentés, T. 6. et. 7. enthalten ſind. Darauf lieferte dieſer große Analyſt noch eine lange Abhandlung in den Memoiren der Akad. von 1773, über die lineariſchen Gleichungen mit endlichen Differenzen, worin die Frage iſt, bey einer gegebenen lineariſchen Gleichung mit endlichen Differenzen, erſtlich zu beſtimmen, ob für ſie ein Integral von einer gegebenen Form möglich ſey, zweytens in dem Falle der Möglichkeit die Einrichtung ſo zu treffen, daß ſie nach den Methoden bey Differentialgleichungen integrirt werden könne; bey welcher Gelegenheit eine Methode, die Euler angewandt hat, eine Differenz der zweyten Ordnung auf eine von der erſten zu bringen, erweitert und vollkommner gemacht wird. La Place zeigt zu,

gleich den großen Nutzen der Rechnung mit endlichen Differenzen in der Verbindung mit den partiellen Differentialen, da die Beſtimmung der willkührlichen Functionen oft von der Integration der erſtern abhängt

Dieſen wichtigen, aber ſchweren Abhandlungen mag man noch eine beyfügen, welche Charles im J. 1783 der Akademie der Wiſſenſchaften übergab. Man muß bedauern, daß ihr Verfaſſer ſo frühzeitig durch den Tod hingerafft iſt.

Differentiale ſind die Glieder des Verhältniſſes der Veränderungen zweyer oder mehrerer zuſammengehörigen Größen, ſo fern dieſes Verhältniß nicht von der Quantität der Veränderungen, ſondern bloß von den veränderlichen Größen abhängt. Nämlich, wenn zwiſchen zwey Größen, x, y, irgend eine Relation feſtgeſetzt iſt, und dieſe Größen um Δx und Δy ſich verändern, ſo bleibt die Relation zwiſchen $x + \Delta x$ und $y + \Delta y$ dieſelbe wie zwiſchen x und y, und das Verhältniß $\Delta x : \Delta y$ hängt theils von dieſer Relation, theils von der willkührlich zu beſtimmenden Quantität der Veränderungen ab. Betrachtet man das Verhältniß der Veränderungen von x und y nur bloß in Rückſicht auf die Beſtimmung durch die Relation zwiſchen dieſen Größen, ſo iſt es ein Differentialverhältniß, und die Glieder deſſelben heißen Differentiale. So heißt auch der Theil des Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, der von der Quantität der Veränderungen unabhängig iſt, ein Differentialquotient. Das Differentialverhältniß für die Größen x, y wird bezeichnet durch $\partial x : \partial y$, und der Differentialquotient durch $\frac{\partial y}{\partial x}$ oder $\frac{\partial x}{\partial y}$.

Es iſt nöthig, das Differentialzeichen durch eine beſondere Form des Buchſtabens von dem Größenzeichen zu unterſcheiden. In Frankreich, und in den neuern Abhandlungen der Petersburger Akademie, hat man dies angefangen,

und in dieſem Wörterbuche wird das Differentialzeichen durch das gebogene ∂ ausgedruckt werden. Bis faſt hierher iſt in dieſem Werke dafür das curſive *d* gebraucht.

Ein paar leichte Beyſpiele werden dieſes ganz deutlich machen. Es ſey $yy = ax$, die einfachſte Gleichung für die Parabel. Nun iſt auch $(y + \Delta y)^2 = a(x + \Delta x)$. Zieht man jene Gleichung von dieſer ab, ſo bleibt . . . $2y\Delta y + \Delta y^2 = a\Delta x$. (Wegen der Bezeichnung der Differenzen oder Veränderungen, ſehe man den Artikel Differenz). Nun iſt $\Delta x : \Delta y = 2y + \Delta y : a$. Das Verhältniß der Veränderungen hängt alſo theils von y, theils von Δy ab. Betrachten wir das Verhältniß, ſo fern es von y allein, und nicht zugleich von der Quantität, die man der Veränderung Δy giebt, abhängt, ſo iſt es $= 2y : a$, und dieſes wird zum Unterſchiede von jenem durch $\partial x : \partial y$ bezeichnet, ſo daß $\partial x : \partial y = 2y : a$ iſt.

Es ſey $2ax - xx = yy$, die Gleichung für den Kreis, ſo iſt $2a(x + \Delta x) - (x + \Delta x)^2 = (y + \Delta y)^2$. Daraus iſt $2a\Delta x - 2x\Delta x - \Delta x^2 = 2y\Delta y + \Delta y^2$, und

$$\Delta x : \Delta y = 2y + \Delta y : 2a - 2x - \Delta x.$$

Das Differentialverhältniß iſt

$$\partial x : \partial y = y : a - x.$$

In beiden Beyſpielen kann ∂x gegen ∂y unvergleichbar klein werden, wenn nämlich $y = 0$ geſetzt wird, in dem Anfangspuncte der Curve. Am Kreiſe iſt ∂y gegen ∂x unvergleichbar klein, wenn $x = a$ genommen wird, wodurch $y = a$ wird.

Die Differentialverhältniſſe ſind von dem wichtigſten und ausgebreitetſten Nutzen Denn ſie ſind charakteriſtiſch für die Relation der veränderlichen Größen, eben daher weil ſie nicht von der willkührlichen Quantität der Veränderungen abhangen. Die Relation der Größen beſtimmt ganz allein das für ſie gehörige Differentialverhältniß, und dieſes hinwiederum jene, bis auf die unveränderliche Größe, welche noch in die Gleichung zwiſchen

den Größen einzuführen ſeyn mag, eben ſo wie bey der Beſtimmung derſelben aus den endlichen Differenzen.

Dieſes auf die allgemeinſte Art vollkommen einzuſehen, dient die in dem Artikel Differenzenrechnung (17.) gefundene Formel für die endliche Veränderung einer Function von x, wenn x ſich um die Größe u ändert. Es iſt $f(x+u) - fx = pu + \frac{1}{2}qu^2 + \frac{1}{6}ru^3 + \frac{1}{24}su^4 +$ etc. Der erſte Theil der Gleichung bezeichnet die Veränderung der Function, der zweyte ſtellt ihren Werth durch die Veränderung u der Functionalgröße x dar. Man ſetze $fx = y$, und $u = \Delta x$, ſo iſt $\frac{\Delta y}{\Delta x} = p + \frac{1}{2}q\Delta x + \frac{1}{6}r\Delta x^2 + \frac{1}{24}s\Delta x^3 +$ etc. und p, als der von Δx, und dadurch auch von Δy, unabhängige Theil des Quotienten der Veränderungen, iſt der Differentialquotient für die Function von x in Beziehung auf x. Nun iſt eben ſo q der Differentialquotient für die Function p; ferner r der Differentialquotient für die Function q, u. ſ. f. (a. a. O. 18.) Demnach ſind durch p die Functionen q, r, s, etc. beſtimmt, und dadurch der Quotient der Differenzen Δy, Δx, und dadurch für jedes $x+\Delta x$ die zugehörige Veränderung $y+\Delta y y+\Delta y$. Folglich erhellt, wie die Function p charakteriſtiſch iſt für die Function von x, oder ſie vollkommen, bis auf die Conſtante, welche allen Werthen der Function gemein iſt, beſtimme.

Dieſe Function p iſt es, welche durch das Symbol eines Quotienten $\frac{\partial y}{\partial x}$ bezeichnet wird, ſo daß $\partial x : \partial y = 1 : p$ iſt. Die Größenzeichen x, y zeigen die zuſammengehörigen veränderlichen Größen an, von welchen y irgend eine Function der andern x iſt. Das vorgeſetzte

Buchſtabenzeichen ∂ giebt bloß den Urſprung der Function $p = \frac{\partial y}{\partial x}$ zu erkennen, daß ſie der weſentliche und charakteriſtiſche Theil des Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, der endlichen Veränderungen von x und y, iſt.

Die Formel $p = \frac{\partial y}{\partial x}$ iſt keine abgekürzte. Was aus der Formel für die endlichen Differenzen weggelaſſen wird, wird nicht als Null, oder als unendlich klein, oder als unvergleichbar klein betrachtet, ſondern es wird weggelaſſen, weil es gar nicht zu demjenigen gehört, was man durch das Symbol $\frac{\partial y}{\partial x}$ bezeichnet. Es gehört zu der Beſtimmung der Quantität der Veränderungen, von welcher in der Differentialrechnung ſo wenig die Frage iſt, daß man vielmehr ſorgfältig zu verhüten hat, ſie als eine Rechnung über Quantität der Veränderungen oder Unterſchiede betrachten zu laſſen. Es iſt hier ein ganz anderer Fall, als bey abgekürzten Formeln und Gleichungen. In ſolchen gehört das weggelaſſene weſentlich zu einer Größe, oder zu ihrer Relation gegen andere, allein es hat, unter gewiſſen Bedingungen keinen erheblichen Einfluß auf die Beſtimmung ihrer Quantität, und wird bloß als minder weſentlich weggelaſſen. Um allen Mißverſtand zu verhüten, ſage man nicht, $\frac{\partial y}{\partial x}$ iſt gleich einer gewiſſen Function von x und y, ſondern, $\frac{\partial y}{\partial x}$ zeigt eine Function von x und y an. Jenes kann die Vorſtellung von einer beſondern Größe erwecken, die in der Form noch von der Function unterſchieden, und auf irgend eine andere Art gegeben oder angenommen wäre.

Die Symbole ∂x: ∂y heißen die **Differentiale** von x und y; allein man muß ſie durchaus nicht als Größen betrachten, ſo klein man dieſe ſich auch vorſtellen möch=

te. Denn dadurch ſetzt man eine Näherungsgleichung anſtatt der genauen und vollſtändigen, welche noch die Potenzen von Δx enthält.

Darum ſollte man genauer Weiſe im Singulari nicht ſagen, das Differential, weil dieſes eine Quantität auf verſteckte Art in ſich ſchließt. Ein Differential bezieht ſich immer als Verhältnißglied auf ein anderes Differential. Inzwiſchen iſt es zur Bequemlichkeit des Ausdrucks wohl vergönnt, durch Differential im Singulari eines der Glieder eines Differentialverhältniſſes zu bezeichnen, eben ſo wie die Differentiale ihre einzelnen Symbole haben. Man kann nur nicht, wie bey endlichen beſtimmbaren Größen, die Differentiale auf zweyerley Art ausdrücken, einmahl durch die ihnen beygelegte Quantität, das iſt, durch ihr Verhältniß zur Einheit oder einer andern gegebenen Größe, und dann noch durch die ihnen proportionalen Größen, die ihr Verhältniß angeben.

Die Differentiale kann man auch nicht als Null betrachten, weil ſie dadurch aufhören, Differenzen zu ſeyn, und weil es auch nicht begreiflich iſt, wie eine Null ſich mit einer andern Null vergleichen laſſe. Ein Differential iſt oft in Vergleichung mit einem andern Null, wie oben in den Beyſpielen von der Parabel und dem Kreiſe angemerkt iſt. Das Differential einer Function, deren Werth ein Größtes oder Kleinſtes iſt, iſt für dieſen Werth genau Null in Vergleichung mit dem Differential der Functionalgröße. Es gäbe alſo ein Null, das mehr Null wäre, als ein anderes Null es iſt.

Um die Schwierigkeit, wie Differentiale weder etwas noch Null ſeyn können, zu löſen, gehe man auf den Urſprung derſelben zurück. Es ſoll $\frac{\partial y}{\partial x}$ den charakteriſtiſchen Theils p des Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, der Veränderungen von y und x, bedeuten. Sollen ∂y und ∂x nicht bloße Buchſtabenzeichen zur Bezeichnung des Urſprungs

der Function p ſeyn, ſo ſind es keine Veränderungen der Größen x und y, ſondern zwey zuſammengehörige Größen, die mit jenen in eine gewiſſe Verbindung gebracht werden, wie die Coordinaten der eine Curve berührenden geraden mit den Coordinaten der krummen Linie. Die Quantität dieſer nebenher eingeführten Größen bleibt willkührlich; nur ihr Verhältniß iſt durch die Function p beſtimmt. Oder man ſetze, da p eine bloße Zahlgröße iſt, $px = t$, ſo iſt das Verhältniß $t : x$ gleich dem $\partial y : \partial x$, und man kann für die Differentiale die endlichen, ihnen proportionalen, t, x, nehmen. Neben den beiden entgegengeſetzten Begriffen, Etwas und Nichts, giebt es noch einen Begriff, nämlich verhältnißmäßige Größen. Dieſes wird durch die folgenden Betrachtungen noch deutlicher werden.

Aus der Formel für die endlichen Differenzen, . . $\frac{\Delta y}{\Delta x} = p + \frac{1}{2} q \Delta x + \frac{1}{6} r \Delta x^2 + \text{etc.}$ erhellt, daß p die Gränze iſt, welcher ſich der Quotient der Differenzen immer mehr nähert, je kleiner ſie genommen werden. Daher kann man Differentiale für die Glieder eines Gränzverhältniſſes erklären, welchem ſich das Verhältniß endlicher Veränderungen ohne Ende nähert. Dieſe Vorſtellung iſt in den neuern Zeiten die gewöhnlichſte geworden. Doch mag es Schwierigkeit verurſachen, ſich ein Verhältniß verſchiedener Größen vorzuſtellen, die weder Null noch Etwas ſeyn ſollen. Man könnte auch an der Realität des Begriffs ſelbſt zweifeln, weil man das Verhältniß nie erreichen zu können glauben möchte. Allein unſere Formel zeigt uns den Differentialquotienten p als einen ganz beſtimmten Begriff. Man muß ſich denſelben nicht als einen terminum ad quem, den man nie ergreifen kann, ſondern vielmehr als einen terminum a quo vorſtellen. In der That hängen alle nach p folgende Theile des Differenzquotienten von p ab, und ſind dadurch, wenn nämlich Δx beſtimmt iſt, gegeben. Bricht die Reihe der Functionen q, r, s, t, etc. nicht ab, ſo iſt es der Quotient der endlichen Differenzen, welcher nie vollſtändig zu er-

halten ſteht, dem man ſich nur nähern kann, dagegen der Differentialquotient durch p vollſtändig dargeſtellt wird.

Die Differentiale darf man ſich auch als **unendlich kleine Unterſchiede** vorſtellen, und muß es ſelbſt, wo man ſich eine ſtetige Folge veränderlicher Größen gedenkt. Zwiſchen zwey Werthen einer Größe ſind unendlich viele Mittelwerthe gedenkbar. In einer ununterbrochenen Folge veränderlicher Größen, die nach irgend einem Geſetze aus einer oder mehrern andern Größen beſtimmt werden, muß man ſich nicht bloß viele, ſondern unendlich viele Glieder vorſtellen. Denn zwiſchen noch ſo vielen Gliedern der Folge laſſen ſich immer mehrere einſchieben. Es iſt keine Gränze des Einſchaltens vorhanden; die Reihe iſt eine ſtetige oder continuirliche. Der Unterſchied zwiſchen zwey nächſten Gliedern der ſtetigen Reihe iſt keine endliche, mit einer Einheit vergleichbare Größe, weil dabey die Reihe nicht eine ſtetige wäre. Die Succeſſion in der ſtetigen Reihe führt aber doch auf einen Unterſchied der unmittelbar auf einander folgenden Glieder. Dieſer Unterſchied muß alſo unendlich klein genannt werden. Man nenne ihn aber, um Mißverſtand zu vermeiden, nicht eine Größe, ſondern nur etwas unendlich kleines, das bloß mit einem andern von derſelben Beſchaffenheit verglichen werden kann. Wir haben hier einen reinen Verſtandesbegriff, der ſich nicht ſinnlich darſtellen läßt, aber doch intellectuelle Realität hat. Die **Differentiale** ſind die, **bloß unter ſich vergleichbaren Unterſchiede der unmittelbar auf einander folgenden Glieder einer ſtetigen Reihe.** Wie ſolche Unterſchiede gedacht und verglichen werden können, zeigt unſere Differenzenformel ſehr deutlich. Man kann in derſelben $\Delta x = 0$ ſetzen, und es bleibt doch p für den Quotienten der Unterſchiede, die alſo die unendlich kleinen in der ſtetigen Folge ſind.

Die genaue und völlig einleuchtende Beſtimmung des Begriffs der Differentiale, was man in Frankreich la Métaphyſique du Calcul différentiel nennt, hat von Anfang an Schwierigkeit gemacht. Man rechtfertigte

die Weglaſſung der Potenzen der Differentiale dadurch, daß dieſe unendlich kleine Größen ſeyn, ohne doch zu zeigen, wie dieſes Mittelding zwiſchen Null und Etwas gedenkbar ſey, und wie man die Theilbarkeit und Vermehrbarkeit einer Größe, darauf anwenden könne. Darum verfaßte Maclaurin ein ausführliches, ſehr tiefſinniges Werk, (A treatiſe of Fluxions, 1742. 2 vol. in 4.) worin er die Vorſtellung von unendlich kleinen Größen ganz vermied, und nach der Methode der alten Geometer alle Sätze aus unbezweifelbaren Axiomen herleitete. Dieſes Verfahren wird aber durch Weitläufigkeit beſchwerlich. Die Berliner Akademie der Wiſſenſchaften fand es noch im J. 1784 nöthig, eine deutliche und genau beſtimmte Theorie des in der Mathematik ſo genannten Unendlichen zu einer Preisaufgabe zu machen. Sie verlangte, man ſolle zeigen, wie es möglich geweſen, aus einem Begriffe, den große Analyſten für unſtatthaft erklärt hätten, ſo viele richtige Lehrſätze herzuleiten; und wünſchte, daß man ein ſicheres, einleuchtendes Princip angeben möchte, das in die Stelle des Unendlichen geſetzt werden könnte, ohne die Unterſuchungen zu lang und beſchwerlich zu machen. L'Huilier in Genf erhielt den Preis. Die zweyte, vermehrte und verbeſſerte Ausgabe ſeiner Preisſchrift iſt unter dem Titel: Principiorum calculi differentialis et integralis expoſitio elementaris, 1795, (368 S. 4.) herausgekommen. Es liegt darin der Begriff vom Gränzverhältniſſe zum Grunde. Dieſe Schrift iſt durch die Anwendungen der Infiniteſimalrechnung ſehr lehrreich.

Leibnitz, ſo ſehr er Philoſoph war, ſcheint doch nicht mit dem Begriff von Differentialen ganz aufs Reine gekommen zu ſeyn, oder wenigſtens bedient er ſich ſolcher Ausdrücke, die Erklärungen oder Einſchränkungen bedürfen. In der Abhandlung, nova methodus pro maximis et minimis, etc. Acta Erud. Octobr. 1684, der erſten über die Differentialrechnung erſchienenen, ſagt er, man möge die Differentiale ∂x, ∂y den Differenzen oder augenblicklichen Zunahmen oder Abnahmen für proportional halten, erklärt aber nicht, was dieſe incrementa vel

decrementa momentanea ſeyn. In dem Aufſatze de motuum coeleſtium cauſis, A. E. 1689 gebraucht Leibnitz unendlich kleine Größen. Wenn man, ſagt er, unendlich kleine Größen anzunehmen Bedenken trüge, ſo möchte man ſo kleine Größen, als man nur wolle, dafür ſetzen, nur ſo klein, daß der daraus entſpringende Fehler unbedeutend, ja kleiner als jeder angebbare ſey Die Unterſchiede unendlich kleiner Größen, ſetzt er hinzu, ſind unendlichemahl unendlich klein, wie z. B. der Sinus verſus eines unendlich kleinen Winkels. Es gebe unendlich viele Grade, ſowohl des unendlich Großen, als des unendlich Kleinen. In der Obſervatio de vero ſenſu methodi infiniteſimalis, A. E. 1712 vergleicht er das Endliche, das unendlich Große, und das unendlichemahl Unendliche mit dem Durchmeſſer eines Sandkörnchens, der Erde und des Sternhimmels, und umgekehrt eben ſo das Endliche, das unendlich Kleine und das unendlichemahl unendlich Kleine. Doch bemerkt er, daß wenn man zuletzt mit einem Sprunge das Unendliche ſelbſt für ſolche Größen ſetze, man dadurch nur die Bequemlichkeit des Ausdrucks beabſichtige, ein breviloquium mentale; non niſi *toleranter vera* loquimur, quae explicatione rigidantur. In einer gegen Nieuwentyt gerichteten Schrift (A. E. 1695) ſagt Leibnitz, daß er auch diejenigen Größen für gleich halte, deren Unterſchied unendlich klein iſt, und wenn ein ſolcher Unterſchied zwar nicht ganz Null geſetzt werden könne, ſo ſey er doch mit den Größen, wozu er gehört, nicht vergleichbar, wie wenn man einen Punct zu einer Linie oder eine Linie zu einer Fläche addire (das ſind aber nicht homogene Dinge, wie Differentiale und die zugehörigen endlichen Größen). Nicht bloß die unendlich kleinen Linien, wie ∂x, ∂y, nimmt er als wahre Größen an, ſondern auch ihre Producte und Potenzen. In einem Briefe an Wallis vom J. 1698 ſagt Leibnitz, daß es beſſer ſeyn möchte, die Elemente oder augenblicklichen Differentiale für Größen als für Nichts zu halten. Denn ſie hätten ſelbſt wieder ihre Unterſchiede, und könnten durch angebbare, ihnen proportionale Linien

dargeſtellt werden. Es ſey unbegreiflich, oder verurſache wenigſtens unnöthige Dunkelheit, wenn man das von ihm ſogenannte charakteriſtiſche Dreyeck einem angebbaren Dreyeck als ähnlich annehme, wie Wallis es thue, und es doch auch für Nichts erkläre, ſo daß man nur die Form eines Dreyecks ohne Quantität behalte. Ohne Quantität laſſe ſich eine Figur nicht gedenken. Man könne ſich ja das Dreyeck immer kleiner und kleiner vorſtellen, ſo wie man zwey concentriſche Kreisbogen immer kleiner machen kann, wobey ſie aber immer ungleich, und es ſelbſt im Verſchwinden bleiben. In einem Briefe an Tournemine vom J. 1714 ſagt Leibnitz, die Infiniteſimalgrößen ſind nicht Null, auch nicht in der Schärfe unendlich kleine, ſondern unvergleichbar oder indéfiniment kleine Größen.

Newton iſt hierin befriedigender und philoſophiſcher, wenn er gleich die Gründe ſeiner Rechnung nur kurz erklärt. Was Leibnitz Differentiale nennt, nennt er Momente. Dieſe druckt er durch Producte aus einer zuerſt als endlich betrachteten kleinen Größe in einen endlichen Factor aus. Jene kleine Größe bezeichnet er durch *o*: den Factor nennt er die Fluxion der veränderlichen Größe, der Fluente. In der Differenzengleichung iſt dieſe *o* in allen Gliedern vorhanden. Wird die Gleichung durch *o* dividirt, ſo bleibt *o* bloß in denen Gliedern, die vorher das Quadrat und höhere Potenzen von *o* enthielten. Wird *o* unendlich klein geſetzt, ſo bleiben bloß die Glieder, die zuerſt die Momente in der erſten Potenz enthielten, mit den Fluxionen allein. Die Fluxionen ſtellen Geſchwindigkeiten vor, wenn die veränderlichen Größen (fluentes) als Wege eines beweglichen Dinges gedacht werden. Sie ſind proportional den Differentialen nach der von Leibnitz eingeführten Benennung. Methodus Fluxionum. Probl. I. in demonſtr. ſolutionis.

In den Principien der Naturwiſſenſchaft gebraucht Newton die Fluxionen nicht, ſondern bringt alles auf die letzten Verhältniſſe der verſchwindenden Veränderungen, weil er in dieſem Werke ganz den ſynthetiſchen Vortrag beobachtet. In dem zweyten Buche kommt nur

ein Lemma über das Moment eines Products vor, zum Gebrauch einiger folgenden Sätze. Das letzte Verhältniß der Veränderungen erklärt er durch ratio quantitatum, non antequam evaneſcunt, non poſtea, ſed quacum evaneſcunt. (Phil. nat. princ. math. L. I. Lemma XI. ſchol.). Das letzte Verhältniß der Veränderungen iſt einerley mit dem Verhältniß der Fluxionen.

Hiemit ſtimmt Eulers Erklärung der Differentialrechnung in ſeinem Werke über dieſelbe überein. Sie iſt, ſagt er, die Methode, das Verhältniß der verſchwindenden Incremente zu beſtimmen, welche Functionen von irgend einer Art zukommen, indem die veränderliche Größe, wovon ſie Functionen ſind, ein verſchwindendes Increment erhält. Er ſetzt hinzu, die Differentialrechnung beſchäftige ſich nicht ſowohl mit den verſchwindenden Veränderungen, als welche Null ſeyn, ſondern mit ihrem Verhältniſſe, welches durch endliche Größen ausgedruckt werden könne, daher in der That dieſe Rechnung es mit endlichen Größen zu thun habe. Auch dieſe Vorſtellung kommt mit dem von Newton gebrauchten Verfahren überein.

Inzwiſchen mag es Schwierigkeit verurſachen, ſich ein Verhältniß vorzuſtellen, mit welchem zwey Größen verſchwinden, oder welches zwey Größen, die Null ſind, haben. Man muß aber die Veränderungen zweyer Größen x, y durch Producte, $P\omega$, $Q\omega$, ausdrucken, wie es Newton gethan hat. Die Factoren P, Q ſind zum Theil von ω unabhängig. Setzt man nun die willkührliche $\omega = 0$, ſo verwandelt ſich das Verhältniß $P:Q$ in ein anderes, $p:q$, nämlich in das Verhältniß der verſchwindenden Veränderungen. Newton hat auf den Unterſchied der Verhältniſſe $P:Q$ und $p:q$ nicht geachtet. Das letztere bezeichnet er durch $\dot{x}:\dot{y}$, und ſetzt ſchon für die endlichen Veränderungen die Producte $\dot{x}o$; $\dot{y}o$. Dadurch ſcheint etwas weggelaſſen zu werden, was zu der Beſtimmung von $p:q$ gehören möchte, beſonders da Newton ſagt, daß in der durch o dividirten Differenzengleichung die in o

multiplicirten Glieder für Null gehalten werden können in Vergleichung mit den andern Gliedern, und daß er ſie deswegen bey Seite ſetze. Man muß aber ja nicht ein verſchwindendes Verhältniß, das ein ſelbſtſtändiges iſt, als ein genähertes oder ſubſtituirtes betrachten.

Durch d'Alembert ward es gewöhnlich, die Differential- und Integralrechnung auf den Begriff von Gränzverhältniß zu gründen. Er drang darauf in der ältern Encyclopädie, woraus die Artikel über Differentialrechnung in die Encyclopédie méthodique übergetragen ſind. Wenn man ein Differentialverhältniß als das Gränzverhältniß der Veränderungen zweyer Größen erklärt, ſo bleibt es immer ein Sprung, den man von dem Endlichen zu dem unendlich Kleinen thut. In einer geometriſchen abnehmenden Progreſſion iſt der Abſtand von einem Milliontheilchen der Einheit bis zu Null für eben ſo groß zu halten als der von der Einheit bis zur Null. Durch fortgeſetzte Verkleinerung der Veränderungen gelangt man nie zu den unendlich kleinen Veränderungen, deren Verhältniß das Grundverhältniß der endlichen iſt. Vielmehr iſt dieſes das Grundverhältniß, von dem man ausgehen muß, um die Verhältniſſe der endlichen Veränderungen zu beſtimmen, ſo wie man eine krumme Linie aus freyer Hand am richtigſten zeichnet, wenn man in einigen Puncten derſelben die berührenden gezogen hat.

Beide Vorſtellungen, die von dem Verhältniſſe verſchwindender Veränderungen, und die von einem Gränzverhältniſſe, laſſen ſich durch die Annahme einer ſtetigen Folge von Größen zwiſchen zwey gegebenen einer Reihe rechtfertigen. Die Stetigkeit der Folge kann man nicht verwerfen. Allein die gleich Anfangs gegebene Erklärung gebraucht keiner Rechtfertigung. Sie läßt die Stetigkeit einer Folge von Größen beſtehen, und iſt dabey anwendbar, ohne ſie voraus zu ſetzen; zugleich aber zeigt ſie, was das weſentliche in den endlichen Veränderungen zuſammengeordneter Größen iſt. Durch ſie kommt man von den Differentialveränderungen auf die endlichen, dagegen man

nach der gewöhnlichen Vorſtellungsart von dieſen zu jenen gelangt.

Pasquich nennt in ſeiner mathematiſchen Analyſis Verſchwindungsquotient, was hier Differentialquotient genannt iſt. In den mit Sorgfalt und Genauigkeit abgefaßten Elementis Analyſeos et Geometriae ſublimioris, Lipſiae 1799, bezeichnet er den Exponenten des Differentialverhältniſſes für eine Function durch εy, ſo daß εy mit $\frac{\partial y}{\partial x}$ einerley bedeutet.

La Grange hat in ſeiner Théorie des fonctions analytiques, die Vorſtellungen von Differentialen, von unendlich kleinen, oder verſchwindenden Veränderungen, von Gränzverhältniſſen, ganz vermieden, weil er ſie nicht für deutlich genug hält, um in einer Wiſſenſchaft, deren Gewißheit völlig einleuchtend ſeyn ſoll, zur Grundlage angewandt zu werden. Er legt dagegen die oben angeführte Formel für endliche Differenzen zum Grunde. Die Function fx nennt er fonction primitive in Beziehung auf die Functionen p, q, r, etc. welche er dérivées nennt; die Function p oder $f'x$ heißt bey ihm fonction prime, die Function q oder $f''x$ fonction ſeconde, u. ſ. f.

Ich ſtimme dieſem großen Analyſten völlig bey, daß man zur einleuchtenden Überzeugung von dem Verfahren unſerer Infiniteſimalrechnung von jener Entwickelungsformel ausgehen müſſe. Schon lange habe ich bey dem Unterrichte in dieſer Rechnung den von mir in dieſem Artikel aufgeſtellten Begriff von Differentialen gebraucht, weil die Vorſtellung von verſchwindenden Größen eine Dunkelheit, wenigſtens für Anfänger, verurſacht. Es war mir angenehm, mein Verfahren mit dem von einem la Grange gebrauchten vereinigen zu können. Doch behalte ich die einmahl übliche Terminologie und Bezeichnungsart bey, welches in dieſem Werke ganz nothwendig iſt. Hat man jene nur recht verſtanden, ſo werden die Rechnungen mit eben ſo vieler Sicherheit und Kleinheit als Kürze und Leichtigkeit ausgeführt.

Differentiale von höhern Graden.

Es ſey y eine Function von x, und $\frac{\partial y}{\partial x} = p$, ſo iſt p eine neue Function von x, und nur in dem Falle eine unveränderliche Größe, wenn y und x beides Glieder einer arithmetiſchen Progreſſion ſind. Man ſuche für p, ſo wie für y geſchehen iſt, den Differentialquotienten, und es ſey $\frac{\partial p}{\partial x} = q$, ſo iſt q wieder eine Function von x (oder auch eine unveränderliche Größe), nach la Grange fonction ſeconde dérivée. Man bezeichnet ſie auch durch $\frac{\partial \partial y}{\partial x^2}$ oder $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. Es iſt nämlich dieſer Quotient der von den Veränderungen der Größen unabhängige Theil des Quotienten $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$, wo $\Delta^2 y$ das Anfangsglied der zweyten Differenzreihe zu der Reihe der y bedeutet, wenn die zugehörigen x ſich gleichförmig um Δx verändern.

Weiter ſey $\frac{\partial q}{\partial x} = r$, ſo iſt, wenn q keine Conſtante iſt, r eine Function von x, (bey la Grange fonction tierce), die man auch durch $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ bezeichnet. Dieſes iſt der von den Veränderungen der x und q unabhängige Theil des Differenzquotienten $\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}$, wo $\Delta^3 y$ das Anfangsglied der dritten Differenzreihe iſt.

Auf dieſe Art laſſen ſich noch höhere Differentialquotienten finden. In einigen Fällen, z. B. wenn $y = x^m$, und m eine ganze Zahl iſt, kommt man zuletzt auf einen conſtanten Werth des Differentialquotienten.

Wenn y eine ungeſonderte Function von x iſt, ſo iſt p eine Function von x und y zugleich, daher wer-

den es auch die folgenden Differentialquotienten. Z. B. Es ſey $\frac{\partial y}{\partial x} = x^2 y$, ſo iſt $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 2xy + x^2 p = 2xy + x^4 y$. Daraus iſt

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 2y + 2x . p + 4x^5 y + x^4 . p$$
$$= 2y + 6x^3 y + x^6 y.$$

u. ſ. w.

Die Formel für die endliche Differenz Δy erhält nun folgende Geſtalt:

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x} . \Delta x + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} . \frac{\Delta x^2}{2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \frac{\Delta x^4}{6}$$
$$+ \frac{\partial y^4}{\partial x^4} \frac{\Delta x^4}{24} + \text{etc.}$$

Die Anfangsglieder der folgenden Differenzreihen, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, etc, werden durch dieſe ſucceſſiven Differentialquotienten beſtimmt. Der Kürze wegen gebrauchen wir wiederum die Bezeichnungen p, q, r, s, t, u, etc. ſo daß

$$\Delta y = p \Delta x + \tfrac{1}{2} q \Delta x^2 + \tfrac{1}{6} r \Delta x^3 + \tfrac{1}{24} s \Delta x^4$$
$$+ \tfrac{1}{120} t \Delta x^5 + \tfrac{1}{720} u \Delta x^6 + \text{etc.}$$

Aus dieſer Function von x wird $\Delta^2 y$ eben ſo hergeleitet, wie Δy aus der Function fx. Jedes Glied iſt eine Function von x, wovon der erſte Differentialquotient gegeben iſt, ſo daß dadurch alle übrigen auch gegeben werden. Denn von p iſt dieſer Quotient = q, von q iſt er = r, von r iſt er = s, u. ſ. f. Die Differenz Δx wird als unveränderlich betrachtet. Nimmt man nun die gleichartigen Glieder zuſammen, ſo iſt

$$\Delta^2 y = q \Delta x^2 + r \Delta x^3 + \tfrac{7}{12} s \Delta x^4 + \tfrac{1}{4} t \Delta x^5$$
$$+ \tfrac{31}{300} u \Delta x^6 + \text{etc.}$$

Hieraus folgt auf gleiche Art

$$\Delta^3 y = r\Delta x^3 + \tfrac{3}{2} s\Delta x^4 + \tfrac{5}{4} t\Delta x^5 + \tfrac{3}{4} u\Delta x^6 + \text{etc.}$$

u. ſ. f.

Man ſehe eben dieſe Formeln in einer etwas veränderten Geſtalt, auf andere Art hergeleitet, in dem Artikel, Differenzenrechnung (48).

Z. B. nehme man die Function $y = x^m$. Setzt man nun um abzukürzen, $x^m = A$; $(x + \Delta x)^m = B$; $(x + 2\Delta x)^m = C$; $(x + 3\Delta x)^m = D$, etc. ſo iſt $\Delta y = B - A$; $\Delta^2 y = C - 2B + A$; $\Delta^3 y = D - 3C + 3B - A$, u. ſ. f. (arithmet. Reihen höher. Ordn. 2.). Auch iſt $p = mx^{m-1}$; $q = m \,.\, m-1 \,.\, x^{m-2}$; $r = m \,.\, m-1 \,.\, m-2 \,.\, x^{m-3}$; $s = m \,.\,.\, m-3 \,.\, x^{m-4}$ etc. Sucht man die Differenzen ſowohl nach den gegebenen Formeln, als mittelſt der entwickelten Binomialpotenzen, ſo findet man dieſelben Werthe.

Man ſieht aus den hier berechneten Werthen von $\Delta^2 y$ und $\Delta^3 y$, wie die höhern Differentialquotienten der von den Veränderungen der Größen unabhängige Theil der Quotienten der endlichen Veränderungen ſind, daher man ſie auch als Gränzen derſelben anſehen mag. Wichtiger iſt, daß man daraus erkennt, wie die endlichen Differenzen ganz von den Differentialquotienten abhangen, ſo daß man eigentlich nicht von jenen zu dieſen, ſondern von den letztern zu den erſtern gelangt.

Das zweite Differential, als Größe betrachtet, iſt ein unendlich Kleines der zweyten Ordnung, oder gegen das erſte Differential unendlich klein. Dieſes beruht darauf, daß $\Delta^2 y = (q + r\Delta x + \text{etc.})\,\Delta x^2$ iſt. Dagegen $\Delta y = (p + \tfrac{1}{2} q\Delta x + \text{etc.})\,\Delta x$ iſt. Das Verhältniß $\Delta y : \Delta^2 y$ nähert ſich immer mehr dem $p : q\Delta x$, je kleiner Δx genommen wird. Setzt man für jene Differenzen die Differentiale, als unendlich kleine Größen, ſo wird, da $q\Delta x$ alsdann gegen p verſchwindet, das zweyte Differential $\partial^2 y$ gegen das erſte ∂y unendlich klein.

Aus einem gleichen Grunde iſt das dritte Differential $\partial^3 y$ gegen das erſte ein unendlich Kleines der zweyten

Ordnung, und in Abſicht endlicher Größen ein unendlich Kleines der dritten Ordnung. Denn es iſt $\Delta^3 y = (r + \frac{5}{2} s \Delta x + \text{etc.}) \Delta x^3$, alſo $\Delta y : \Delta^3 y = = p + \frac{1}{2} q \Delta x + \text{etc} : (r + \frac{3}{2} s + \text{etc.}) \Delta x^2$.

Man muß dieſe Ausdrücke nur kennen, aber ſie nicht gebrauchen. Differentiale ſind keine Größen. Behandelt man ihre Zeichen wie Größen, ſo ſind jene Vergleichungen freylich richtig. Man kann aber dieſe Vergleichungen der Differentiale verſchiedener Ordnungen ſehr wohl entbehren. Wo $\partial^2 y$ vorkommt, wird es mit ∂x^2 oder $\partial x \partial y$ verglichen, und der Quotient jenes durch dieſes dividirt iſt im Allgemeinen eine endliche Größe. Eben ſo wird $\partial^3 y$ immer mit ∂x^3, oder $\partial y \partial x^2$, oder $\partial y^2 \partial x$, oder ∂y^3 verglichen, u. ſ. f. Bey Näherungsrechnungen iſt es nöthig, daß man einſehe, wie die Differenzen der verſchiedenen Ordnungen abnehmen. Man bemerke aber wohl, daß es bey der Vergleichung derſelben zugleich auf die Differentialquotienten p, q, r, etc. ankommt.

Differentialrechnung iſt derjenige Theil der Analyſis, worin aus der Relation der veränderlichen Größen, die auf irgend eine Art mit einander verbunden ſind, die Relation ihrer Veränderungen oder zuſammengehörigen Differenzen geſucht wird, ſo fern dabey die Quantität der Veränderungen ſelbſt nicht in Betrachtung kommt. Sie macht einen Theil der Analyſis des Unendlichen aus, die man ſo nennt, weil die Differenzen, deren Relation geſucht wird, gleichſam als unendlich kleine Beſtandtheile des Endlichen betrachtet werden. Man ſucht das verſchwindende zu faſſen, indem es verſchwindet. Eigentlich iſt es, wie in dem Artikel, Differentiale, gezeigt iſt, eine Abſonderung des charakteriſtiſchen oder weſentlichen in der Relation der Differenzen von dem willkührlichen, was ihre Quantität zu ihrer Relation beyfügt.

Die Wichtigkeit dieſer höhern Rechnungsart mag man ſchon aus der Erklärung abnehmen. Da ſie für alle Arten von Functionen das charakteriſtiſche in der Relation der Veränderungen der zuſammengehörigen Größen findet,

ſo giebt ſie zugleich das Mittel, von der charakteriſtiſchen Relation der Differenzen auf die Function zu kommen, wenn nur jene Relation unter den mittelſt der Differentialrechnung gefundenen vorhanden iſt, oder ſich durch Verwandlungen auf ſolche bringen läßt. Die ſchwerſten Fragen der Analyſis und analytiſchen Mechanik erfordern zur Auflöſung dieſen Weg. Sie waren in der ältern Mathematik unauflöslich, weil man die Verknüpfung zwiſchen einer Relation veränderlicher Größen und der Relation ihrer Differenzen nicht aufgeſucht hatte. Man konnte auf manche ſolche Fragen nicht einmahl gerathen.

Zweytens iſt oft eine veränderliche Größe durch ein Gränzverhältniß zu einer andern gegeben. Z. B. das Verhältniß der Subtangente zur Ordinate iſt dasjenige, welchem ſich die Differenz der Abſciſſen und die der Ordinaten ohne Ende nähert Nun iſt das Differentialverhältniß zugleich die Gränze des Verhältniſſes der endlichen Differenzen; alſo iſt jenes durch dieſes gegeben, (ſ. berührende Linie). Der Halbmeſſer der Krümmung iſt die Gränze, welche ſich zwey Normalen an einer Curve, bis zu ihrem Durchſchnitte genommen, deſto mehr nähern, je näher ſie bey einander liegen Er wird alſo durch Differentialverhältniſſe beſtimmt. So werden auch Puncte der Cauſtica und der Diacauſtica durch ſolche Verhältniſſe gefunden. Die größten und kleinſten Werthe der Ordinaten einer Curve, nebſt ihren Stellen, die Wendungspuncte, die Rückkehrpuncte, werden durch gewiſſe Beſchaffenheiten der Gränzverhältniſſe leicht angegeben. In der allgemeinen Analyſis leiſtet die Differentialrechnung wichtige Dienſte zur Summirung der Reihen und zur Auflöſung der Gleichungen.

Daher nahm auch gleich mit der Erfindung der Analyſis des Unendlichen die Geometrie einen höhern Flug, weit über die Gränzen, wo Archimedes und Apollonius ſtehen geblieben waren. Die abſtracte Mathematik bekam einen neuen Theil an der höhern Mechanik, worin gleich ſehr ſchwere Fragen aufgelöſet wurden. Die einzelnen Methoden der vorigen Mathematiker wurden allgemei-

ner gemacht und zu einem Syſtem mit einander verbunden, oder ſie wurden durch die neuere bequemere Rechnung unnöthig.

Der Gebrauch eines Differentialverhältniſſes wird zuerſt in der Neperiſchen Theorie der Logarithmen vorkommen. Nepers Definition der Logarithmen iſt folgende: Logarithmus cujusque ſinus eſt numerus quam proxime definiens lineam, quae aequaliter crevit, interea dum ſinus totius linea proportionaliter in ſinum illum decrevit, exiſtente utroque motu ſynchrono atque initio aequiveloce. Das proportionirlich abnehmen heißt nach Verhältniß der noch übrigen Länge abnehmen. Nepers Definition ſagt eben daſſelbe, was die Differentialgleichung zwiſchen der Zahl z und ihrem natürlichen Logarithmen x, welche iſt $\partial x = \frac{\partial z}{z}$, nur daß er die Logarithmen der abnehmenden Sinus zunehmen läßt. Nehmen wir dieſe Logarithmen für poſitiv, ſo haben wir $\partial x = -\frac{\partial z}{z}$, und für $z = 1$ iſt $\partial x = -\partial z$, das iſt, die Veränderungen, ohne Ende vermindert, ſind gleich groß, und geometriſch dargeſtellt, gleich geſchwinde Bewegungen. In einem andern Syſtem ſind ſie nicht gleich geſchwind, weil darin $\partial x = -\frac{c\,\partial z}{z}$, und für $z = 1$ in demſelben $\partial x = -c\,\partial z$ iſt. Neper nimmt nicht endliche Differenzen, da er die Logarithmen mit Null, und die Sinus mit der Einheit anfangen läßt. Wie er ſich, ohne zu integriren, hilft, die Logarithmen bis auf einen gewiſſen Bruchtheil richtig anzugeben, wird in dem Artikel, Logarithmen, erzählt.

Fermat gebrauchte eine Rechnung, worin die Differenz zweyer Größen, und dadurch mittelbar auch die Differenz zweyer zugehörigen Größen, verſchwindend geſetzt wird, zur Beſtimmung des größten oder kleinſten Werthes einer Function, und der berührenden an einer

Curve. Er betrachtet die Methode als eine gemeinſchaftliche für beide Fragen. Zwey auf irgend eine Art aus andern zuſammengeſetzte Größen ſollen ſich näher kommen können, als um jeden angebbaren Unterſchied. Nimmt man das beiden gemeinſchaftliche weg, ſo bleibt diejenige Differenz, welche den Unterſchied jener Größen hervorbringt, in allen Theilen beider als Factor. In dem Gränzverhältniſſe geht der Factor theils durch die Diviſion heraus, theils werden die Termini, worin derſelbe noch bleibt, weggelaſſen, indem die Differenz als verſchwindend betrachtet wird.

Von der erſten Frage iſt folgendes das zweyte Beyſpiel, wobey Fermat ſich deutlicher erklärt, als bey dem erſten Beyſpiele. Eine Linie a ſoll in zwey Theile x und $a - x$ getheilt werden, ſo daß $x^2 (a - x)$ ein Größtes iſt. Fermat ſetzt ſtatt x den Theil $x + e$, ſo kommt ſtatt jenes Products das $(x + e)^2 (a - x - e)$. Dieſes vergleicht er mit jenem, als wenn beide gleich groß wären, ob ſie es gleich nicht ſind, und nennt dieſe Vergleichung eine adaequalitas, wodurch er einen von Diophantus gebrauchten Ausdruck, παρισοτης, erklären zu können glaubt. Von den entwickelten Producten wird das gemeinſchaftliche weggenommen, ſo bleibt auf der einen Seite Nichts, auf der andern ſind die Glieder, welche e enthalten. Nun werden diejenigen, welche das Vorzeichen + haben, mit denen, welche — vor ſich haben, verglichen. Das giebt eine adaequalitas zwiſchen $2ax.e + a.e^2$ und $3x^2.e + 3x.e^2 + e^3$, oder zwiſchen $2ax + ae$ und $3x^2 + 3x.e + e^2$. Hier ſind die Glieder, welche e enthalten, wegzuwerfen, und zwiſchen den übrig bleibenden iſt nun keine bloß erdichtete Vergleichung und adaequalitas, ſondern eine wahre Gleichung vorhanden, oder $2ax = 3x^2$, das iſt $2a = 3x$.

Die berührenden an einer krummen Linie zu finden, verfuhr Fermat auf eine ähnliche Art, wie in dem Artikel, berührende Linie, (47. 48.) ſchon angeführt iſt. In der Sammlung ſeiner Werke (Toloſae 1679. fol.) ſind

Beyſpiele an der Parabel, Ellipſe, Ciſſoide, Conchoide, Cycloide und der Quadratrix gegeben, auch iſt der Schwerpunct eines paraboliſchen Konoids dadurch von ihm beſtimmt. Bey den vier letztern jener Linien kürzt Fermat ſein Verfahren etwas ab. Er ſagt, man ſolle die ſpecifiſche Eigenſchaft der Curve auf die berührende tragen, das iſt, eine Ordinate an derſelben für eine Ordinate an der Curve neben dem Berührungspuncte nehmen, darauf dasjenige weglaſſen, was nach der Lehre vom Größten und Kleinſten weggelaſſen werden muß, ſo werde man den Durchſchnitt der berührenden mit dem Durchmeſſer (der Axe der Abſciſſen) beſtimmen können. Es ſey (Fig. 43. Tab. III) an der krummen Linie AMB die berührende TMR in M; wo ſie mit der Curve die gemeinſchaftliche Ordinate PM hat. Eine andere Ordinate der Curve, QN, ſchneide ſie in R. Nun iſt QR die vierte Proportionallinie zu TP, PM, TQ. Dieſer Werth, nämlich $\frac{PM.TQ}{TP}$, werde in die Gleichung zwiſchen den Coordinaten AP, PM für PM, und zugleich $AP + PQ$ für AP geſetzt. In der Annäherungs-Gleichung hebt ſich erſtlich alles auf, was nicht PQ, die Differenz der beiden Abſciſſen, enthält; und durch die Diviſion mit PQ wird eine von PQ unabhängige Gleichung erhalten, wodurch die Subtangente PT beſtimmt wird. Z. B. Die Curve ſey die Ciſſoide, deren Gleichung iſt $x^3 = y^2(a-x)$; Die Subtangente ſey $= t$, und $PQ = e$, ſo iſt eine Annäherung zur Gleichheit zwiſchen

$$(x+e)^3 \text{ und } \frac{y^2(t+e)^2}{t^2}(a-x-e).$$

In beiden Größen hebt ſich, was e nicht enthält, gegen einander. Läßt man ferner die Glieder weg, welche e^2 und e^3 enthalten, ſo bleibt, nach der Diviſion durch e, die Gleichung, $(3a-2x)t = 2x(a-x)$, zur Beſtimmung von t. Fermat bezeichnet x durch N, $a-x$ durch Z; t durch A, und findet übereinſtimmig mit die-

ſer Gleichung $Z^3A + NA$ gleich Z^2N, wo die Ziffern linker Hand eines Buchſtaben-Zeichens numeriſche Factoren ſind. (Wenn ſie rechter Hand an der Spitze ſtehen, bedeuten ſie auch bey Fermat Exponenten. Zu welchem Buchſtaben ſie gehören, muß der Zuſammenhang der Rechnung ergeben).

Man ſieht, daß dieſes Verfahren eine Differenzenrechnung iſt, die am Ende in die Differentialrechnung übergeht. Für die Differenz der Ordinaten ſteht nur der Unterſchied zwiſchen der Ordinate an dem Berührungspuncte und der benachbarten Ordinate an der berührenden.

Barrow ſuchte das Gränzverhältniß zwiſchen den Differenzen der Coordinaten ſelbſt, und beſtimmte dadurch das Verhältniß der Ordinate zur Subtangente, (ſ. berührende Linie, 51.). Auch kam er bey der Unterſuchung über die Stelle des Bildes eines leuchtenden Punctes durch zurückgeworfene oder gebrochene Strahlen auf die Beſtimmung von Gränzverhältniſſen endlicher Größen (der Abſtände des leuchtenden Punctes und des Vereinigungspunctes der zurückgeworfenen oder gebrochenen Strahlen von der zurückwerfenden oder brechenden Linie), wobey aber doch verſchwindende Größen vorkommen, nämlich die Winkel der Strahlen. S. Brennlinie.

Allein dieſe und andere Verſuche, das unendlich kleine berechnungsfähig zu machen, waren nur eingeſchränkte Methoden für gewiſſe Fälle. Die Quadraturen und Cubirungen waren nur Summirungen gewiſſer Reihen mit unendlich vielen, unendlich wenig verſchiedenen Gliedern. Rectificationen wurden auf Quadraturen gebracht, ſo auch Complanationen, indem man für die Bogen oder Zonen Abſchnitte von Flächen ſetzte, die dieſelben Verhältniſſe wie jene unter ſich hatten. Das war aber nur in einzelnen Fällen ausführbar. Newton und Leibnitz erfanden jeder auf ſeinem eigenen Wege, der erſtere aber früher, allgemeine Methoden, die letzten Verhältniſſe der Veränderungen oder Unterſchiede unbeſtimmter, von einander abhängigen, Größen anzugeben, und von dieſen letzten Verhältniſſen auch zu den Relationen der Größen

ſelbſt zu gelangen, woran man bis dahin noch gar nicht gedacht hatte. Newton verband mit ſeiner Fluxionenrechnung die Theorie der Reihen, insbeſondere die Entwickelung irrationaler mehrtheiliger Größen in eine Reihe, wodurch ſeine Analyſis freylich der Leibnitziſchen überlegen iſt, weil er dadurch im Stande war, unmittelbar aus den Gleichungen für die Fluxionen die Gleichungen für die Fluenten zu erhalten, welches Leibnitz nur durch beſondere Kunſtgriffe und Umwandlungen (Transmutationen) in beſondern Fällen bewirken konnte.

Wir haben von Newton drey Schriften über die Rechnung des Unendlichen. Die erſte führt den Titel: Analyſis per aequationes numero terminorum infinitas, welche zuerſt durch Beſorgung von Jones 1711 zu London erſchienen iſt. Barrow erhielt ſie ſchon im J. 1669 von dem Verfaſſer mitgetheilt. Es iſt diejenige, deren Newton in einem für Leibnitz beſtimmten, an Oldenburg gerichteten Briefe vom 24ſten Octobr. 1676 erwähnt, daß Collins ſie durch Barrow erhalten habe.

Newton beſchäftigt ſich darin faſt ganz mit der Quadratur der krummen Linien, bemerkt aber, daß die Aufgaben von der Rectification, Cubirung, Complanation, und dem Schwerpuncte ſich auf die von der Quadratur bringen laſſen, weswegen er weiter nichts als ein Beyſpiel von der Rectification eines Kreisbogens giebt. Er geht von der Quadratur derer Linien aus, an welchen die Ordinaten einer Potenz der Abſciſſe (mit ganzem oder gebrochnem Exponenten) proportional iſt. Die Abſciſſe an einer Curve ſey $= x$; die Ordinate $= y$; die Area $= z$, und $ax^m = z$. Wird $x = o$ für x geſetzt, und bezeichnet ov das Wachsthum der Area, ſo iſt $a(x + o^m = z + ov$, alſo $max^{m-1} . o + \text{etc.} = ov$, welche Gleichung durch o theilbar iſt. Wird o als verſchwindend betrachtet, ſo wird $v = y$, und es bleibt $max^{m-1} = y$. Umgekehrt, wenn $y = max^{m-1}$ iſt, ſo iſt die Area $z = ax^m$, oder, wie Newton die Formel giebt, wenn $ax^{\frac{m}{n}} = y$, ſo iſt

$\frac{n}{m+n} ax^{\frac{m+n}{n}} = z$: Iſt y eine gebrochne oder irrationale Function von x, ſo wird ſie, wie Newton zeigt, durch Diviſion oder Ausziehung der Wurzel auf eine Reihe von Potenzen der x gebracht. Iſt y eine ungeſonderte Function von x, (Newton nennt es aequatio affecta), ſo wird y nach Newtons Anleitung daraus zu einer Reihe von Potenzen der x entwickelt, mit ſteigenden oder fallenden Exponenten. Bey der Abfaſſung dieſer Schrift ſcheint Newton den binomiſchen Lehrſatz noch nicht gekannt zu haben. Denn die Quadratwurzel aus einem Binomium zieht er ganz auf die Art aus, wie es bey Zahlen gewöhnlich iſt. Auch verwandelt er den Bruch $\frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}$ erſt in dieſen, $\frac{\sqrt{(x-xx)}}{x-xx}$, zieht aus dem Zähler die Wurzel, und dividirt dann dieſe durch den Nenner. Bey der Verwandlung des Bruches $\frac{\sqrt{(1+ax^2)}}{\sqrt{(1-bx^2)}}$ in eine Reihe nimmt er eine ſolche Verwandlung zuerſt mit Zähler und Nenner vor, und dann die Diviſion, oder verfährt auch auf eine ähnliche Art, wie bey jenem Bruche.

Der Ausdruck, Fluxion, kommt in dieſer Schrift noch nicht vor. Den Ausdruck, Moment, nimmt er hier (pag. 19.) in einer andern Bedeutung als in der folgenden Schrift, und verſteht darunter die Größe, welche die augenblickliche Veränderung erzeugt.

Die zweyte Schrift von Newton iſt betitelt: Methodus Fluxionum et ſerierum infinitarum, cum ejusdem applicatione ad Curvarum Geometriam. Sie iſt nicht eher als 1736 von Colſon in einer engliſchen Überſetzung aus dem lateiniſchen Original bekannt gemacht. Aus dieſer hat Caſtillion ſie wieder ins Lateiniſche überſetzt, und ihr die zweyte Stelle in ſeiner Sammlung gegeben. Das Original iſt in der prächtigen Ausgabe von Newtons Werken durch Horsley eingerückt, unter dem Titel: Artis analyticae ſpecimina, vel Geome-

tria analytica. Dieſe Schrift iſt diejenige, von welcher Newton in dem vorher angeführten Briefe ſagt, daß er ſie mit einer Schrift über die Optik habe herausgeben wollen, welches aber unterblieben ſey, weil ihm gegen ſeine optiſche Theorie manche Einwürfe gemacht worden, und er ſeine Ruhe nicht aufopfern wollte. Es trifft bey dieſer Schrift zu, was er von jener ſagt, daß die Reihen nur einen kleinen Theil darin einnehmen, und daß die Aufgaben, welche nicht auf Quadraturen gebracht werden können, darin fehlen, obgleich etwas von den Gründen dieſer Unterſuchung darin beygebracht ſey. Stellen aus dieſer Schrift ſind in dem Briefe angeführt, als die Formeln S. 158, und die Berechnung eines Logarithmen S. 148 in dem Briefe, S. 341 und 344, nach Caſtillions Ausgabe. In einem an den Abbé Conti gerichteten Briefe (S. 410. a. a. O.), die Streitigkeit mit Leibnitz betreffend, erzählt Newton, daß er im J. 1671 eine ausführlichere Schrift aufgeſetzt habe, die in ſeinem Briefe vom 24ſten Oct. 1676 erwähnte, welche mit der Reduction endlicher Größen auf unendliche Reihen, und mit der Auflöſung folgender beiden Aufgaben anfange: 1) aus der Relation der Fluenten die Relation der Fluxionen zu finden; 2) aus einer Gleichung für Fluxionen die Relation der Fluenten herzuleiten. Dieſe finden ſich wörtlich in der Methodo Fluxionum mit ihren Auflöſungen.

Den Anfang dieſer Schrift macht die Verwandlung der Quotienten und Wurzelgrößen in Reihen, und die Reduction der aequationum affectarum auf dieſe Geſtalt, wobey das unter dem Namen des Newtoniſchen Parallelogramms bekannte geometriſche Hülfsmittel vorkommt. Hierauf erklärt Newton die Fluxionenrechnung. Er ſtellt ſich alle Größen als geometriſche vor, die durch Bewegung erzeugt werden, Linien durch die Bewegung eines Punctes, Flächen durch Bewegung einer Linie; Körper durch Bewegung einer Fläche. Aus der Länge des beſchriebenen Raums muß die Geſchwindigkeit für jeden Zeitpunct, und aus der Geſchwindigkeit die Länge des in einer gegebenen Zeit beſchriebenen Raums gefunden werden.

Newton erinnert, daß Zeit hier nicht im eigentlichen oder metaphyſiſchen Verſtande (formaliter, wie er es ausdruckt) zu nehmen ſey, ſondern daß es eine von der eigentlichen Zeit verſchiedene Größe bedeute, die gleichförmig zunimmt, und auf welche die andern Größen, mit welchen ſie gleichartig iſt, gleichſam wie auf eine Zeit bezogen werden. Dieſe Erinnerung iſt von Wichtigkeit, weil dadurch die Einmiſchung eines der Geometrie ſowohl als noch mehr der Analyſis fremden Begriffs abgewendet wird. Die Größen, welche als allmählig und unbeſtimmbar (indefinite) wachſend gedacht werden, nennt Newton **Fluentes**, und bezeichnet ſie mit den letzten Buchſtaben des Alphabets. Die Geſchwindigkeiten, mit welchen die Fluenten durch die ſie erzeugende Bewegung zunehmen, nennt er **Fluxiones**, und bezeichnet ſie durch die Buchſtaben für die Fluenten, mit Puncten darüber. Die unbeſtimmbar kleinen Theile der Fluenten, um welche ſie in unbeſtimmbar kleinen Zeittheilen ſtetiger Weiſe zunehmen, oder die Momente der Fluenten verhalten ſich wie die Geſchwindigkeiten, womit dieſe fließen oder zunehmen. Sind die veränderlichen Größen x und y, ſo ſind ihre Fluxionen $\dot{x}$ und $\dot{y}$, und ihre Momente $\dot{x}o$ und $\dot{y}o$. In der Gleichung zwiſchen x und y werden $x + \dot{x}o$ und $y + \dot{y}o$ für x und y geſetzt, jene Gleichung von der neuen abgezogen, der Reſt durch o dividirt, darauf o unendlich klein geſetzt, ſo wird die Gleichung für die Fluxionen erhalten. Man ſieht hieraus, daß Newtons Fluxionen endliche, den unendlich kleinen Veränderungen der Größen proportionale Glieder eines Verhältniſſes ſind.

Newton ward durch die geometriſche Unterſuchung der Bewegung auf ſeine Analyſis des Unendlichen geleitet. In dem angeführten Briefe an den Abbé Conti erzählt er, daß er unter ſeinen Papieren eines mit dem Datum vom 13. Nov. 1665 gefunden habe, worin die directe Methode der Fluxionen in folgenden Ausdrücken enthalten war: wenn eine Gleichung gegeben iſt, welche die Relation

zweyer oder mehrerer Linien, x, y, z, etc. enthält, die zu gleicher Zeit von zwey oder mehrern Beweglichen, A, B, C, etc. beſchrieben werden, die Relation ihrer Geſchwindigkeiten p, q, r, etc. zu finden. Die Auflöſung iſt gerade die, welche die Fluxionen- oder Differential-Rechnung giebt. Nach jener ſind p, q, r. etc. die Fluxionen, nach dieſer die Differentiale. Newton fügt hinzu, daß die Auflöſung auf die Aufgaben von berührenden und der Krümmung angewandt war; ferner, daß ein anderer Aufſatz, datirt vom 16. May 1666, in ſieben Sätzen eine allgemeine Methode zur Auflöſung der Aufgaben, welche die Bewegung betreffen, enthielt, von welchen der jetzt angeführte der letzte iſt. In einem Aufſatze vom November 1666 fand er dieſe ſieben Sätze wieder, den letzten mit der Erweiterung, daß Brüche, irrationale Größen, und ſogar ſolche, welche man nachher transſcendente genannt hat, keine Schwierigkeit machten. In einem hinzugekommenen Satze war auch die umgekehrte Methode der Fluxionen, ſo wie er ſie damals hatte, vorgetragen. In dieſem Aufſatze waren zuweilen Buchſtaben mit einem Puncte für die erſten Fluxionen, und mit zwey Puncten für die zweyten gebraucht. Aus dieſer kleinen Schrift iſt hernach eine größere Abhandlung erwachſen, die Methodus Fluxionum, deren Titel Newton aber nicht angiebt.

Solchergeſtalt kam Newton auf die Vorſtellung, Veränderungen der Größen durch Bewegung entſtehen zu laſſen, deſto leichter, da Bewegung häufig zur Erzeugung geometriſcher Größen gebraucht wird. Um die unendlich kleinen Größen aus den Gränzgleichungen für die Veränderungen zu verbannen, druckte er dieſe durch das Product aus einer für alle veränderlichen Größen gemeinſchaftlichen Größe *o* in die Geſchwindigkeit oder die Fluxionen aus. Bey ungleichförmigen Geſchwindigkeiten iſt dieſes Product deſto näher die Veränderung, je kleiner dieſe iſt. Darum ſetzt er, nach der Diviſion der Gleichung für die Veränderung durch *o*, dieſes *o* gleich Null. Geſchwindigkeiten bey ungleichförmigen Bewegungen verhalten ſich

wie die gleichzeitigen Wege nur, wenn dieſe ohne End- vermindert ſind, oder das letzte Verhältniß der Wege iſt das Verhältniß der Geſchwindigkeiten.

Eine weitere Ausführung der Lehre von den Quadraturen (d. i. Integrationen) iſt die Schrift, Tractatus de Quadratura Curvarum, welche 1704 mit des Verfaſſers Hauptwerke über die Optik als Anhang herausgekommen iſt. Sie liefert allgemeinere Formeln als die zweyte Schrift giebt, welche ebenfalls dieſe Unterſuchungen enthält. Horsley ſetzt ſie vor der Methodus Fluxionum, ohne ſeinen Grund anzugeben. Um das Literariſche der Newtoniſchen Schriften bekümmert er ſich nicht.

In der Einleitung zu dem Tractat von der Quadratur der krummen Linien, die ſpäter als die Abhandlung ſelbſt geſchrieben iſt, ſagt Newton, er betrachte die Größen nicht als aus höchſt kleinen Theilchen zuſammen geſetzt, ſondern als durch eine ſtetige Bewegung beſchrieben. Da nun Größen nach dem Verhältniſſe der Geſchwindigkeiten, womit ſie gleichzeitig wachſen und erzeugt werden, größer oder kleiner ausfallen, ſo habe er eine Methode geſucht, aus den Geſchwindigkeiten der Bewegungen und Zunahmen, womit die Größen erzeugt werden, die Größen ſelbſt zu beſtimmen, und ſo ſey er in den Jahren 1665 und 1666 allmählig auf die Methode der Fluxionen gekommen.

Er ſetzt hinzu: die Fluxionen verhalten ſich höchſt nahe wie die Zunahmen der Fluenten, die in höchſt kleinen Zeittheilen erzeugt werden, oder, um genau zu reden, ſie ſtehen in dem Anfangsverhältniſſe der werdenden Zunahmen (sunt in prima ratione augmentorum naſcentium), und können durch irgend welche ihnen proportionale Linien dargeſtellt werden. Statt des Anfangs-Verhältniſſes der werdenden Zunahmen könne man auch, fügt Newton hinzu, das letzte Verhältniß der verſchwindenden Theile nehmen. Bey dem Anfangs-Verhältniſſe geht man von der Größe in einem Zuſtande zu der in einem folgenden Zuſtande über; bey dem letzten Verhältniſſe der Veränderungen läßt man

zwey Größen in verſchiedenen Zuſtänden ſich einander immer mehr nähern.

Die Methode der Fluxionen, heißt es ferner, ſey der Geometrie der Alten gemäß, da die Analyſis dadurch bey endlichen Größen bleibe; es ſey nach derſelben nicht nöthig, unendlich kleine Figuren in die Geometrie einzuführen. Inzwiſchen möge man die Analyſis auch an irgend welchen Figuren, endlichen oder unendlich kleinen anwenden, wenn man nur vorſichtig verfahre. Alle dieſe Bemerkungen ſcheinen ſich auf Leibnitzens Vorſtellungsarten in der Differentialrechnung zu beziehen.

In der Schrift von der Quadratur der krummen Linien werden auch die Fluxionen höherer Ordnungen eingeführt. Die Fluxionen der Fluxionen bezeichnet er durch zwey Puncte über dem Symbol der Fluente, wie $\ddot{x}$; die Fluxion dieſer durch $\dddot{x}$; die Fluxion dieſer durch $\ddddot{x}$, u. ſ. f. Da Fluxionen endliche Größen ſind, ſo hat dieſe Fortſchreitung keine Schwierigkeit. Man kann auch x als eine Fluxion ; einer veränderlichen Größe betrachten. Dieſe bezeichnet Newton durch $\overset{\prime}{x}$. Dieſe mag wiederum die Fluxion einer Größe ſeyn, die durch $\overset{\prime\prime}{x}$ bezeichnet werde. Die Glieder einer Reihe kann man nämlich als Unterſchiede der Glieder einer andern Reihe betrachten, und dieſe eben ſo als die Unterſchiede der Glieder einer vorhergehenden Reihe, u. ſ. f. In den Werthen der zweyten und folgenden Fluxionen begieng Newton einen Fehler dadurch, daß er die Glieder einer entwickelten Differenz nach ihrer Folge für die Differenzen der verſchiedenen Ordnungen nahm.

Anſtatt daß *Newton* durch Geometrie und allgemeine Bewegungslehre auf ſeine *Fluxionenrechnung* geführt iſt, ward *Leibnitz* durch die Betrachtung der Unterſchiede und Summen in den Reihen der Zahlgrößen auf ſeine *Differentialrechnung* geleitet. Dieſes erzählt er in einem Schreiben an Wallis, im J. 1697,

womit eine Stelle in dem Commercio epiſt. Leibnitii et Jo. Bernoulli, T. II. p. 161. zu vergleichen iſt. Als er bemerkt hatte, daß die Differenzen eine Beziehung auf die Berührungslinien, und die Summen auf die Quadraturen hätten, ſey ihm ein Licht aufgegangen. Bald habe er eingeſehen, daß die Unterſchiede der Unterſchiede in der Geometrie durch die Krümmungskreiſe dargeſtellt werden. Auch habe er eine merkwürdige Analogie der Relation zwiſchen den Differenzen und Summen mit der Relation zwiſchen Potenzen und Wurzeln wahrgenommen. Dieſes bezieht ſich vermuthlich auf die Zuſammenſetzung der Größen irgend einer Reihe aus den Anfangsgliedern der Differenzreihen, und dieſer aus jenen. (S. arithmet. Reihen höherer Ordn. 2; 7.). Nun, fährt Leibnitz fort, ſey es ihm eingefallen, daß man neben den bisher gewöhnlichen Formen der Größen, y, y^2, y^5, $y^{\frac{1}{2}}$, $y^{\frac{1}{3}}$, etc. neue Formen (affectiones), die er durch $d^{-}y$ $d^{2}y$; oder $d^{-}d^{-}y$; $d^{3}y$ oder $d^{-}d^{-}d^{-}y$, bezeichnet, einführen könne. In einem Schreiben an die Gräfinn von Kielmannsegg, worin Leibnitz ihr Nachricht von ſeiner Streitſache mit Newton ertheilt, erzählt er, daß er ſich frühzeitig mit den Eigenſchaften der Zahlen beſchäftigt, auch einiges neue über die Unterſchiede der Reihen bemerkt habe. (Er gab 1666 in einem Alter von 19 oder 20 Jahren ſeine Schrift über die Combinationen heraus, und zeigte 1673 in der Londoner Societät ſeine Rechenmaſchine vor, die er ſchon in ſeiner Jugend erfunden hatte). Im J. 1673 hätte die Bekanntſchaft mit Huygens Neigung zu geometriſchen Unterſuchungen in ihm erweckt, er habe in kurzer Zeit gute Fortſchritte darin gemacht, und eine Reihe gefunden, die für den Kreis daſſelbe leiſte, was Mercators Reihe für die Hyperbel. Als er hierauf ſeine ehemahligen Bemerkungen über die Differenzen mit ſeinen neuen Forſchungen in der Geometrie verbunden hätte, habe er etwa um 1676 eine neue Art Rechnung, von ihm die Differentialrechnung genannt, erfunden, deren Anwendung auf die Geometrie die vortrefflichſten Dienſte leiſtete.

In dem zweyten Briefe an den Abbé Conti, wegen der gedachten Streitſache, verſichert Leibnitz auch, daß er auf ſeine Differentialrechnung nicht durch die Fluxionen der Linien, ſondern durch die Differenzen der Zahlen gekommen ſey, indem er bemerkt habe, daß die Differenzen bey ſtetig wachſenden Größen in Vergleichung mit den Zahlen verſchwinden, da ſie bey Zahlen endlich bleiben, ſ. Differenzenrechnung. X.

Leibnitz fand, wie die Glieder einer Reihe aus den Anfangsgliedern der Differenzreihen zuſammengeſetzt werden. Darin war ihm ein franzöſiſcher Aſtronom, Mouton, der um dieſe Zeit lebte, zuvorgekommen. Doch erklärt Leibnitz in einem Briefe an Oldenburg vom J. 1673, daß ihm dieſes ganz unbekannt geweſen ſey, ehe es ihm bey ſeiner Anweſenheit zu London geſagt worden. Mouton müſſe das Geſetz, nach welchem die Multiplicatoren zu den Anfangsgliedern der Differenzreihen fortgehen, nicht gewußt haben. (Paſcal hat es doch gewußt). Dieſes legt er dar, und ſetzt hinzu, daß es die ihm wohl bekannten, in der Combinationslehre von ihm angewandten Zahlen ſeyn. Zudem habe Mouton die Differenzen zum Interpoliren geſucht, er aber habe die Glieder einer Reihe in irgend einer Stelle ins Unendliche hin durch die Differenzen finden wollen.

Ferner ſagt Leibnitz in dieſem Briefe an Oldenburg, daß er zufolge der von ihm gemachten Bemerkungen manche Aufgaben über die Reihen auflöſen könne; insbeſondere könne er die Summe einer Reihe von Brüchen angeben, deren Zähler 1, die Nenner die Triangular- Pyramidal- und andere Zahlen dieſer Art ſind. In einem andern Briefe an Oldenburg im J. 1676 giebt er die Summen folgender Reihen an:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} + \text{etc.} = \frac{3}{4}$$
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \text{etc.} = \frac{2}{4}$$
$$\frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{1}{80} + \text{etc.} = \frac{1}{4}$$

Wie er ſie gefunden hat, zeigt er hier nicht an. In einem Aufſatze in den Actis Erud. 1702 findet ſich ſeine Methode. Sie beſteht in einer Zerlegung der Brüche in andere. (In dem Artikel Differenzenrechnung iſt gewieſen, wie jedes Stück ſolcher Reihen und ihre Gränzen gefunden werden. Die erſte wird aus (60.) daſelbſt nach dem in (67.) angegebenen Verfahren gefunden; die zweyte aus (59.); die dritte iſt die in (78.) ſummirte Reihe durch 4 dividirt).

In demſelben Briefe (von 1676) theilt Leibnitz die von ihm durch eine unendliche Reihe gefundene Quadratur des Sectors eines Kreiſes, einer Ellipſe und Hyperbel von dem Mittelpuncte aus genommen, mit. Dieſe beruht auf einer Verwandlung einer Curve in eine andere, ſo daß die Quadratur dieſer letztern die der erſtern giebt. Die Ordinate der zweyten Curve iſt eine rationale Function der Abſciſſe, und läßt ſich, wenn ſie eine gebrochne iſt, zu einer Reihe entwickeln, daher die Curve nach der ſchon von Mercator bey der Hyperbel angewandten Methode ſich quadriren läßt. Leibnitz ſchätzt die allgemeine Methode der Transformationen ſehr hoch. Sie möchte aber doch nur in beſondern Fällen angewandt werden können. Er giebt für die Kegelſchnitte mit einem Mittelpuncte zwey Arten der Transformation an. Die erſte iſt für den Kreis folgende. Die Gleichung für dieſe Linie iſt,
$2rx - xx = yy$. Nun ſetzt er

$x = \frac{2r^3}{r^2 + z^2}$, ſo iſt $y = \frac{2r^2 z}{r^2 + z^2}$. Hierauf wird Leibnitz durch eine geometriſche Conſtruction geleitet. Nun ſey z die Abſciſſe einer Curve, deren Ordinate iſt

$- \frac{8r^5 z^2}{(r^2 + z^2)^3}$, ſo iſt die Area derſelben für die Abſciſſe

z gleich der Area am Kreiſe für die Abſciſſe x. (Es iſt

nämlich $y\partial x = - \frac{8r^5 z^2 \partial z}{(r^2 + z^2)^3}$). Leibnitz verfolgt die Rechnung nicht weiter. Von der zweyten Art der

Transformation giebt er nur eine ſo leichte Andeutung durch ein paar berührende, daß es ſchon einigen Scharfſinn erfordert, ſeine Idee zu errathen. Der Abbé Catelan und Ozanam haben die Art der Umwandlung irgendwo her erhalten, und bekannt gemacht. Montücla hat ſie in ſeiner Geſchichte der Mathematik, Tom. II. p. 378 beſchrieben, wo aber noch ein vorläufiger Satz zu erweiſen iſt. Aus dem Mittelpuncte der Kegelſchnitte ziehe man eine gerade Linie an den Scheitelpunct, und eine an irgend einen Punct der Curve. Durch beide Puncte werden berührende gezogen. Das Stück auf der berührenden durch den Scheitelpunct bis an den Durchſchnitt mit der andern berührenden ſey $= t$, und das Rechteck von der halben Zwerchaxe (halben großen Axe in der Ellipſe) mit dem halben Parameter ſey die Flächen-Einheit, ſo iſt der elliptiſche oder circulare Sector dividirt durch die halbe Zwerchaxe $= t - \frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{5} t^5 - \frac{1}{7} t^7 + \frac{1}{9} t^9 -$ etc. Für den hyperboliſchen Sector werden die ſubtractiven Glieder additiv genommen. Am Kreiſe iſt t die Tangente des halben Bogens des Sectors. Daher iſt, wenn das um einen Kreis beſchriebene Quadrat zur Einheit genommen wird, die Kreisfläche $= \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} +$ etc. Dieſen Ausdruck, ſagt Leibnitz, habe er um 1673 ſeinen Freunden mitgetheilt, und er halte ihn für den möglichſt einfachſten, der dem Verſtande ſehr gefallen müſſe. Doch hat Jakob Gregory in Schottland die von Leibnitz für den Kreis gefundene Reihe früher ſchon gehabt, aber nicht öffentlich, ſondern nur in einem Briefe an Collins im Anfange des Jahrs 1671 mitgetheilt.

Leibnitz ſcheint auf dieſe Quadraturen nicht durch ſeine Differentialrechnung gekommen zu ſeyn, ſondern durch die erklärte Transformation mit Zuziehung der von Mercator angewandten Methode bey rationalen Functionen. In dem gedachten Briefe gebraucht er auch bey dem Increment der Area nicht das Symbol der Differentiation, ſondern den Buchſtab β, den er eine unendlich kleine Größe

bezeichnen läßt. Erſt in einem Briefe vom 21. Jun. 1677 an Oldenburg für Newton theilte Leibnitz eine Probe ſeiner neuen Rechnung mit, und macht eine Anwendung auf die Methode der berührenden, auch in dem Falle, da die Gleichung irrationale Größen enthält. Man kann nicht umhin zu bemerken, daß er in dem vorhergehenden Jahre zwey Briefe von Newton erhalten hatte, worin dieſer ihm von ſeinen analytiſchen Entdeckungen ausführlich Nachricht ertheilt, doch aber ohne ihm nur einen Wink von der Methode zu geben.

Als im J. 1682 die Acta Eruditorum ihren Anfang nahmen, war Leibnitzens erſter Beytrag dazu ein Aufſatz über die Quadratur des Kreiſes nach der vorher angeführten Formel durch die Tangente von 45 Grad. Es wird hier aber noch nichts von einer neuen Art Rechnung erwähnt. Dieſes geſchah zuerſt in den Act Erud.. Oct. 1684 in der Abhandlung: Nova methodus pro Maximis et Minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et ſingulare pro illis calculi genus. Hierin trägt er ſie in der Form vor, die ſeitdem auf dem feſten Lande üblich iſt. Er zeigt, wie die Differentiale eines Products, eines Quotienten und einer Potenz von irgend einer Beſchaffenheit ausgedruckt werden; erklärt auch, wie die Vorzeichen $\pm$ hierbey zu verſtehen ſind; daß $\partial v = 0$ einen größten oder kleinſten Werth der Ordinate anzeigt; daß ein mit ∂v gleichnamiges $\partial\partial v$ eine Concavität der Curve gegen die Axe, ein ungleichnamiges eine Convexität anzeige, (dieſes iſt umgekehrt zu nehmen, wie Leibnitz es ſelbſt gelegentlich verbeſſert hat), und daß bey dem Übergange der Incremente vom Abnehmen zum Zunehmen, oder von dieſem zu jenem, ein Wendungspunct vorhanden iſt, wofern die Ordinaten hier nicht einen Übergang vom Wachſen zum Abnehmen, oder umgekehrt machen, das iſt, wenn $\partial\partial v = 0$ iſt, und weder v noch dv Null ſind. (Dieſes kann doch bey einem Wendungspuncte Statt finden, nämlich, wenn die Abſciſſenlinie durch den Wendungspunct geht, und hier zu-

gleich berührende iſt). Leibnitz zeigt die Differentiation einer Gleichung zwiſchen zwey veränderlichen Größen an einem verwickelten Falle, und giebt für die Erfindung des Kleinſten ein Beyſpiel aus der Optik, das Geſetz der Brechung nach einer gewiſſen teleologiſchen Annahme zu finden.

Im J. 1686 erſchien in den A. E. von Leibnitz ein Aufſatz: de Geometria recondita et Analyſi indiviſibilium atque infinitorum. Hier gebraucht er das Zeichen $\int$ um eine aequatio ſummatrix auszudrücken, wie $\frac{1}{2}x^2 = \int x \partial x$; $a = \int \frac{\partial x}{\sqrt{(2x - x^2)}}$, wo x der Sinusverſus des Kreisbogens a iſt; desgleichen $y = \sqrt{(2x - xx)} + \int \frac{\partial x}{\sqrt{(2x - xx)}}$, wo x und y Coordinaten an der Cykloide ſind. Solchergeſtalt könne man, bemerkt er, Gleichungen für Linien angeben, die man ſonſt der Berechnung nicht fähig gehalten hatte.

In dieſem Aufſatze erzählt Leibnitz, wie ein Beweis des Satzes von der Größe der Oberfläche einer Kugel ihn auf das charakteriſtiſche Dreyeck an den Curven geleitet, und wie er allmählig die wahre Ergänzung der Algebra für transſcendente Größen gefunden habe, ſeinen Calculum indefinite parvorum, den er auch Differential- oder ſummatoriſche, oder tetragoniſtiſche Rechnung nenne.

In demſelben Aufſatze erwähnt Leibnitz noch ſeiner Methode undeterminirter Coefficienten. Newton hat ſie auch gekannt. Er zeigt ſie am Ende des zweyten Briefes an Oldenburg an, aber mit verſetzten Buchſtaben, die hernach Wallis in dem zweyten Theile ſeiner Werke, p. 393, verſtändlich gemacht hat. Newton bedient ſich aber ihrer in ſeinen analytiſchen Werken nicht. Leibnitz giebt einige ſehr gute und brauchbare Beyſpiele in dem

Supplementum Geometriae practicae ſeſe ad problemata transſcendentia extendens, A E. 1693.

Bey dieſer Gelegenheit mag auch bemerkt werden, daß Leibnitz die Methode erfunden hat, Differentialformeln zu integriren, worin der Factor des Differentials ein rationaler Bruch iſt, nämlich durch Zerlegung in Brüche mit einfachen Nennern, wie $x + a$, wofern die Algebra dieſes leiſten mag, wodurch die Integration auf die Quadratur der Hyperbel (oder wie man jetzt auf dem feſten Lande ſagt, auf Logarithmen) gebracht wird. Er wendet dieſe Methode auch auf die Summirung von Brüchen mit endlichen Differenzen an, z. B. auf Brüche von der Form $\frac{1}{xx - 1}$, wodurch er die Summe der Reihe $\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \text{etc.} = \frac{3}{4}$ findet. Der Aufſatz iſt überſchrieben: Specimen novum Analyſeos pro ſcientia Infiniti, circa ſummas et Quadraturas. A. E. 1702.

Leibnitz machte von ſeiner Analyſis des Unendlichen viele ſchöne Anwendungen auf ſchwere geometriſche und mechaniſche Aufgaben, beſonders ſolche, welche die Geometer ſeiner Zeit beſchäftigten. Seine mathematiſchen Aufſätze ſind in periodiſchen Schriften zerſtreut; die meiſten ſind in den Actis Eruditorum befindlich. In dem dritten Bande ſeiner von Dütens geſammelten Schriften findet man ſie bey einander, auch ſeinen mathematiſchen Briefwechſel, den mit Joh. Bernoulli geführten ausgenommen, der in zwey Quartbänden 1745 geſammelt iſt. Leibnitz war ein allgemeiner Kopf, Rechtsgelehrter, Geſchichtskundiger, Philoſoph, Theolog, Sprachforſcher, Mathematiker, Phyſiker und mehreres; ein ausgebreiteter Briefwechſel, öffentliche Geſchäfte und Umgang mit der großen Welt nahmen einen beträchtlichen Theil ſeiner Zeit hin. Daher haben ſeine mathematiſchen Aufſätze nur die erſte noch rohe Form der Entſtehung; aber man ſieht zu-

gleich an ihnen, daß er ſeine Ideen aus ſich ſelbſt nahm, und muß die Fruchtbarkeit und Geſchmeidigkeit ſeines Geiſtes bewundern. Newtons analytiſche Schriften (von ſeinen Principien der mathematiſchen Naturwiſſenſchaft, dem Hauptwerke aller Zeiten, iſt hier nicht die Rede) ſind ſyſtematiſch, ſehr klar, in den Gründen einleuchtend, allgemein in den Methoden, vielbefaſſend, und in der äußern Form vollendet. Newton lebte in der Stille ſeines Cabinets, bloß der Mathematik und ihrer Anwendung auf die Naturforſchung, wobey ein paar fremdartige Beſchäftigungen nicht in Anſchlag kommen. Der blühende Zuſtand der Mathematik in England gewährte ihm ſchon in ſeiner Jugend Vortheile, die Leibnitz damals in Deutſchland nicht hatte.

Die von Leibnitz bekannt gemachte Differentialrechnung, und die umgekehrte, welche Leibnitz die ſummatoriſche nannte, (wofür Joh. Bernoulli die Benennung, Integralrechnung, einführte), erhielten bald großen Beyfall. Insbeſondere waren es die beiden Bernoulli, und der Marquis de L'Hopital, welche dieſe neue Rechnung auf mancherley Arten anwandten, und zugleich erweiterten. Die Form, welche Leibnitz ihr gegeben hatte, ward auf dem feſten Lande allgemein angenommen. Die analytiſchen Schriften von Newton wurden ſpäter bekannt, da die von der Quadratur der krummen Linien erſt 1704 erſchien. In den Principien war die Analyſis, wodurch Newton ſeine Sätze gefunden hatte, nicht ſichtbar, weil er die Beweiſe nach ſynthetiſcher Methode abgefaßt, und alles zwar auf die letzten oder auf die erſten Verhältniſſe hinausgeführt, aber die Fluxionenrechnung dabey nicht angewandt hatte. Nur in dem Lemma zum 7. Satze des zweyten Buchs kommt ein Satz aus dieſer vor: Momentum genitae aequatur momentis laterum ſingulorum generantium in eorundem laterum indices dignitatum et coefficientia continue ductis. Im 10. Satze werden die kleinen, zuletzt verſchwindenden Unterſchiede durch *o* bezeichnet. Ungeachtet Newton ſeine Fluxionenrechnung viel früher erfunden hatte, als Leibnitz

ſeine Differentialrechnung, ſo ward dieſer doch faſt durchgehends als Erfinder der neuen Rechnung des Unendlichen angeſehen, ſogar daß ſie nach ihm die Leibnitziſche Rechnung genannt wurde. England ſelbſt lernte ſie früher in der Form, welche Leibnitz ihr gegeben hatte, kennen, als in der Newtoniſchen. Craig, ein Schottländer, gebrauchte in ſeiner Schtift: Methodus figurarum lineis rectis et curvis comprehenſarum quadraturas determinandi, Lond. 1685, bey der Auflöſung einer Aufgabe die Leibnitziſche Differentialrechnung. In einer ſpätern Schrift: de Figurarum curvilinearum quadraturis et locis geometricis, Londini 1693, rühmt er Leibnitzens Differentialrechnung als eine herrliche Erweiterung der höhern Geometrie, und geſteht, daß ohne dieſelbe ſeine Unterſuchungen ihm ſehr ſchwer geworden ſeyn würden. Er gebraucht auch die Leibnitziſche Bezeichnungsart. Bis dahin war alſo Newtons Fluxionen-Methode in England ſelbſt nicht bekannt. Es war auch erſt im J. 1693, daß Wallis in dem zweyten Theile ſeiner Werke, worin die Algebra enthalten iſt, einiges davon öffentlich mittheilte.

Dies veranlaßte Wallis, daß er Newton ermahnte, die beiden Briefe an Oldenburg, welche Leibnitz mitgetheilt erhalten hatte, bekannt zu machen, weil ſeine Methode der Fluxionen unter dem Namen der Leibnitziſchen Differentialrechnung mit großem Beyfall aufgenommen würde. Er bemerkte deshalb in der Vorrede zu dem erſten Theile ſeiner Werke, der 1695, ſpäter als der zweyte, erſchien, ausdrücklich, daß die von Leibnitz ſogenannte Differentialrechnung mit der Newtoniſchen Fluxionenrechnung, wovon er in der Algebra, in dem zweyten Theile ſeiner Werke, einen Abriß gegeben habe, überein komme. Leibnitz habe die Methode im J. 1676 in zwey Briefen von Newton mitgetheilt erhalten. Die beiden Briefe ließ Wallis in dem dritten Bande ſeiner Werke, 1699, abdrucken. Der Abriß, den er von der Fluxionen-Rechnung aus jenen Briefen in der Algebra giebt, möchte doch für ſich unverſtändlich ſeyn.

Allein einige Jahre nachher behauptete Nicol. Fatio de Duillier aus Genf, der in England lebte, nicht allein, daß Newton lange Zeit vor Leibnitz die Rechnung des Unendlichen erfunden hätte, ſondern fügte noch hinzu, daß er es denen, die Newtons Briefe und handſchriftliche Abhandlungen geſehen hätten, überlaſſen wolle zu beurtheilen, was Leibnitz als zweyter Erfinder der Rechnung von Newton erborgt haben möchte. Dieſes geſchah in einer Schrift über die Linie des ſchnellſten Falles und das Solidum des geringſten Widerſtandes, London 1699. Leibnitz antwortete auf dieſe für ihn ſehr nachtheilige Äußerung ziemlich lebhaft, und gab zu verſtehen, Duillier möchte es übel genommen haben, daß er ihn nicht unter denjenigen genannt hätte, von welchen die Aufgabe über die Linie des ſchnellſten Falles aufgelöſet war, oder wahrſcheinlich hätte aufgelöſet werden können, wenn ſie ſich darum bemüht hätten. Er bezeugt die größte Hochachtung für Newton, und beruft ſich darauf, daß dieſer ſelbſt in den Principien der Naturwiſſenſchaft (Schol. Lemmatis 2. prop. 7. L. II.) im J. 1687 anführe, von ihm vor zehn Jahren eine Methode mitgetheilt erhalten zu haben, die von der ſeinigen kaum anders als in den Ausdrücken und Bezeichnungen, und noch in der Vorſtellungsart von der Entſtehung der Größen verſchieden ſey. Er habe im J. 1684, als er ſeine Rechnung bekannt machte, von Newtons Erfindung nichts weiter gewußt, als was dieſer ihm von dem Gegenſtande derſelben angezeigt hätte.

Vermuthlich wäre durch dieſen Angriff auf Leibnitzens Ehre, der von Privatabſichten herzurühren ſcheinen mußte, das gute Vernehmen zwiſchen Newton und Leibnitz nicht geſtört worden, wenn nicht in Deutſchland ſelbſt bald darauf die Veranlaſſung zu einem heftigen gelehrten Prozeſſe, der faſt national ward, gegeben worden wäre. Als Newtons Tractat von der Quadratur der krummen Linien mit ſeinem Werk über die Optik 1704 erſchienen war, druckte ſich der Recenſent dieſer Schriften in den Act. Erud. 1705 über Newtons Erfindungsrecht an die

Infiniteſimalrechnung etwas zweydeutig aus. Anſtatt der Leibnitziſchen Differentiale, ſagte er, werden von Newton Fluxionen gebraucht, und ſind immer gebraucht worden, wovon er ſowohl in ſeinen Principien als in andern Schriften eine ſchöne Anwendung macht, ſo wie auch Honoratus Fabri in ſeiner Synopſis geometrica die Cavaleriſche Methode mit der fortſchreitenden Bewegung vertauſcht hat (ſubſtituit). Die Verehrer Newtons legten dieſe Stelle dahin aus, daß ſo wie Fabri ſeine Methode von Cavaleri entlehnt habe, ſo hätte auch Newton ſeine Fluxionen-Rechnung von Leibnitz genommen. Leibnitz erklärte zwar, daß dieſes nicht der Sinn ſey. Allein Keill, Profeſſor der Aſtronomie zu Oxford, behauptete nun ſogar in den Philoſophical Tranſactions, 1708, Newton ſey nicht bloß der Erfinder der Fluxionen-Methode, ſondern Leibnitz habe nach dieſer die ſeinige gebildet, mit Veränderung der Ausdrücke und der Bezeichnung.

Leibnitz beſchwerte ſich wegen dieſer Beſchuldigung bey der Societät zu London. Keill ſuchte ſeine Behauptung ausführlich zu rechtfertigen. Als Leibnitz ſeine Beſchwerde bey der Societät wiederholte, ſetzte dieſe einen Ausſchuß nieder, um die in ihrem Archiv befindlichen Briefe und Schriften, welche über die Streitfrage Licht geben könnten, durchzuſehen, und der Societät davon Bericht zu erſtatten. Der Bericht der Commiſſarien fiel dahin aus, daß die Differential- und Fluxionen-Methode weſentlich nicht verſchieden ſeyn, und daß die eigentliche Frage hier ſey, nicht, wer dieſe oder jene Methode erfunden habe, ſondern wer der erſte Erfinder der Methode ſey. Sie glaubten, daß diejenigen, welche Leibnitz für den erſten Erfinder hielten, wenig oder nichts von ſeinem frühen Briefwechſel mit Collins und Oldenburg erfahren haben, und nicht wiſſen möchten, daß Newton die Methode ſchon ſeit länger als funfzehn Jahre erfunden gehabt hätte, wie Leibnitz ſie in den Actis Eruditorum bekannt zu machen anfieng. Daher habe Keill durch ſeine Behauptung, daß Newton der erſte Erfinder ſey, gar nichts beleidigendes gegen Leibnitz geſagt. Ob Leibnitz auf ſeine

Methode durch ſich ſelbſt gekommen ſey, laſſen ſie ganz unberührt; inzwiſchen geben ſie doch in den drey erſten Artikeln des Berichts zu verſtehen, daß er bey ſeiner zweymahligen Anweſenheit in England, und durch den Briefwechſel, den er mit Newton und Collins mittelbar durch Oldenburg unterhalten, hinlängliche Winke von Newtons Methode bekommen haben möchte. Die Societät ließ alle auf die Streitfrage ſich beziehenden Briefe, zum Theil Stellenweiſe, mit der Newtoniſchen Schrift: Analyſis per aequationes numero terminorum infinitas, die Collins im J. 1669 durch Barrow mitgetheilt erhalten hatte, nebſt dem Berichte der Commiſſion abdrucken, und an die vorzüglichſten Mathematiker in Europa verſenden. Der Titel iſt: Commercium epiſtolicum D. Joh. Collins et aliorum de Analyſi promota, juſſu Societatis regiae in lucem editum. Londini 1712. 4. Dieſe Ausgabe iſt gar nicht in den Buchhandel gekommen; auch ſind nur wenige Abdrücke gemacht, daher ſie ſehr ſelten iſt. Es iſt 1725 eine zweyte Ausgabe erſchienen, welche eine ſehr ausführliche, gegen Leibnitz bittere Recenſion der Sammlung aus den Transactionen im J. 1715 enthält. Der Titel dieſer Ausgabe iſt: Commercium epiſtolicum de varia re mathematica inter celeberrimos praeſentis ſaeculi Mathematicos, ... Londini, 1725. 8. Dieſe iſt in dem vierten Bande der Horsleyiſchen Ausgabe von Newtons Werken eingerückt. In derſelben ſind viele gegen Leibnitz gerichtete Anmerkungen enthalten. Herr Profeſſor Pfleiderer hat die Güte gehabt, auf meine Bitte die Original-Ausgabe mit dem Abdrucke in der Horsleyiſchen Ausgabe zu vergleichen. Es ſind hier einige kleine Zuſätze mit wenigen Worten gemacht, die aber unbedeutend ſind, außer einem einzigen, worin geſagt wird, daß Leibnitz irrationale Exponenten der veränderlichen Größen, die Newton in einem Beyſpiele gebraucht, in Fluenten umgewandelt, und daraus die Exponentialrechnung gebildet habe, eine ſehr ungegründete und unbillige Vermuthung. In der Recenſion wird gerade zu behauptet, Leibnitz habe ſeine Differen-

tialrechnung ganz von Newtons Fluxionen-Methode hergenommen.

Ein Gutachten über das Commercium epiſtolicum, worin die Vermuthung geäußert wird, daß Newton ſeine Fluxionenrechnung gar wohl nach der Differentialrechnung gebildet haben möchte, und ein Fehler, den Newton wirklich in Abſicht auf die Werthe der höhern Differentiale begangen hatte, mit zum Grunde dienen ſoll, ward ohne Benennung des Verfaſſers und Ortes gedruckt, auch ohne des Verfaſſers, Joh. Bernouilli's, Wiſſen, der Leibnitzen ausdrücklich erſucht hatte, ihn nicht in den Handel zu ziehen. (Das Original iſt in dem Commercio philoſ. et mathem. Leibnitzii et Jo. Bernoulli, T. II. p. 305 befindlich). Keill antwortete darauf, wie leicht zu erachten iſt, heftig. Chamberlayne in England ſuchte Newton und Leibnitz auszuſöhnen, allein ohne Erfolg. Leibnitz ſcheint vielmehr das Mißverſtändniß aufs neue rege und größer gemacht zu haben, durch einen Brief an den Abbé Conti, der ſich damahls in England aufhielt, und der gemeinſchaftliche Freund ſeyn wollte. Er beſchwerte ſich darin, daß man durch gezwungene Auslegungen ſeine Wahrheitsliebe zweifelhaft zu machen ſuchte, und die Streitfrage veränderte, indem man die Reihen herbeyzöge, worin er Newton den Vorgang nicht ſtreitig mache; ja er gab zu verſtehen, daß Newton die Charakteriſtik und den Algorithmus für unendlich kleine Größen vor ihm nicht möchte gehabt haben, wie Bernouilli ganz richtig geurtheilt hätte. Hier entdeckte er den Verfaſſer des vorher angeführten Gutachtens. Zugleich breitete er ſich umſtändlich über Newtons phyſikaliſche Grundſätze aus, die er für befremdend und unhaltbar erklärte. Der Brief ward Newton mitgetheilt, da Leibnitz es Conti erlaubt hatte. Newton antwortete hierauf in einem an Conti gerichteten Schreiben, welches Leibnitz erwiederte, worauf Newton die Vertheidigung wieder ausführlich beantwortete. Tantaene animis coeleſtibus irae! mag man zwar bey dieſem Briefwechſel ſagen; doch ward der Streit auf eine ſehr gemäßigte Art geführt in Verglei-

chung mit den ſchriftſtelleriſchen Balgereyen zu unſern Zeiten. Leibnitzens Tod, der am 14. Novemb. 1716 erfolgte, machte dem Streit ein Ende. Die Acten dieſes gelehrten Prozeſſes findet man in dem vorher angeführten Commercium epiſtolicum, in dem dritten Theile von Leibnitzens Werken, in dem Recueil de diverſes pieces ſur la philoſophie, etc. par Des Maizeaux, T. II. und in dem Journal litéraire, das damahls im Haag heraus kam. Eine ausführliche Relation daraus iſt in Leibnitzens Lebensbeſchreibung von Jaucourt anzutreffen, und dem gedachten Theile von ſeinen Werken beygefügt. Die Lebensbeſchreibung ſelbſt iſt der von Neufville beſorgten Ausgabe der Theodicee, Amſterdam 1734, ohne Benennung ihres Verfaſſers vorgeſetzt. Wer der Verfaſſer der Recenſion in den Actis Erud. die zu dem Streite den nächſten Anlaß gegeben, geweſen ſey, iſt nicht bekannt geworden. Leibnitz läßt in den Briefen, wo er den wahren Sinn der zweydeutigen Stelle erklärt, ſich gar nicht darüber aus, ob er ſelbſt oder ein anderer Verfaſſer ſey. In dem Exemplar der Actorum, das auf der Göttingiſchen Bibliothek befindlich iſt, und die Namen der Recenſenten beygeſchrieben enthält, wird G. G. Leibnitzius als Verfaſſer angegeben, nach Käſtners Bericht in der Anal. des Unendl. 3te Ausg. S. 44.

Gegenwärtig möchte faſt allgemein über dieſe durch den Gegenſtand und durch die Hauptperſonen merkwürdige Streitfrage das Urtheil dahin ausfallen, daß Newton ohne allen Zweifel ſeine Fluxionen- und Fluentenrechnung lange vorher, als Leibnitz ſeine Differentialrechnung bekannt machte, erfunden habe; daß aber auch Leibnitz von dem Verdachte, die Fluxionenrechnung ſich zugeeignet, und nur in der Form verändert zu haben, gänzlich frey zu ſprechen ſey. So urtheilen Montucla in der erſten und zweyten Ausgabe der Geſchichte der Mathematik; d'Alembert in der Encyclopédie méthodique; la Croix und Boſſut in den Vorreden zu ihren Traités de calcul différentiel et intégral. Boſſut iſt in der Vertheidigung der Anſprüche von Leibnitz umſtändlich.

Auch Engländer treten dieſem Urtheile bey, als Waring in ſeinen meditationibus analyticis, Cantabr. 1785, (ſ. Käſtners Anal. des Unendl. S. 49. und Götting. gel. Anz. 1786. S. 700.). Hutton in ſeinem mathem. u. phyſik. Wörterbuche äußert zwar, man habe vielen Grund zu vermuthen, daß Leibnitz einige ihm mitgetheilte Papiere und Aufſätze benutzt haben möge, erinnert aber hernach, daß auch nach einiger Urtheil ſtarke Gründe vorhanden ſeyn, zu glauben, daß Leibnitz ſeine Methode ſelbſt erfunden habe. Denn in ſeiner Theoria motus abſtracti vom J. 1671, ehe er etwas von Newtons Sachen geſehen haben konnte, nehme er ſchon unendlich kleine Größen an, die unter ſich ungleich ſeyn, welches einer der vornehmſten Grundſätze ſeiner Methode ſey.

Leibnitz iſt vielleicht durch den zweyten Brief von Newton, den vom 24. Octob. 1676, worin viele wichtige Mittheilungen, aber ohne Beweis und Nachricht von ihren Gründen, gemacht waren, gereizt worden, der Sache anhaltend nachzudenken, und ſeine Ungeduld, deren er ſich irgendwo ſelbſt anklagt, zu bezwingen. Den Zeitpunct von 1676 giebt er ſelbſt, in dem oben angeführten Briefe an die Gräfinn von Kielmannsegg, an, ſo viel er ſich damahls noch erinnern konnte. Was er übrigens daſelbſt von der Art, wie er zu ſeiner Differentialrechnung gekommen, erzählt, ſtimmt ſehr wohl zu dieſer Vorſtellung. Darum hat er aber nicht ſeine Rechnungsmethode nach der Newtoniſchen gebildet, da er von dieſer nichts erfahren hatte, und vielmehr, wie aus ſeinem Briefe vom 27. Auguſt 1676 erhellt, ſchon die Differenzenrechnung zu Quadrirungen, bey rationalen Ordinaten, nach Mercators Verfahren bey der Hyperbel, gebrauchte. Man braucht daſelbſt in dem Werthe des Rectangels nur dx für β zu ſetzen, ſo hat man das Differential einer Area. Eben daſelbſt kommt die Integration der Formel $\partial a \,.\, \mathrm{coſ}\, a$ als Summirung vor, nachdem für coſ a eine Reihe geſetzt iſt, nur daß hier noch nichts von Differentialen und deren Bezeichnung ſich findet.

Das Zeugniß, welches Newton in dem Scholium des Lemma II. Princip. L. II. Leibnitzen giebt, iſt von Wichtigkeit, wenn gleich Newton in der Folge, als er mit Leibnitz zerfallen war, es nur als ein Verwahrungsmittel für ſein Eigenthum angeſehen haben will. Denn es zeigt, daß er Leibnitzen nichts mitgetheilt hatte, was auf ſeine Methode hätte leiten können, und daß er auch vorausſetzte, es ſey demſelben von andern nichts eröffnet worden. Es iſt ein Zug von Newtons feiner und edler Denkungsart, daß er einem andern, ja einem Ausländer, das Mitrecht an eine Erfindung öffentlich verſichern will. Die erſte Ausgabe der Principien iſt vom J. 1687. In der zweyten vom J. 1713 zu Cambridge, wovon die zu Amſterdam 1714 ein Nachdruck iſt, iſt jenes Zeugniß noch ſtehen geblieben; aber in der von 1726 iſt es durch den Herausgeber, Pemberton, weggelaſſen, gleichſam, als wenn Newtons Freunde ein für ihn nachtheiliges Actenſtück hätten vernichten wollen.

Die beiden Briefe Newtons vom J. 1676 an Oldenburg für Leibnitz enthalten nur Reſultate ſeiner Methode, nichts von ihr ſelbſt. Ein kurzer Brief von Newton an Collins, der Leibnitzen im J. 1676 mitgetheilt iſt, enthält nur die Formel für die Subtangente an einer Curve, bloß in einem leichten Falle, woraus ſich noch nichts von dem Verfahren ſelbſt ergab. Die Form ſeiner Infiniteſimal-Rechnung mußte er offenbar ſelbſt erfinden; die Methode aber auch, welches ihm freylich dadurch erleichtert ward, daß er manche Sätze, die dadurch ſchon in England gefunden waren, mitgetheilt bekommen hatte.

Man hat geſagt, Leibnitz möchte wohl, als er in London war, die erſte Schrift von Newton, Analyſis per aequationes, etc. bey Collins geſehen haben. Eine Vermuthung iſt kein Beweis. In dieſer Schrift wird noch keine Vergleichung der verſchwindenden Differenzen gemacht, daher auch noch nichts von Fluxionen darin erwähnt wird. Die darin am Ende vorgetragene Methode, krummlinichte Figuren zu quadriren, iſt der von Fermat für berührende an einer Curve gebrauchten ganz ähnlich,

wie die oben gegebene Nachricht von dieſer Schrift es zeigt. Eine Abſchrift von derſelben hat Leibnitz nicht erhalten. Denn in einem Briefe vom 27. Aug. 1676 fragt er an, wie Newtons Reverſions-Methode beſchaffen ſey, als in dem Falle, wenn die Zahl aus dem Logarithmen gefunden werden ſoll. Dieſes iſt in der Abhandlung deutlich gewieſen, da von der Reihe für die Zahl die erſten fünf Glieder darin berechnet ſind.

Man kann dagegen fragen, wo die Aufſätze, welche Leibnitz bey ſeiner zweyten kurzen Anweſenheit in London Collins für Newton zugeſtellt hat, geblieben ſeyn. Jener erwähnt ſie in einem Briefe an Newton. Vielleicht hätten dieſe noch einige Aufſchlüſſe gegeben.

So wie man ohne Bedenken Newtons Nachrichten von ſeinen Erfindungen Glauben beymißt, ſo muß billig daſſelbe auch für Leibnitz geſchehen. Ein Mann von dem großen, viel umfaſſenden, wirkſamen Geiſte, wie Leibnitz, brauchte nicht fremde Erfindungen ſich zuzueignen, und ſeine Denkungsart war zu edel, oder wenigſtens zu ſtolz, um ſich dazu herabzulaſſen Die Leichtigkeit, womit Leibnitz verſchiedene ſchwere Aufgaben aus der Geometrie und Mechanik durch die Analyſis des Unendlichen auflöſete, zeigt, daß er nicht eine erborgte Methode befolgte, von welcher damahls noch wenig, oder eigentlich gar nichts bekannt gemacht worden war.

Ungeachtet mancherley fremdartiger Beſchäftigungen ſuchte Leibnitz ſeine neue Analyſis weiter zu treiben, und ihre Wichtigkeit durch Anwendungen auf ſchwere Aufgaben zu zeigen. Hiezu vereinten ſich bald mit ihm zwey vortreffliche Männer, die beiden Brüder, Jakob und Johannes Bernoulli. Jener war zuerſt der Lehrer ſeines Bruders, der bald mit ihm zu wetteifern im Stande war, und bey einem etwas eigenſüchtigen Charakter ſich ſogar auf eine beleidigende Art über ihn zu erheben ſuchte. Der ältere Bernoulli beſaß mehr Erfindungskraft, die er durch manche ihm eigenthümliche Unterſuchungen bewieſen hat; dagegen der jüngere größere Gewandtheit in der Be-

handlung ſchwerer Fragen hatte. Dieſer hat mehr geliefert als jener, iſt aber auch 30 Jahre älter geworden als ſein Bruder, der in einem Alter von 50 Jahren ſtarb. (Boſſüt in der Vorrede zu ſeiner Differential- und Integral-Rechnung).

Dieſen beiden großen Analyſten iſt man eine meiſterhafte, von Leibnitzen ſelbſt anerkannte und öffentlich gerühmte Bearbeitung der neuen Rechnung, und ihre Verbreitung beſonders auf dem feſten Lande ſchuldig. Es wurde, nach Leibnitzens Vorgang, nun gewöhnlich, daß die Mathematiker ſich gegenſeitig ſchwere Aufgaben vorlegten. Dieſes vermehrte die Theilnahme an der Wiſſenſchaft, indem es zugleich ein vortreffliches Übungsmittel war. Unter dieſen Aufgaben zeichnen ſich aus die über die Iſochrona, und Iſochrona paracentrica von Leibnitz, über die Kettenlinie von Jakob Bernoulli, über die Linie des ſchnellſten Falles (Brachyſtochrona) von Joh. Bernoulli; das problema iſoperimetricum von dem ältern Bernoulli, wodurch dieſer die Zudringlichkeiten ſeines Bruders zurückzuhalten ſuchte. Auch ein braver Veteran in der alten Geometrie, Viviani, legte den neuen Analyſten zur Prüfung ihrer Methode, die unter dem Namen Aenigma Florentinum bekannte Aufgabe vor. Leibnitz und Jakob Bernoulli löſeten ſie noch an demſelben Tage auf, an welchem ſie das Programm von Viviani erhielten. Der Marquis de l'Hopital, ein Zögling des Johannes Bernoulli, trug zur Bekanntmachung der neuen Analyſis viel bey, durch ſeine Analyſe des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes, à Paris 1696, 181 pag. in 4. zweyte ungeänderte Auflage 1715, ohne den Namen des Verfaſſers. Sie enthält nur die Differentialrechnung mit ihrer Anwendung auf geometriſche Fragen. Stone überſetzte ſie ins Engliſche, und fügte die Integralrechnung hinzu. The method of fluxions both direct and inverſe. London 1730. Die Integralrechnung aus dieſem Werke iſt ins Franzöſiſche überſetzt. Analyſe des infiniment petits, comprenant le Calcul intégral, par Rondet, à Paris 1735.

162 pag. in 4. Joh. Bernoulli hat an dieſem Werke viele Fehler gerügt. Opp. T. IV. pag. 169—192. Zur Fortſetzung jenes Werkes iſt auch beſtimmt Traité du Calcul intégral par M. de Bougainville, 2 vols, à Paris 1754. 56. 326. und 246 pag. in 4. Die ältern Methoden ſind darin deutlich und ordentlich vorgetragen. Als eine Fortſetzung des von l'Hopital gelieferten Werks können auch die Lectiones mathematicae von Joh. Bernoulli, welche dieſer bey ſeinem Aufenthalte in Paris 1691 und 1692 für den Marquis ausgearbeitet hat, angeſehen werden. Sie ſind aber erſt in der Sammlung der Bernoulliſchen Werke, im dritten Bande, 1742 im Druck erſchienen. Vielleicht hatte Bernoulli auch Antheil an l'Hopitals Werke; er hätte nur nicht nach deſſen Tode ſeine Anſprüche daran geltend zu machen ſuchen ſollen.

Die Leibnitziſche Differentialrechnung erregte anfangs einige Bedenklichkeit wegen der unendlich kleinen Größen, die darin angenommen werden. Nieuwentiit, der Verfaſſer eines großen phyſiko-theologiſchen Werkes, ſchrieb Conſiderationes circa Analyſeos ad quantitates infinite parvas applicatae principia, et calculi differentialis uſum in reſolvendis problematibus geometricis. Amſtel. 1694, und conſiderationes ſecundas. 1696. Es war ein Mißverſtand, daß er die Differentiale höherer Ordnungen nicht zugeben wollte. Leibnitz zeigte ihm den Grund davon leicht. Nieuwentiit macht in der erſtern Schrift, S. 8, gegen Barrows Methode der berührenden den Einwurf, daß das Verhältniß der unendlich kleinen Differenzen der Coordinaten entweder gar keines oder das der Gleichheit ſeyn müſſe. Doch hat dieſer Mann eine Analyſis Infinitorum, Amſtel. 1695, geſchrieben. Die Beſcheidenheit, womit er ſeine Bedenklichkeiten vorträgt, erwirbt ihm Recht auf Nachſicht, wenn ſie nicht, nach den neueſten Principien, für Bewußtſeyn von Schwäche zu halten iſt.

In der franzöſiſchen Akademie der Wiſſenſchaften entſtand ein lebhafter und langwieriger Streit über die

neue Infiniteſimalrechnung. Der vornehmſte Gegner war Rolle, ein ſehr geſchickter Algebraiſt, der aber für ſeine Meynungen ganz beſonders eingenommen, ſehr übereilt und mißgünſtig gegen andere wegen ihren Erfindungen war. Er wollte zeigen, daß die Differentialrechnung bey den berührenden in vielfachen Puncten, und in einigen Fällen des Größten und Kleinſten kein Genüge thue, oder gar irriges angebe. (Remarques de M. Rolle touchant le problême général des tangentes, à Paris 1703. 47 pag. 4.). Varignon und Saurin brachten ihn endlich von ſeinen Vorurtheilen zurück. Er beichtete ſogar, daß er auf einiger anderer Antrieb die Differentialrechnung angegriffen hätte.

Späterhin (1734) ſtand Berkley, Biſchof von Cloyne, der warme Anpreiſer des Theerwaſſers und Gegner der Wirklichkeit der Materie, gegen die Mathematik überhaupt und die Infiniteſimalrechnung insbeſondere auf. In einer Schrift betitelt, the Analyſt, behauptete er, die Geometer ſeyn gegen die Lehren der Religion ungläubig, und glaubten doch an die Geheimniſſe der Fluxionenrechnung, die auf dunkle und irrige Grundſätze gebauet ſey, und nur in ſo fern richtige Reſultate gebe, als ein Irrthum den andern aufhöbe. Hierauf antworteten Middleton und Smith, beide Profeſſoren zu Cambridge, in einer Schrift: Geometry no friend to infidelity, by Philalethes Cantabrigienſis, London 1734; hernach Wilſon, Profeſſor der Mathematik zu Dublin, und Benjamin Robins, der Verfaſſer einer wichtigen Schrift über die Geſchützkunſt. Der letztere gerieth mit den beiden zuerſt genannten in einen lebhaften Streit über die Erklärung von Newtons Infiniteſimalrechnung. Die Schrift von Robins (Diſcourſe concerning the nature and certainty of Sir Iſaac Newton's method of fluxions, and of prime and u ti-mate ratios) nebſt ſeinen Vertheidigungsſchriften iſt in dem zweyten Bande der Sammlung ſeiner Abhandlungen, London 1761, 2 Bde. enthalten. In dieſem findet ſich auch vieles über den Streit zwiſchen Newton und

Leibnitz, nebſt ungünſtigen Äußerungen über die Differentialrechnung und die Analyſten auf dem feſten Lande.

Durch dieſen neuen Angriff auf die Rechnung des Unendlichen ſcheint Maclaurin veranlaßt worden zu ſeyn, ſein berühmtes Werk über die Fluxionen zu verfaſſen. (A treatiſe of fluxions, Edinburgh, 1742. 2 vols. 4. zuſammen 754 S.). Sein Zweck war, die Methode der Fluxionen auf eine eben ſo augenſcheinliche und unwiderſprechliche Art zu begründen, als die alten Geometer bey ihren Beweiſen verfahren, und dabey von leichtern Begriffen und Sätzen auszugehen, als der Erfinder der Fluxionen nöthig gefunden hatte. Dieſes Verfahren macht die Beweiſe weitläuftig und ſehr anſtrengend. Allein, wenn man ſich ſchon eine zuverläſſige Kenntniß der Infiniteſimalrechnung ſonſt erworben hat, wird man das ſcharfſinnige Werk, beſonders wegen der Anwendungen in der mathematiſchen Phyſik mit großem Nutzen leſen, und dabey das bloß zur Methode gehörige übergehen können.

Die Exponentialrechnung ward ſehr bald nach der Differentialrechnung erfunden, ſowohl von Joh. Bernoulli als Leibnitz, unabhängig von einander, zufolge des Commerc. epiſt. T. I. p. 8. 10. u. m. Bernoulli hatte krumme Linien erdacht, in deren Gleichungen die eine der Coordinaten der Exponens einer Potenz iſt. Dieſe nannte er curvas percurrentes, weil darin dieſe Potenz alle mögliche Dimenſionen durchläuft, und daher auch die Rechnung, welche ſich damit beſchäftigt, calculum percurrentem, wofür hernach die ſchicklichere Benennung, calculus exponentialis eingeführt iſt. Die erſte Abhandlung darüber von Bernoulli erſchien in den Act. Er. 1697. Mart. In den Opp. T. I. p. 179.

Leibnitz erweiterte die Differentialgleichung noch dahin, daß er in einer Differentialgleichung für eine Function von x eine der beſtändigen Größen als veränderlich betrachtete, und daraus das Differential der Function für ein gegebenes x, zufolge der Veränderung der zuerſt als unveränderlich betrachteten Größe, herleitete. Z. B. das Differential des Bogens einer Curve iſt ge-

geben; man ſucht das Differential des Bogens, der zu derſelben Abſciſſe mit jenem gehört, in Beziehung auf eben denſelben, bey einer unendlich kleinen Veränderung einer der Conſtanten in der Gleichung für die Curve. Hieraus leitete Leibnitz eine Methode her, eine krumme Linie zu ziehen, die auf einer ſtetigen Folge von krummen Linien einerley Art, mit gemeinſchaftlicher Axe, und einem gemeinſchaftlichen Puncte für alle auf derſelben, gleiche Bogen von jenem Puncte an abſchneidet Die Veranlaſſung zu dieſer Unterſuchung hatte Joh. Bernoulli gegeben in einem Briefe an Leibnitz, worin er eine allgemeine Methode wünſcht, berührende an eine Curve zu ziehen, deren Puncte durch Quadraturen ſtetig neben einander geordneter Curven beſtimmt werden. (Quadraturen ſind Functionen, wie Längen, Flächenräume, Fallzeiten, die nicht unmittelbar in endlichen Größen, ſondern durch Integration einer Differentialfunction gegeben werden). Leibnitz nannte dieſe Methode differentiatio de curva in curvam. (Commerc. epiſt. LIX. LX. im J. 1697). Er bemerkt, daß dieſes Verfahren von größerer Wichtigkeit ſey, als man zuerſt vermuthen möchte; daher es wohl gethan ſeyn würde, andern die Frage nicht vorzulegen, noch bekannt zu machen, daß er und Bernoulli ſie aufzulöſen wüßten, ſondern zu warten, bis daß ſie ſelbſt die Unterſuchung hinlänglich ausgeführt hätten. Bernoulli bezeugte große Freude über dieſe neue analytiſche Ausſicht, und zugleich ein freundſchaftliches Mißvergnügen, daß Leibnitz das Geheimniß ganz entdeckt hätte, dem er ſelbſt auch auf die Spur gekommen ſey. Dies war bey der Unterſuchung über die Synchrona geſchehen. Nach Leibnitzens Tode maaßte Bernoulli ſich die Ehre der Miterfindung der Methode an, wovon er freylich viele ſchöne Anwendungen gemacht hat. Sein Bruder war aber auch auf dieſe Methode gekommen, wie zwey Aufſätze in den Act. Erud. May 1698, und ein anderer, im Journ. des Sc. Aug. 1693. (Opp. T. II. p. 785. 796. 829.) zeigen. In dem letztern iſt die Auflöſung der Aufgabe, die berührenden an eine Linie zu ziehen, welche an unendlich

vielen Curven von einerley Art gleiche Bogen abſchneidet, in einem Anagramm verſteckt, deſſen Erklärung a. a. O. p. 1021 ſich findet. S. Differentialgleichung und Trajectoria.

Die Entwickelung der Functionen einer veränderlichen Größe mittelſt der ſucceſſiven Differentiale, welche Taylor lehrte, ward das Band zwiſchen der Analyſis des Unendlichen und des Endlichen, indem ſein Lehrſatz zeigt, wie man durch die unendlich kleinen Differenzen zu der endlichen Differenz einer Function in Beziehung auf die endliche Differenz der Functionalgröße gelangen könne, welches bey transſcendenten Functionen wichtig iſt.

Da zwar zu jeder Gleichung zwiſchen endlichen Größen die Differentialgleichung gefunden werden kann, aber nicht umgekehrt jede Differentialgleichung aus einer Gleichung zwiſchen endlichen Größen entſtanden ſeyn mag, ſo iſt es wichtig, bey einer vorgegebenen Differentialgleichung mit Gewißheit beſtimmen zu können, ob ſich zu ihr eine Integralgleichung finden laſſe, oder ob es nothwendig ſey, ihr eine andere Form zu geben, wie durch Zufügung eines Factors, damit ſie nun aus einer Gleichung zwiſchen endlichen Größen entſtanden ſeyn könne. Man hatte faſt funfzig Jahre hindurch mancherley künſtliche Integrationen ausgeführt, ohne darauf bedacht zu ſeyn, die vorläufige Bedingung der Integrabilität feſt zu ſetzen. Man hatte in den Fällen, wo eine Differentialgleichung widerſpänſtig war, ihre Form geändert, und ſie auf ſolche Art oft aufgelöſet. Erſt gegen das J. 1740 entdeckte man die Bedingungen der Integrabilität der Differentialgleichungen. Dieſes geſchah faſt zu gleicher Zeit von Euler, Fontaine und Clairaut. Euler iſt in der That der erſte geweſen, der dieſe Bedingungen gefunden hat, wie Boſſut in der Einleitung zu ſeinem Werke über die Differential- und Integralrechnung einräumt. Die beiden andern Geometer haben aber von dem, was Euler in ſeiner Mechanik ſchon beygebracht hatte, nichts gewußt.

Die Differentialrechnung und ihre Anwendungen ausführlich zu ſtudiren, dienen

Euleri Inſtitutiones Calculi differentialis. Berol. 1755. 4. welche immer noch für ein Hauptwerk erkannt werden.

Segneri elementa Analyſeos Infinitorum. P. I. II. Halae 1761. 63. 8.

Tempelhoff Analyſis des Unendlichen. Erſter Theil. Berlin 1770. 8. Die Integralrechnung iſt nicht herausgekommen.

Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral par *Lacroix*, à Paris, T. I. an V. (1797). 4.

Differentialformeln ſind analytiſche Ausdrücke, die eine Function einer veränderlichen Größe (x) mit ihrem Differential multiplicirt enthalten. Z. B.

$$x^3 \partial x;\ (a + bx)^2 \partial x;\ (a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \partial x.$$

Eine ſolche Formel iſt wegen des Factors ∂x, der einzeln genommen keine Größe bedeuten kann, ebenfalls keine Größe, die ſich auf irgend eine Art angeben läßt; ſie bezieht ſich aber auf ein anderes Differential (∂y), ſo daß der Factor von ∂x der Differentialquotient $\frac{\partial y}{\partial x}$ iſt, oder mit la Grange zu reden, die abgeleitete erſte Function einer urſprünglichen von x. Der Zweck bey dieſem Artikel iſt, ſolche Differentialquotienten analytiſcher Functionen zu finden, die als Grundformeln für zuſammengeſetztere dienen, um die Integration der letztern auf die von jenen zu bringen.

I. Differentiale algebraiſcher Functionen.

1. Es ſey $y = x^m$, ſo iſt $\partial y = m x^{m-1} \partial x$.

Denn es verändern ſich y um Δy, wenn x ſich um Δx verändert, ſo iſt $y + \Delta y = (x + \Delta x)^m$, und

$$\Delta y = m x^{m-1} \Delta x + \frac{m.m-1.}{1.2} x^{m-2} \Delta x^2$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2.}{1.2.3} x^{m-3} \Delta x^3 + \text{etc.}$$ (Differenzenrechnung); alſo

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m x^{m-1} + \frac{m.m-1.}{1.2} x^{m-2} \Delta x + \text{etc.}$$

Der von Δx unabhängige Theil dieſes Quotienten iſt $m x^{m-1}$; dieſer wird durch $\frac{\partial y}{\partial x}$ bezeichnet, (ſ. Differentiale), und ſo iſt $\frac{\partial y}{\partial x} = m x^{m-1}$. Der Bequemlichkeit im Schreiben und Ausſprechen willen ſetzt man dafür $\partial y = m x^{m-1} \partial x$, wobey aber ∂y und ∂x nicht für abſolute Größen zu nehmen ſind.

$y = x^3$	$\partial y = 3x^2 \partial x$
$y = x^2$	$\partial y = 2x \partial x$
$y = x$	$\partial y = \partial x$
$y = x^{-1}$	$\partial y = - x^{-2} \partial x$
$y = x^{-2}$	$\partial y = -2x^{-3} \partial x$
$y = x^{\frac{1}{2}}$	$\partial y = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \partial x$
$y = x^{-\frac{1}{3}}$	$\partial y = -\frac{1}{3} x^{-\frac{4}{3}} \partial x.$

Ein negativer Werth eines Differentials bedeutet, daß die dazu gehörige Größe abnimmt, wenn die dazu gehörige zunimmt. Das Differential $x^{-1} \partial x$ oder $\frac{\partial x}{x}$ entſteht aus keiner algebraiſchen Function, ſondern aus der tranſcendenten, log. nat. x.

2. Es ſey

$$y = a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4 + \text{etc.}$$

ſo iſt

$$\partial y = b\partial x + 2cx\partial x + 3ex^2\partial x + 4fx^3\partial x + \text{etc.}$$

Denn man ſuche zuerſt Δy, laſſe in dem Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ alles von den Veränderungen abhängige weg, und multiplicire darauf den Quotienten $\frac{\partial y}{\partial x}$ und deſſen Werth durch ∂x.

3. Es ſeyn t und u irgend zwey Functionen von x, und $y = tu$, ſo iſt

$$\frac{\partial y}{\partial x} = u\frac{\partial t}{\partial x} + t\frac{\partial u}{\partial x},$$

oder auch $\partial y = u\partial t + t\partial u$.

Denn es verändere ſich y um Δy, wenn t um Δt, und u um Δu ſich verändert. Es iſt demnach $y + \Delta y = (t + \Delta t)(u + \Delta u)$, und $\Delta y = u\Delta t + t\Delta u + \Delta t . \Delta u$. Dividirt man mit der für x gehörigen Veränderung Δx, ſo iſt

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta t}{\Delta x} + t\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta t . \Delta u}{\Delta x}.$$

Der von den Veränderungen unabhängige Differentialquotient iſt $\frac{\partial y}{\partial x} = u\frac{\partial t}{\partial x} + t\frac{\partial u}{\partial x}$, da das letzte Glied $\frac{\Delta t . \Delta u}{\Delta x}$ immer von der einen oder der andern Veränderung Δt oder Δu abhängig bleibt, man mag darin den Differentialquotienten $\frac{\partial u}{\partial x}$ oder $\frac{\partial t}{\partial x}$, jenen für $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, oder dieſen für $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ ſetzen. Behandelt man die Diffe-

rentialzeichen wie endliche Größen, ſo läßt man den Diviſor ∂x weg, und es iſt $\partial y = u\partial t + t\partial u$.

4. Es ſeyn t, u, v, Functionen von x, und $y = tuv$, ſo iſt

$$\frac{\partial y}{\partial x} = uv\frac{\partial t}{\partial x} + tv\frac{\partial u}{\partial x} + tu\frac{\partial v}{\partial x},$$

oder $\partial y = uv\partial t + tv\partial u + tu\partial v$.

Der Beweis iſt dem vorher geführten ähnlich.

5. Es ſeyn wiederum t und u Functionen von x, und $y = \frac{t}{u}$, ſo iſt

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{u\partial t : \partial x - t\partial u : \partial x}{u^2},$$

$$\text{oder } \partial y = \frac{u\partial t - t\partial u}{u^2}.$$

Denn es iſt $y + \Delta y = \frac{t + \Delta t}{u + \Delta u}$, daher

$\Delta y = \frac{u\Delta t - t\Delta u}{u(u + \Delta u)}$, und

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u\Delta t : \Delta x - t\Delta u : \Delta x}{u\,(u + \Delta u)}$. Die von den Veränderungen unabhängigen Differentialquotienten ſind $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial t}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, welche man für die ihnen zuſtimmenden $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, etc. zu ſetzen hat. Im Diviſor wird Δu weggelaſſen, damit dieſer, und dadurch der Bruch ſelbſt, nicht von Δu abhangen. Mit $u + \Delta u$ dividiren, iſt mit $\frac{1}{u} - \frac{\Delta u}{u^2} + \frac{\Delta u^2}{u^3} -$ etc. multipliciren. Von dieſem Factor darf in dem Differentialquotienten nur das

erſte Glied $\frac{1}{u}$ genommen werden. Multiplicirt man in dem Differentialquotienten $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{u\partial t:\partial x - t\partial u:\partial x}{u^2}$ auf beiden Seiten mit ∂x wie mit einer eigentlichen Größe, ſo hat man

$$\partial y = \frac{u\partial t - t\partial u}{u^2}.$$

6. Exempel. Es ſey

$$y = \frac{a+bx}{\alpha+\beta x}, \text{ ſo iſt } \partial y = \frac{b\alpha - a\beta}{(\alpha+\beta x)^2}\partial x.$$

7. Wenn der Nenner eines Bruchs ein Product aus einfachen Factoren von der Form $x+p$ iſt, ſo zerlege man den Bruch in Brüche mit dieſen Factoren als Nennern (ſ. Function 19 ff.), und differentiire jeden der Brüche. Z. B. Es ſey $y = \frac{ax+b}{(x+p)(x+q)}$, ſo iſt $y = \frac{A}{x+p} + \frac{B}{x+q}$. Die Werthe von A und B ſind a. a. O. 20 beſtimmt. Nun iſt

$$\partial y = -\frac{A\partial x}{(x+p)^2} - \frac{B\partial x}{(x+q)^2}.$$

8. Es ſey $y = (a+bx^n)^m$, ſo iſt

$$\partial y = mnbx^{n-1}(a+bx^n)^{m-1}dx.$$

Denn man ſetze $a+bx^n = z$, ſo iſt $y = z^m$, eine mittelbare Function von x. Nun iſt

$\frac{\partial y}{\partial z} = mz^{m-1}$, und $\frac{\partial z}{\partial x} = nbx^{n-1}$, alſo

$\frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = mnbz^{m-1}x^{n-1}$. Es iſt $\frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x}$, eben ſo wie bey Quotienten von endlichen Größen, da die Verhältniſſe $\partial y : \partial z : \partial x$ in endlichen Größen ausgedruckt

werden können. In der Formel $\frac{\partial y}{\partial x} = m n b z^{m-1} x^{n-1}$ ſetze man für z ſeinen Werth, und multiplicire durch ∂x, ſo erhält man den Werth für ∂y.

9. Es ſey $y = x^p (a + b x^n)^m$, ſo iſt

$$\partial y = p x^{p-1} (a + b x^n)^m \partial x + m n b x^{n+p-1} (a + b x^n)^{m-1} \partial x,$$

oder auch

$$\partial y = x^{p-1} (p a + (p + m n) b x^n) (a + b x^n)^{m-1} d x.$$

Denn man ſetze $x^p = t$; $(a + b x^n)^m = u$, ſo iſt $y = t u$. Nun ergiebt ſich zufolge (2.) das hier aufgeſtellte Differential.

10. Exempel. I. Es ſey $y = (a + b x^2)^{\frac{1}{2}}$, ſo iſt

$$\partial y = b x (a + b x^2)^{-\frac{1}{2}} \partial x = \frac{b x \partial x}{\sqrt{(a + b x^2)}}.$$

Exempel. II. Es ſey $y = x (a + b x^2)^{-\frac{1}{2}}$, ſo iſt

$$\partial y = \frac{a \partial x}{(a + b x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Exempel. III. Es ſey $y = \frac{\sqrt{(a + b x^2)}}{x}$, ſo iſt

$$\partial y = -\frac{a \partial x}{x^2 \sqrt{(a + b x^2)}}.$$

11. Es ſey $y = x^p (a x + b x^2)^m$, ſo iſt

$$\partial y = p x^{p-1} (a x + b x^2)^m \partial x + m x^p (a + 2 b x)(a x + b x^2)^{m-1} \partial x.$$

12. Die Differentiale dreytheiliger und mehrtheiliger Potentialgrößen, mit Potenzen der Functionalgröße, oder andern Potentialgrößen multiplicirt, werden auf ähnliche Art gefunden. Auch iſt es nun leicht, jede auf irgend eine Art zuſammengeſetzte Function einer veränderlichen Größe zu finden.

13. Das Verfahren hiebey im Allgemeinen iſt folgendes. Jeder Theil, Factor oder Diviſor der ganzen veränderlichen Function, wird für ſich differentiirt, als wenn derſelbe allein veränderlich wäre. Das Aggregat aller ſolchen partiellen Differentiale iſt das Differential der ganzen Function. Die conſtanten Factoren einer Function bleiben auch in dem Differential.

II. Differentiale transſcendenter Functionen.

1. Logarithmiſche.

14. Es ſey z eine Zahl, und x ihr Logarithme in dem Syſtem, deſſen Baſis $= B$, ſo iſt $z = B^x$, ſ. Logarithmen. Es wachſe x um Δx, wenn z ſich um Δz verändert, ſo iſt $z + \Delta z = B^{x + \Delta x}$. Dieſe Gleichung durch jene dividirt, giebt $\frac{z + \Delta z}{z} = B^{\Delta x}$, und . . . $\frac{\Delta z}{z} = B^{\Delta x} - 1$. Man zerfälle B in die Theile 1 und b, ſo daß $B = 1 + b$, und es iſt nach dem binomiſchen Lehrſatze, $(1 + b)^{\Delta x} = 1 + \Delta x . b + \frac{\Delta x(\Delta x - 1)}{1 . 2} b^2$ $+ \frac{\Delta x(\Delta x - 1)(\Delta x - 2)}{1 . 2 . 3} b^3 +$ etc. alſo iſt

$$\frac{\Delta z}{z} = \Delta x . b + \frac{\Delta x(\Delta x - 1)}{1 . 2} b^2 + \frac{\Delta x(\Delta x - 1)(\Delta x - 2)}{1 . 2 . 3} b^3$$
$$+ \frac{\Delta x(\Delta x - 1)(\Delta x - 2)(\Delta x - 3)}{1 . 2 . 3 . 4} b^4 + \text{etc.}$$

Die Theile dieſer Reihe, welche die erſte Potenz von Δx enthalten, ſind $b . \Delta x - \frac{1}{2} b^2 \Delta x$

$$+ \frac{1 . 2}{2 . 3} b^3 . \Delta x - \frac{1 . 2 . 3}{2 . 3 . 4} b^4 . \Delta x + \frac{1 . 2 . 3 . 4}{2 . 3 . 4 . 5} b^5 . \Delta x - \text{etc.}$$

oder $b . \Delta x - \frac{1}{2} b^2 \Delta x + \frac{1}{3} b^3 . \Delta x - \frac{1}{4} b^4 . \Delta x + \frac{1}{5} b^5 . \Delta x - \text{etc.}$ Die übrigen Theile zuſammen bezeichne man durch $R . \Delta x^2$, wo R eine Function von b und Δx iſt.

Demnach iſt $\frac{\Delta z}{z \Delta x} = b - \frac{1}{2} b^2 + \frac{1}{3} b^3 - \frac{1}{4} b^4 + \frac{1}{5} b^5 - \text{etc.}$

$+ R . \Delta x.$

Da der von Δz und Δx unabhängige Theil des Quotienten $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ durch $\frac{\partial z}{\partial x}$ bezeichnet wird, ſo iſt

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z(b - \tfrac{1}{2} b^2 + \tfrac{1}{3} b^3 - \tfrac{1}{4} b^4 + \tfrac{1}{5} b^5 - \text{etc.}).$$

Den Werth der Reihe bezeichne man durch c, ſo ſind die Differentialgleichungen zwiſchen einer Zahl z und ihrem Logarithmen x in dem Syſtem, deſſen Baſis $B = 1 + b$, dieſe:

$$\text{I. } \frac{\partial z}{z} = c \partial x. \quad \text{II. } \partial z = c B^x d x.$$

wo für z deſſen Werth geſetzt iſt.

In dem Syſtem der natürlichen Logarithmen iſt $c = 1$. Die Baſis in dieſem Syſtem wird durch e bezeichnet.

15. In dem Syſtem der briggiſchen Logarithmen iſt $B = 10$, und $b = 9$. Die Reihe $b - \frac{1}{2} b^2 + \frac{1}{3} b^3 - \text{etc.}$ iſt ſehr divergirend. Man ſehe b als eine veränderliche Größe an, und ſetze $y - \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{3} y^3 - \frac{1}{4} y^4 + \text{etc.} = u$, ſo iſt $(1 - y + y^2 - y^3 + y^4 - \text{etc.}) \partial y = \partial u$, das iſt, $\frac{\partial y}{1 + y} = \partial u$. Folglich iſt log. nat. $(1 + y) = u$, wobey es keiner conſtanten Größe bedarf, da für $y = 0$ nach dieſer Gleichung auch $u = 0$ iſt, wie es nach der urſprünglichen Gleichung zwiſchen y und u ſeyn muß. Es iſt alſo $b - \frac{1}{2} b^2 + \frac{1}{3} b^3 - \text{etc.} =$ log. nat. $(1 + b)$ $=$ log. nat. B, und $c =$ log. nat. B. Die logarithmi-

ſche Differentialgleichung iſt demnach

$\frac{\partial z}{z} = (\text{log. nat. B}) dx$, und $\partial z = (\text{lognat. B}) B^x \partial x$.

Wie der log. nat. B gefunden wird, wird in dem Artikel, Logarithmen, gezeigt.

16. Es ſey $z = a^2 + my^2$ und $x = \text{lognat. } z$, für welchen $c = 1$ iſt, ſo iſt $\partial x = \frac{2my\partial y}{a^2 + my^2}$.

17. Es ſey $z = (a + y)(b + y)$, und $x = \text{logn. } z$, ſo iſt $\partial x = \frac{\partial y}{a+y} + \frac{\partial y}{b+y}$, oder

$\partial x = \frac{a + b + 2y}{(a+y)(b+y)} \partial y$.

Es iſt nämlich $l(a+y)(b+y) = l(a+y) + l(b+y)$.

18. Es ſey $z = \frac{a+y}{a-y}$, und $x = \text{logn. } z$, ſo iſt $\partial x = \frac{2a\partial y}{a^2 - y^2}$.

Es iſt nämlich $\text{log. } z = l(a+y) - l(a-y)$.

19. Es ſey $z = y + \sqrt{(a^2 + y^2)}$, und $x = \text{logn. } z$, ſo iſt $\partial x = \frac{\partial y}{\sqrt{(a^2 + y^2)}}$.

20. Es ſey $z = y + \sqrt{(y^2 - a^2)}$, und $x = \text{logn. } z$, ſo iſt $\partial x = \frac{\partial y}{\sqrt{(y^2 - a^2)}}$.

21. Es ſey $z = \frac{a + \sqrt{(a^2 + y^2)}}{y}$, und $x = \text{logn. } z$, ſo iſt $\partial x = -\frac{a\partial y}{y\sqrt{(a^2 + y^2)}}$.

Es iſt nämlich $\partial z = \frac{-a(a+\sqrt{(a^2+y^2)})}{y^2\sqrt{(a^2+y^2)}}\partial y$.

22. Es ſey $z = \frac{a-\sqrt{(a^2-y^2)}}{y}$, und $x = \text{logn. } z$, ſo iſt $\partial x = \frac{a\partial y}{y\sqrt{(a^2-y^2)}}$,

23. Es ſey $z = y + \sqrt{(a^2+y^2)}$, und $y = \frac{bu-c^2}{u}$, und $x = \text{logn.} z$, ſo iſt aus (19.)

$$\partial x = \frac{c^2\partial u}{u\sqrt{((a^2+b^2)u^2-2bc^2u+c^4)}}.$$

24. Es ſey $z = y + \sqrt{(y^2-a^2)}$, und $y = \frac{bu-c^2}{u}$, und $x = \text{log. nat. } z$, ſo iſt

$$\partial x = \frac{c^2\partial u}{u\sqrt{((b^2-a^2)u^2-2bc^2u+c^4)}}.$$

In beiden Formeln kann auch $+c^2$ ſtatt $-c^2$ geſetzt werden.

25. Es ſey $z = \frac{a+y}{a-y}$, und $y = b+v$, und $x = \text{logn. } z$, ſo iſt $\partial x = \frac{2a\partial v}{a^2-b^2-2bv+v^2}$.

26. Es ſey $y = (lz)^n$, der natürliche Logarithme verſtanden, ſo iſt $\partial y = n(lz)^{n-1}\cdot\frac{\partial z}{z}$.

Man ſetze $lz = u$, ſo iſt $y = u^n$, und $\partial y = nu^{n-1}\partial u$. Nun iſt $\partial u = \frac{\partial z}{z}$, alſo, ꝛc.

27. Es ſey $y = z^m \, lz$, ſo iſt
$\partial y = (m lz + 1) z^{m-1} \partial z$, (aus 3 u. 14).

Alſo iſt

$z^{m-1} lz . \partial z$ das Differential von $\frac{1}{m} z^m lz - \frac{1}{m^2} z^m$.

28. Es ſey $y = llz$ (der Logarithme des Logarithmen von z), ſo iſt $\partial y = \frac{\partial z}{z lz}$.

Man ſetze $lz = u$, ſo iſt $y = lu$, alſo

$$\partial y = \frac{\partial u}{u} = \frac{\partial z}{uz} = \frac{\partial z}{z lz}.$$

2. Differentiale circularer Functionen.

29. Es ſey s ein Bogen eines Kreiſes, deſſen Halbmeſſer $= a$; der lineariſche Sinus des Bogens ſey $= y$; der Coſinus $= x$, ſo iſt $\partial s = \frac{a \partial y}{x} = \frac{a \partial y}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}$.

Denn es iſt überhaupt $\partial s = \partial y \sqrt{(1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2})}$ (Rectification). Für den Kreis iſt $a^2 = x^2 + y^2$. Setzt man $x + \Delta x$ für x, und $y + \Delta y$ für y, ſo iſt $a^2 = (x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2$, alſo $0 = 2 x \Delta x + \Delta x^2 + 2 y \Delta y + \Delta y^2$, wo Δx und Δy von entgegengeſetzter Beſchaffenheit in Abſicht des Wachsthums und Abnehmens ſind. Es folgt hieraus $\frac{\partial x}{\partial y} = - \frac{y}{x}$, und $\frac{\partial x^2}{\partial y^2} = \frac{y^2}{x^2}$;

folglich $1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2} = 1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{a^2}{x^2}$; alſo iſt

$$\partial s = \frac{a \partial y}{x} = \frac{a \partial y}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}.$$

30. Ferner iſt $\partial s = -\frac{a\partial x}{y} = -\frac{a\partial x}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$. Hier wird ∂y durch ∂x ausgedruckt.

31. Es ſey t die lineariſche Tangente des Bogens s, ſo iſt $\partial s = \frac{a^2\partial t}{a^2+t^2}$. Denn es iſt $y = \frac{at}{\sqrt{(a^2+t^2)}}$, und $x = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2+t^2)}}$, (Goniometrie, 14). Aus dem Werthe von y folgt $\partial y = \frac{a^3\partial t}{(a^2+t^2)^{\frac{3}{2}}}$ (10. II.); alſo iſt $\frac{a\partial y}{x} = \frac{a^4\partial t}{(a^2+t^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}}{a^2} = \frac{a^2\partial t}{a^2+t^2}$, das iſt $\partial s = \frac{a^2\partial t}{a^2+t^2}$.

32. Iſt t die lineariſche Cotangente des Bogens s, ſo iſt $\partial s = -\frac{a^2\partial t}{a^2+t^2}$, weil die Tangente $= \frac{a^2}{t}$ iſt, wenn t die Cotangente bedeutet. Oder, es iſt hier t die Tangente von $\frac{1}{2}\pi - s$.

33. Es ſey z die lineariſche Secante des Bogens s, ſo iſt $\partial s = \frac{a^2\partial z}{z\sqrt{(z^2-a^2)}}$.

Denn es iſt der Coſinus $x = \frac{a^2}{z}$, alſo $\partial x = -\frac{a^2\partial z}{z^2}$. Da $a^2 - x^2 = \frac{a^2(z^2-a^2)}{z^2}$, ſo iſt

$$\partial s = -\frac{a\partial x}{\sqrt{(a^2-x^2)}} = \frac{a^2\partial z}{z\sqrt{(z^2-a^2)}}.$$

34. Es ſey z die lineariſche Coſecante des Bogens s, ſo iſt $\partial s = -\frac{a^2 \partial z}{z\sqrt{(z^2 - a^2)}}$.

35. Es ſey v der lineariſche Sinus verſus eines Bogens, ſo iſt $\partial s = \frac{a \partial v}{\sqrt{(2av - vv)}}$.

Denn es iſt $x = a - v$, alſo $\partial x = -\partial v$. Durch die Subſtitution dieſer Werthe in (30.) wird der angegebene Werth des Differentials ∂s erhalten.

36. Es ſey der Sinus $y = \frac{bu - c^2}{u}$, ſo iſt

$a^2 - y^2 = \frac{(a^2 - b^2)u^2 + 2bc^2u - c^4}{u^2}$, u. $\partial y = \frac{c^2 \partial u}{u^2}$;

alſo iſt

$$\partial s = \frac{a c^2 \partial u}{u\sqrt{((a^2 - b^2)u^2 + 2bc^2u - c^4)}}.$$

Anſtatt $-c^2$ kann auch $+c^2$ geſetzt werden.

37. Es ſey die Tangente $t = b + v$, ſo iſt $\partial s = \frac{a^2 \partial v}{a^2 + b^2 + 2bv + v^2}$.

Zu vergleichen ſind die logarithmiſchen Differentiale in (24. 25).

38. Wird der Halbmeſſer $= 1$ geſetzt, ſo ſey der Bogen $= \varphi$, und es iſt

$$\partial \varphi = \frac{\partial \sin \varphi}{\cos \varphi} = -\frac{\partial \cos \varphi}{\sin \varphi}.$$

$$\partial \varphi = \frac{\partial \tang \varphi}{1 + \tang \varphi^2} = \cos \varphi^2 . \partial \tang \varphi$$

$$\partial \varphi = -\frac{\partial \cot \varphi}{1 + \cot \varphi^2} = -\sin \varphi^2 . \partial \cot \varphi$$

$$\partial \varphi = \frac{\partial \sec \varphi}{\sec \varphi . \tang \varphi} = -\frac{\partial \cosec \varphi}{\cosec \varphi . \cot \varphi}.$$

Aus dieſen Formeln werden unmittelbar die Differentiale des Sinus, der Tangente, ꝛc. durch das Differential des Bogens mit einer goniometriſchen Function verbunden ausgedruckt.

39. Es iſt $\partial \log. \text{nat.} \sin\varphi = \cot.\varphi . \partial\varphi$

Denn $\frac{\partial \sin\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \partial\varphi = \cot\varphi . \partial\varphi.$

40. Es iſt $\partial \log. \text{nat.} \cos\varphi = - \tan\varphi . \partial\varphi.$

Dieſe Formel entſteht aus jenen, wenn $90° - \varphi$ für φ geſetzt wird.

41. Es iſt $\partial \log. \text{nat.} \tan\varphi = \frac{2\partial\varphi}{\sin 2\varphi}$. Denn

$$\frac{\partial \tan\varphi}{\tan\varphi} = \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi^2 . \tan\varphi} = \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi . \sin\varphi} = \frac{2\partial\varphi}{\sin 2\varphi}.$$

42. Es iſt $\partial \log. \text{nat.} \tan(45° + \varphi) = \frac{2\partial\varphi}{\cos 2\varphi}$,

und $\partial . \log. \text{nat.} \tan(45° - \varphi) = - \frac{2\partial\varphi}{\cos 2\varphi}.$

Dieſe Formeln entſtehen aus (41), wenn $45° \pm \varphi$ für φ daſelbſt geſetzt wird.

43. Es ſey $\sin\varphi = ly$, oder $y = e^{\sin\varphi}$, wo e die Baſis der natürlichen Logarithmen iſt. Daraus iſt $\partial y = e^{\sin\varphi} \cos\varphi \partial\varphi$.

44. In dieſen Formeln ſind die natürlichen Logarithmen zu verſtehen. Dieſe werden durch die Multiplication mit dem Modulus des briggiſchen Syſtems, 0,43429448 ... in briggiſche verwandelt. Die Winkel ſind Bogen für den Halbkreis = 3,141592... Alſo iſt 1° = 0,017453292 ..; 1′ = 0,000290888... 1″ = 0,000004848... (Cyklometrie, S. 643).

45. Der Logarithme eines Sinus, als eines Bruchs für den Halbmeſſer als Einheit, iſt negativ, und nimmt der Quantität nach ab, wenn der Winkel und der Sinus zunehmen. Die abſolute Verminderung einer negativen Größe wird als eine Vergrößerung betrachtet. (Entgegengeſetzte Größen). Daher iſt das Differential des log. sin φ gleichnamig mit $\partial\varphi$. Bey dem log. coſ φ verhält es ſich umgekehrt. Mit dem ∂ log. tang φ hat es dieſelbe Beſchaffenheit wie mit dem ∂ log. sin φ. Iſt hier φ größer als 45° und kleiner als 90°, ſo iſt log. tang φ poſitiv, und deſſen Veränderung mit $\partial\varphi$ gleichnamig.

46. Um die Formeln, beſonders der Differentiale logarithmiſcher und circularer Größen ſich geläufig und anſchaulich zu machen, berechne man kleine Veränderungen von Functionen aus der angenommenen Veränderung der Functionalgröße. Dann ſetze man dieſe letztere für ihr Differential, und berechne nach der Differentialformel das Differential der Function. Dieſes ſtimmt mit der gefundenen endlichen Veränderung deſto genauer, je kleiner die Veränderungen ſind.

Exempel.

Es ſey $\varphi = 1°$; $\Delta\varphi = 10'' = 0{,}00004848\,1$.
Es ſoll Δ log. Br. sin φ, oder der Unterſchied der Brigiſchen Logarithmen von sin 1° und sin 1°10″ gefunden werden. Es iſt Δ log. Br. sin 1° = cot. 1°. $\Delta\varphi$. 0,434...
Mittelſt der Logarithmen iſt die Rechnung folgende:

$$\begin{array}{lll} \text{log. cot. } 1° & = & 1{,}7580785 \\ \text{l}\,\Delta\varphi & = & 5{,}6855748 - 10 \\ \text{l}\,0{,}434.. & = & 9{,}6377843 - 10 \\ \hline & & 7{,}0814376 - 10 \end{array}$$

alſo Δ log. Br. sin 1° = 0,0012062. Nach den Tafeln iſt dieſer Unterſchied = 0,0012046. Die Differentialformel giebt nur das erſte Glied einer Reihe, wenn die Differentiale als endliche Größen behandelt werden. In dem Exempel verändern ſich die Logarithmen ſtark.

III. Analogie zwiſchen den logarithmiſchen und circularen Differentialen.

47. Die logarithmiſchen und circularen Differentiale kommen mit einander überein bis auf die Vorzeichen der quadratiſchen Größen. Es iſt in (19), $\partial x = \frac{a \partial y}{\sqrt{(a^2 + y^2)}}$, wenn daſelbſt noch der Factor a zugeſetzt wird, und in (23.), $\partial s = \frac{a \partial y}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}$. Setzt man in der einen Formel $y\sqrt{-1}$ für y, ſo entſteht daraus die andere, nur mit dem Factor $\sqrt{-1}$. So iſt $\partial x = \frac{a \partial y . \sqrt{-1}}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}$, folglich $\partial x = \partial s . \sqrt{-1}$. Daher $x = s . \sqrt{-1}$, ſo daß ein Logarithme als ein unmöglicher Kreisbogen anzuſehen iſt. Die Logarithmen werden hier als Linien betrachtet.

48. Man ſetze $a = 1$; $s = \varphi$, damit der Bogen φ, ſo wie der Logarithme x, eine bloße Zahl ſey.

So iſt $y = \sin \varphi$; $\sqrt{(1 - y^2)} = \text{coſ}\, \varphi$; und $\varphi = \text{Arc. sin}\, y$; $\partial \varphi = \frac{\partial y}{\sqrt{(1 - y^2)}}$. Die logarithmiſchen Formeln (19.) ſind $z = e^x$, wo e die Baſis der natürlichen Logarithmen bedeutet; $z = y + \sqrt{(1 + y^2)}$, und $\partial x = - \frac{\partial y}{\sqrt{(1 + y^2)}}$. In dieſen ſetze man $y\sqrt{-1}$ ſtatt y, ſo wird $z = y\sqrt{-1} + \sqrt{(1 - y^2)}$, und $\partial x = \frac{\partial y \sqrt{-1}}{\sqrt{(1 - y^2)}}$. Die Vergleichung mit dem circularen Differential giebt $\partial x = \partial \varphi . \sqrt{-1}$, alſo $x = \varphi \sqrt{-1}$, und daher $z = e^{\varphi \sqrt{-1}}$, das iſt,

$$e^{\varphi \sqrt{-1}} = y\sqrt{-1} + \sqrt{(1 - y^2)}.$$

Es iſt $\frac{1}{e^{\varphi\sqrt{-1}}} = e^{-\varphi\sqrt{-1}}$, und

$$\frac{1}{y\sqrt{-1}+\sqrt{(1-y^2)}} = \frac{\sqrt{(1-y^2)}-y\sqrt{-1}}{1}, \text{ alſo}$$

$$e^{-\varphi\sqrt{-1}} = \sqrt{(1-y^2)} - y\sqrt{-1}.$$

Beide Exponentialgrößen addirt, geben

$$e^{\varphi\sqrt{-1}} + e^{-\varphi\sqrt{-1}} = 2\sqrt{(1-y^2)} = 2\cos\varphi.$$

Das Unmögliche in beiden Exponentialgrößen hebt ſich, und das Mögliche giebt $2\cos\varphi$.

Hingegen iſt

$$e^{\varphi\sqrt{-1}} - e^{-\varphi\sqrt{-1}} = 2y\sqrt{-1} = 2\sin\varphi.\sqrt{-1},$$

wo die möglichen Theile ſich einander aufheben.

49. Eine ähnliche Relation der Exponentialgrößen findet in Abſicht der Tangenten der Kreisbogen Statt. Es ſey $z = e^x$, oder $x = \log. \text{nat. } z$, und $z = \frac{1+t}{1-t}$, ſo iſt (aus 18.), $\partial x = \frac{2\partial t}{1-t^2}$. Hier ſetze man $t\sqrt{-1}$ ſtatt t, ſo iſt $\partial x = \frac{2\partial t.\sqrt{-1}}{1+t^2}$, und $z = \frac{1+t\sqrt{-1}}{1-t\sqrt{-1}}$.

Iſt $t = \tan\varphi$; ſo iſt $\partial\varphi = \frac{\partial t}{1+t^2}$ (aus 31. 38).

Daher iſt $\partial x = 2\partial\varphi.\sqrt{-1}$, und $x = 2\varphi.\sqrt{-1}$. Folglich iſt

$$e^{2\varphi\sqrt{-1}} = \frac{1+t\sqrt{-1}}{1-t\sqrt{-1}} = \frac{(1+t\sqrt{-1})^2}{1+t^2}.$$

$$e^{-2\varphi\sqrt{-1}} = \frac{1-t\sqrt{-1}}{1+t\sqrt{-1}} = \frac{(1-t\sqrt{-1})^2}{1+t^2}.$$

Durch Addition wird erhalten

$$e^{2\varphi\sqrt{-1}} + e^{-2\varphi\sqrt{-1}} = \frac{2(1-t^2)}{1+t^2};$$

Durch Subtraction

$$e^{2\varphi\sqrt{-1}} - e^{-2\varphi\sqrt{-1}} = \frac{4t\sqrt{-1}}{1+t^2}.$$

50. In der erſten dieſer Formeln addire man auf bei-den Seiten die Zahl 2, ſo iſt

$$e^{2\varphi\sqrt{-1}} + 2 + e^{-2\varphi\sqrt{-1}} = \frac{4}{1+t^2},$$

und die Quadratwurzel aus beiden Theilen gezogen

$$e^{\varphi\sqrt{-1}} + e^{-\varphi\sqrt{-1}} = \frac{2}{\sqrt{(1+t^2)}}.$$

Da $\frac{1}{\sqrt{(1+t^2)}} = \cos\varphi$ iſt, ſo iſt dieſes dieſelbe For-mel mit der erſtern in (48.).

Der erſte Theil der zweyten Formel iſt das Product von $e^{\varphi\sqrt{-1}} + e^{-\varphi\sqrt{-1}}$ in $e^{\varphi\sqrt{-1}} - e^{-\varphi\sqrt{-1}}$; der zweyte Theil iſt das Product von $\frac{2}{\sqrt{(1+t^2)}}$ in $\frac{2t\sqrt{-1}}{\sqrt{(1+t^2)}}$, das iſt von $2\cos\varphi$ in $2\sin\varphi\sqrt{-1}$. Die-ſem Producte iſt jenes gleich, aus (48).

51. Die Analogie der logarithmiſchen und circularen Differentiale iſt der Grund, daß eine Aufgabe, deren Auflö-ſung auf die eine Gattung führt, mit einer andern vergeſell-ſchaftet zu ſeyn pflegt, zu deren Auflöſung die andere Gat-tung gehört, z. B. die Quadratur eines Kreisabſchnittes, und eines hyperboliſchen Abſchnittes; die Berechnung ei-ner-Zone auf der Oberfläche eines gedruckten und eines geſtreckten Sphäroids. Hiemit iſt zu vergleichen der VIII. Abſchnitt in dem Artikel, Goniometrie, von der Analogie der Theilung eines Kreisſectors und eines hyperboliſchen Sectors in gleich große Theile.

IV. Exponentialrechnung.

52. Exponentialrechnung iſt diejenige, worin Potenzen mit einem veränderlichen Exponenten vorkommen, die Wurzel mag unveränderlich oder ſelbſt veränderlich ſeyn.

Der Fall, da die Wurzel eine unveränderliche Größe iſt, iſt bey den logarithmiſchen Differentialen vorgekommen. Es ſey $z = a^x$, ſo iſt $lz = xla$. Verſteht man die natürlichen Logarithmen, ſo iſt $\frac{\partial z}{z} = \partial x . la$,

alſo $\partial z = a^x \partial x . la$, wie in (15).

53. Es ſey $z = u^x$, ſo iſt $lz = xlu$. Daraus $\frac{\partial z}{z} = \partial x . lu + \frac{x \partial u}{u}$, und

$$\partial z = u^{x-1} (u \partial x . lu + x \partial u).$$

54. Es ſey $z = e^{e^x}$, wo der Exponens ſelbſt wieder eine Exponentialgröße iſt. Die Wurzel e iſt die Baſis der natürlichen Logarithmen. Man ſetze $e^x = u$, ſo iſt $z = e^u$, und $\partial z = e^u \partial u = e^u e^x \partial x$, alſo

$$\partial z = e^{e^x} e^x \partial x.$$

Differentialgleichung des erſten Grades zwiſchen zwey veränderlichen Größen iſt eine ſolche, in welcher der Differential-Quotient $\frac{\partial y}{\partial x}$ eine Function von x und y zugleich iſt, im Gegenſatze gegen eine Differentialformel, worin dieſer Quotient eine Function von x allein iſt. Euler macht in dem erſten Bande ſeiner Integralrechnung dieſen Unterſchied zwiſchen Differentialformel und Differentialgleichung. Überhaupt iſt Differentialgleichung eine jede Gleichung zwiſchen zwey oder mehrern veränderlichen Größen, welche Differentiale derſelben von irgend einem

Grade enthält. In dem gegenwärtigen Artikel werden nur die Gleichungen von der Anfangs beſtimmten Beſchaffenheit betrachtet.

1. Die Differentiirung der vielfachen Functionen führt auf ſolche Differentialgleichungen. Es giebt aber viele dieſer Gattung, welche nicht auf ſolche Art entſtehen, ſo daß ſich die Integral-Functionen nicht vollſtändig angeben laſſen. Es verhält ſich hier, nur auf eine höhere Art, wie mit den Potenzen und Wurzeln. Zu jeder Wurzel läßt ſich irgend eine Potenz mit einem ganzen Exponenten vollſtändig angeben, aber nicht umgekehrt zu jeder Potenz die Wurzel. Auch können Differentialgleichungen ſo beſchaffen ſeyn, daß ihnen gar keine Integralgleichung entſpricht.

2. Die Gleichungen, die hier betrachtet werden, haben die Form, $P\partial x + Q\partial y = o$, wo P und Q Functionen von x und y zugleich ſind. Wären P und Q Functionen von x allein, ſo gehörte die Gleichung unter die Differentialformeln, die in dem vorhergehenden Artikel abgehandelt ſind. Wäre P eine Function von x allein, und Q von y allein, ſo wäre die Gleichung aus zwey Differentialformeln zuſammengeſetzt. Sie heißt alsdann auch eine ſolche, in welcher die veränderlichen Größen von einander geſondert ſind.

3. Die Gleichung zwiſchen x und y ſey

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = o.$$

Man ſetze $x + \Delta x$ für x, und $y + \Delta y$ für y, und ziehe jene Gleichung von der hiedurch entſtandenen ab, ſo iſt

$$2ay\Delta y + bx\Delta y + by\Delta x + 2cx\Delta x + d\Delta y + e\Delta x$$
$$+ a\Delta y^2 + b\Delta y\Delta x + c\Delta x^2 = o.$$

Hieraus folgt der Differentialquotient,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{by + 2cx + e}{2ay + bx + d},$$

oder die Differentialgleichung,

$$(2cx + by + e)\partial x + (2ay + bx + d)\partial y = o.$$

Der erſte Theil iſt das partielle Differential der Gleichung nach dx, der andere nach dy.

4. Der Differentialquotient iſt möglich, wenn das dazu gehörige Verhältniß zwiſchen x und y ein mögliches iſt. Fehlt dabey in der Gleichung zwiſchen dieſen ay^2 nicht, ſo iſt für irgend einen Werth von x der Werth von y gedoppelt, und daher eben ſo der Werth des Differentialquotienten. Die Gleichung gehört für die Coordinaten an einem Kegelſchnitte, und der Differentialquotient iſt, bey rechtwinklichten Coordinaten, die Tangente des Winkels der berührenden mit der Axe der Abſciſſen, wenn dieſe durch x bezeichnet werden. Dieſer Winkel iſt Null, oder die berührende der Axe der Abſciſſen parallel, wenn $by + 2cx + e = o$ iſt, und ein Rechter, oder die berührende fällt in die Ordinate, wenn $2ay + bx + d = o$ iſt.

5. Die Gleichung, $ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = o$, ſey ein Product aus zwey Gleichungen, $\alpha y + \beta x + \gamma = o$, und $\delta y + \varepsilon x + \zeta = o$, ſo ſtellt ſie ein Syſtem von zwey geraden Linien vor. Das Product entwickelt iſt

$$a\delta y^2 + (\alpha\varepsilon + \beta\delta)\,xy + \beta\varepsilon x^2 + (\alpha\zeta + \gamma\delta)\,y$$
$$+ (\beta\zeta + \gamma\varepsilon)\,x + \gamma\zeta = o:$$

In der daraus gezogenen Differentialgleichung iſt der Factor von $\partial y = 2\alpha\delta y + (\alpha\varepsilon + \beta\delta)\,x + \alpha\zeta + \gamma\delta$. Die Verbindung der beiden Gleichungen, deren Product die Gleichung iſt, ergiebt, daß dieſer Factor $= o$ iſt. Eben ſo iſt der Factor von $\partial x = 2\beta\varepsilon x + (\alpha\varepsilon + \beta\delta)\,y + \beta\zeta + \gamma\varepsilon = o$.

Es iſt alſo für das Syſtem zweyer geraden Linien $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{o}{o}$. Allein es bleibt in der Gleichung für die endlichen Differenzen (3.) der Theil $a\Delta y^2 + b\Delta y\Delta x + c\Delta x^2 = o$ übrig, da die Theile, welche die einfachen Δy und Δx enthalten, ſich aufheben. Daraus ergiebt

ſich nun der Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ mittelſt der quadratiſchen Gleichung, $a.\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} + b.\frac{\Delta y}{\Delta x} + c = 0$, woraus ein gedoppelter Werth des Quotienten folgt, einer für die eine gerade Linie, ein zweyter für die andere. Nimmt man die Coordinaten in einer ſtetigen Folge, ſo iſt $a\frac{\partial y^2}{\partial x^2} + b\frac{\partial y}{\partial x} + c = 0$, oder $a\partial y^2 + b\partial y\partial x + c\partial x^2 = 0$. Eben dieſe Gleichung wird erhalten, wenn der Zähler und Nenner des Werthes von $\frac{\partial y}{\partial x}$ differentiirt werden, und der daraus entſtehende Bruch zum Werthe von $\frac{\partial y}{\partial x}$ genommen wird.

6. In der allgemeinen Gleichung vom dritten Grade zwiſchen zwey veränderlichen Größen,

$$ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3 + ey^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + k = 0,$$

ſetze man $x + \Delta x$ für x, und $y + \Delta y$ für y, und ziehe von der dadurch entſtandenen Gleichung jene ab, ſo iſt

$$\begin{aligned}&(3ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2ey + fx + h)\Delta y\\ &+ (3dx^2 + 2cxy + by^2 + 2gx + fy + i)\Delta x\\ &+ (3ay + bx + e)\Delta y^2\\ &+ (2by + 2cx + f)\Delta y.\Delta x\\ &+ (3dx + cy + g)\Delta x^2\\ &+ a\Delta y^3 + b\Delta y^2.\Delta x + c\Delta x^3.\Delta y + d\Delta x^3 = 0.\end{aligned}$$

Wie die Factoren der Producte von den Differenzen entſtehen, iſt in (Differenzenrechnung, 18.) bemerkt.

Aus der endlichen Differenzengleichung entſteht die Differentialgleichung

$$(3ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2ey + fx + h)\,\partial y$$
$$+ (3dx^2 + 2cxy + by^2 + 2gx + fy + i)\,\partial x = 0.$$

7. Allgemein ſind hier drey Fortſchreitungen der y zu der ſtetigen Fortſchreitung der x geordnet, und umgekehrt. Am deutlichſten wird dies, wenn man die y als Ordinaten einer Linie des dritten Grades betrachtet, an welcher zu derſelben Abſciſſe drey Ordinaten möglich ſind. Es kann aber, nach Beſchaffenheit der Coefficienten, eine Fortſchreitung der Ordinaten wegfallen, ſelbſt nur eine einzige bleiben. Wenn zwey Fortſchreitungen der y ſich mit einem gemeinſchaftlichen Gliede an einander ſchließen, ſo hat die Gleichung für y, als eine beſtimmte mit einer gegebenen x betrachtet, zwey gleiche Wurzeln, und es iſt $3ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2ey + fx + h = 0$, (Gleichung, IX.). Auf gleiche Art iſt, wo zwey Fortſchreitungen der x, als Ordinaten betrachtet, zuſammenkommen $3dx^2 + 2cxy + by^2 + 2gx + fy + i = 0$. In jenem Falle iſt $\frac{\partial x}{\partial y} = 0$, oder $\frac{\partial y}{\partial x}$ unendlich groß, und die berührende fällt in die Ordinate; in dem andern iſt $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, und die berührende fällt in die Ordinate x, oder iſt parallel mit der Axe der Abſciſſen x. Treten beide Fälle zugleich ein, ſo ſchneiden ſich zwey Zweige der krummen Linie in einem Puncte. Alsdann haben nämlich zwey verſchiedene Fortſchreitungen der y ein gemeinſchaftliches Glied, und zwey Fortſchreitungen der x eben ein ſolches zu jenem coordinirtes. Die Differentialgleichung wird nun $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{0}{0}$, welches überhaupt etwas unbeſtimmtes bedeutet.

Man ſuche nun aus der Differenzengleichung denjenigen Theil des Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, der von der Quantität

der Differenzen unabhängig iſt, und durch $\frac{\partial y^2}{\partial x^2}$ bezeichnet wird. Die beiden erſten Glieder, welche Δy und Δx einfach enthalten, fallen weg, weil die Factoren dieſer Differenzen $= 0$ ſind. Die übrigen dividire man durch Δx^2, und laſſe diejenigen Glieder weg, welche von den Differenzen Δy und Δx abhängig bleiben, ſo iſt, nach der hierauf ſich beziehenden Bezeichnung,

$$(3ay + bx + e)\frac{\partial y^2}{\partial x^2} + (2by + 2cx + f)\frac{\partial y}{\partial x}$$
$$+ 3dx + cy + g = 0.$$

Die beiden Werthe von $\frac{\partial y}{\partial x}$ ſind die Tangenten der Winkel der beiden berührenden in dem Durchſchnittspuncte der beiden Zweige der Curve mit der Axe der Abſciſſen.

Eben dieſe Gleichung wird erhalten, wenn in dem Werthe von $\frac{\partial y}{\partial x}$ Zähler und Nenner differentiirt, und durch ∂x dividirt werden.

8. Iſt die Gleichung vom dritten Grade ein Product aus einer vom zweyten Grade, nicht zerlegbaren, $ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0$, und der vom erſten Grade, $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, ſo wird der Quotient $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, was auch für Werthe x und y haben mögen. Man bezeichne die erſtere Gleichung durch V, die zweyte durch U, ſo iſt

$$\partial . VU = (2ay + bx + d)\,U\partial y + \beta V \partial y$$
$$+ (by + 2cx + e)\,U\partial x + \alpha V \partial x.$$

Hier iſt, da $V = 0$, und $U = 0$ iſt, der Factor von ∂y ſowohl als der von ∂x, wie man ihn aus der endlichen Gleichung unmittelbar erhält, jeder $= 0$. Zerlegt man aber die Differentialgleichung in zwey Gleichungen, ſo wird

$(2ay+bx+d)\partial y+(by+2cx+e)\partial x=0$, und $\beta\partial y+\alpha\partial x=0$. Die erſte iſt die Differentialgleichung für einen Kegelſchnitt, die zweyte für eine gerade Linie. Die endliche Gleichung gehört für das Syſtem eines Kegelſchnitts und einer geraden Linie.

9. Wären nicht allein die Factoren von Δy und Δx, ſondern auch von Δy^2, $\Delta y.\Delta x$ und Δx^2 Null, ſo bliebe von der endlichen Differenzengleichung nur der Theil

$$a\Delta y^3+b\Delta y^2.\Delta x+c\Delta x^2.\Delta y+d\Delta x^3=0$$

übrig. Dieſe Gleichung zeigt ein Syſtem von drey geraden Linien an, die ſich in drey verſchiedenen Puncten, in zweyen, und in einem einzigen ſchneiden können, ſo wie die Gleichung für $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ drey verſchiedene, oder zwey gleiche nebſt einer von ihnen verſchiedenen, oder drey gleich große Wurzeln haben kann.

Dieſelbe Gleichung wird erhalten, wenn der Zähler und Nenner des Werthes von $\frac{\partial y}{\partial x}$ zweymahl nach einander differentiirt werden, in Abſicht auf x und y allein, ohne höhere Differentiale aufzunehmen.

Eigenſchaften der Differentialgleichungen in Beziehung auf ihre Realität.

10. Es ſey V eine gleichartige Function von x und y, (eine ſolche, worin die Summe der Exponenten von x und y in allen Theilen dieſelbe iſt); die Anzahl ihrer Dimenſionen $=m$; ihr Differential $\partial V=P\partial x+Q\partial y$; ſo iſt $Px+Qy=mV$.

Beweis. Es ſey λ die Summe der Exponenten in jedem Theile des Zählers der Function, μ die Summe in jedem Theile des Nenners, (bey einer ganzen Function iſt $\mu=0$); alſo $\lambda-\mu=m$. Man ſetze $y=ux$, ſo enthält jeder Theil des Zählers die Potenz x^λ in eine Potenz

von u multiplicirt, ſo wie jeder Theil des Nenners die Potenz x^{μ} in eine Potenz von u, und V iſt ein Product aus x^m in eine Function von u. Dieſe Function ſey U, alſo $V = Ux^m$, und $\partial V = mUx^{m-1}\partial x + x^m\partial U$. Da $y = ux$, ſo iſt $\partial y = u\partial x + x\partial u$, alſo iſt $\partial V\,(= P\partial x + Q\partial y) = P\partial x + Qu\partial x + Qx\partial u$. Die Vergleichung beider Werthe von ∂V giebt $mUx^{m-1}\partial x = P\partial x + Qu\partial x$, indem dieſes die Theile ſind, welche von ∂x abhangen, dagegen $x^m\partial U$ und $Qx\partial u$ von ∂u abhängig ſind. Da $Ux^m = V$ iſt,

ſo iſt $\frac{mV}{x} = P + Qu$, und daher $mV = Px + Qy$.

Der Satz wird von Euler erfunden ſeyn, welcher davon ſchon in ſeiner ältern Mechanik (1736) Gebrauch macht, T. II. §§. 106. 497. 498.

11. Exempel. I. Es ſey $V = \frac{y^3 + x^3}{y - x}$, ſo iſt

$m = 2$, und $P = \frac{3x^2y - 2x^3 + y^3}{(y-x)^2}$; $Q = \frac{2y^3 - 3\;{}^2x - x^3}{(y-x)^2}$.

Daraus iſt $Px + Qy = \frac{2y^3 + 2x^3}{y - x} = 2V$.

Exempel. II. Es ſey $V = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}$, ſo iſt $m = -1$,

und $P = \frac{-x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$; $Q = \frac{-y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$. Daraus iſt

$Px + Qy = \frac{-1}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} = -V$.

Man bemerke noch, daß P und Q von $m-1$ Dimenſionen ſind, wenn V eine Function von m Dimenſionen iſt.

12. Es ſey V irgend eine Function von x und y, und $\partial V = P\partial x + Q\partial y$; ferner ſey $\partial P = p\partial x + q\partial y$,

und $\partial Q = r\partial x + s\partial y$, wo P, Q, p, q, r, s, jede eine Function von x und y, oder einer derſelben allein ſind, auch conſtante Größen ſeyn können: in allen Fällen iſt $q = r$.

Bew. Man ſetze in der Function V für x und y die veränderten $x + \Delta x$ und $y + \Delta y$, wodurch für V komme $V + \Delta V$. Zieht man jene Function von dieſer ab, ſo iſt die endliche Differenz $\Delta V = P\Delta x + Q\Delta y + R\Delta x\Delta y$, wo der erſte Theil die Differenz durch Δx allein, der zweyte die durch Δy allein, der dritte die durch beide gemeinſchaftlich entſtehende bezeichnet. Die Function P mag noch Δx und Potenzen dieſer Veränderung, Q noch Δy und Potenzen derſelben, R beides enthalten. Die partielle Differenz von P durch Δy ſey $R'\Delta y$, und die partielle Differenz von Q durch Δx ſey $R''\Delta x$. In der Differenzenrechnung (42.) iſt gezeigt, daß $R' = R''$ iſt, (das dortige p und q iſt hier R' und R''), oder jedes die hier zuerſt durch R bezeichnete Function.

Setzt man Differentiale ſtatt der endlichen Differenzen, ſo fallen die Potenzen und Producte der endlichen Differenzen weg; P und Q werden die Differentialfactoren; $R'\Delta y$ verwandelt ſich in das Differential von P nach y, oder R' wird die hier durch q bezeichnete Function; $R''\Delta x$ verwandelt ſich in das Differential von Q nach x, oder R'' wird die hier durch r bezeichnete Function. Da $R' = R''$, was auch die Quantität von Δx und Δy ſeyn mag, ſo iſt $q = r$.

13. Exempel. I. Es ſey $V = ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3 + ey^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + k = 0$, ſo iſt $P = by^2 + 2cxy + 3dx^2 + fy + 2gx + i$; und $Q = 3ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2ey + fx + h$. Das partielle Differential von P nach y durch ∂y dividirt iſt $q = 2by + 2cx + f$; und das von Q nach x durch ∂x dividirt iſt $r = 2by + 2cx + f$, ſo daß $q = r$.

Exempel. II. Es ſey $V = \sqrt{(x^2 + 2xy)}$, ſo iſt

$$P = \frac{x+y}{\sqrt{(x^2+2xy)}};\ Q = \frac{x}{\sqrt{(x^2+2xy)}};\ \text{ferner}$$

$$q = \frac{xy}{(x^2+2xy)^{\frac{3}{2}}};\ r = \frac{xy}{(x^2+2xy)^{\frac{3}{2}}}.$$

Exempel. III. Es ſeyn x und y zwey Kreisbogen, und $V = x \sin y + y \sin x$, ſo iſt $P = \sin y + y \cos x$; $Q = x \cos y + \sin x$; ferner $q = \cos y + \cos x$; $r = \cos y + \cos x$.

14. Der Satz (12.) wird folgendergeſtalt ſymboliſch ausgedruckt. Es zeigt $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)$ den partiellen Differentialquotienten für V in Rückſicht auf x allein an, ſo wie $\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)$ den partiellen Differentialquotienten für V in Rückſicht auf y allein. Demnach iſt $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = P$; $\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = Q$; $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = q$; $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = r$. Der obige Satz wird nun folgendergeſtalt ausgedruckt: Wenn $\partial V = P\partial x + Q\partial y$, ſo iſt $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$.

Auch iſt $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\partial x = P\partial x$, und $\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\partial y = Q\partial y$.

15. Der Satz iſt wichtig als Kennzeichen, ob eine Differentialgleichung, ſo, wie ſie vorgegeben wird, real und aus einer endlichen Gleichung entſtanden ſey. Hat ſie die Beſchaffenheit nicht, welche ſie zufolge des Satzes haben muß, ſo muß man einen Multiplicator ſuchen, durch den ſie diese Beſchaffenheit erhalte.

16. Iſt V eine Function dreyer veränderlichen, gegenſeitig unabhängigen Größen, x, y, z, und es iſt $\partial V =$

$P \partial x + Q \partial y + R \partial z$, ſo iſt $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$;

$\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)$; $\left(\frac{\partial Q}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)$. Denn

da angenommen iſt, daß die Größen x, y, z von einander unabhängig ſind, ſo kann jede von ihnen als unveränderlich angeſehen werden. So entſtehen drey Bedingungsgleichungen für die drey Paare von Functionen, P, Q; P, R; Q, R. Dieſe ſind Functionen von den drey Größen x, y, z, von welchen aber auch eine oder die andere in jenen fehlen kann. Einen andern, aber ſchwerern Beweis dieſer drey Bedingungsgleichungen giebt Clairaut in den Mem. de l'Acad. des Sciences, 1740. p. 305. ed. in 4.

17. Finden dieſe drey Bedingungen nicht Statt, ſo ſetze man, daß die Formel $P \partial x + Q \partial y + R \partial z$ durch die Multiplication mit einer Function M die drey Bedingungen erfülle, ſo daß

$$MP \partial x + MQ \partial y + MR \partial z$$

das Differential einer Function V der drey Größen x, y, z ſey. Nun iſt

$$\left(\frac{\partial . MP}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial . MQ}{\partial x}\right); \left(\frac{\partial . MP}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial . MR}{\partial x}\right);$$

$$\left(\frac{\partial . MQ}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial . MR}{\partial y}\right).$$

Die Entwickelung der Differentiale von den Producten MP, MQ, MR, giebt folgende drey Gleichungen:

$$\text{I. } M\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)+P\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)=M\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)+Q\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)$$

$$\text{II. } M\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)+P\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right)=M\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)+R\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)$$

$$\text{III. } M\left(\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+Q\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right)=M\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)+R\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

Die erſte dieſer Gleichungen multiplicire man mit R, die zweyte mit Q, die dritte mit P, und ziehe die zweyte von der Summe der erſten und dritten ab, ſo heben ſich die Glieder, welche ∂M enthalten, und es iſt, nach der Diviſion durch M,

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)+R\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

$$P\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)+R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right).$$

Findet dieſe Bedingungsgleichung nicht Statt, ſo kann ſelbſt durch die Multiplication mit einer Function M die Differentialformel $P\partial x + Q\partial y + R\partial z$ aus keiner Function von x, y, z entſtanden ſeyn.

18. Die Bedingungsgleichungen (12 u. 17.) hat Clairaut in ſeinem Mémoire ſur l'integration des équations différentielles du premier ordre, Mem. de l'Acad. des Sc. 1740 erwieſen, die erſtere ſchon in einer Abhandlung gleichen Inhalts im J. 1739. Er geſteht, daß außer ihm auch Fontaine und Euler die Bedingungsgleichung (12.) gefunden haben. Die Unterſuchungen von Fontaine über dieſen Gegenſtand ſind in den Memoiren der Akademie nicht erſchienen, ſondern nebſt andern, in die akademiſche Sammlung nicht eingerückten, deſſelben Verfaſſers, in einer eigenen 1764 herausgekom-

men. Fontäine ſcheint das Erſtigkeitsrecht vor Clairaut zu haben, der dagegen die Beweiſe und die Anwendungen einleuchtender und bequemer gemacht haben wird. Von jenem rührt auch die Notation der partiellen Differentialquotienten her, doch ohne die Klammern, die man in der Folge zur beſſern Unterſcheidung zugeſetzt hat. Euler hat den Satz in den Comment. Petrop. T. VII. a. a. 1734 et 1735, die erſt 1740 erſchienen ſind, angewandt, um Gleichungen für unendlich viele Curven derſelben Art, deren Gleichungen nicht algebraiſche ſind, zu finden.

Der Beweis der Bedingungsgleichung (17.) iſt von Clairaut. Euler hat in ſeiner Differentialrechnung einen andern, zwar weitläuftigern, gegeben, §. 313—316, der aber nicht die drey Gleichungen (16.) vorausſetzt. In dem Calc. integr. T. III. §. 1. und in einer Abhandlung über die Trajectorien, Nova Acta Petrop. T. I. a. a. 1783, gebraucht er denſelben Beweis wie Clairaut.

Von einer andern merkwürdigen Bedingungsgleichung in dem folgenden Artikel.

Variation einer Differentialgleichung durch Verwandlung einer unveränderlichen Größe in eine veränderliche.

19. Es iſt $\partial z = P \partial x$ eine Differentialgleichung, worin P eine Function der veränderlichen Größe x und einer unveränderlichen a iſt, und auch mehrere unveränderliche enthalten mag. Die Größe z ſey, wenn die Größen geometriſche ſind, die Coordinate zu x an einer Curve, oder der zu der Abſciſſe gehörige Bogen, Flächenraum, Inhalt des durch die Drehung um eine Axe beſchriebenen Körpers, oder deſſen Oberfläche. Dieſe Beſtimmungen werden der Unterſuchung, die hier angeſtellt werden ſoll, vieles Licht verſchaffen. Auch iſt man auf dieſelbe ganz durch geometriſche Aufgaben geleitet.

Nun werde a veränderlich geſetzt, ſo hat man eine unendliche Menge von Functionen einerley Art, die nur

durch die Größe a, (den Modulus oder den Parameter der Curve), verſchieden ſind, z. B. Ellipſen über einer gemeinſchaftlichen Axe mit verſchiedenen Parametern.

Wenn $P\partial x$ ſich integriren läßt, ſo hat die Sache keine Schwierigkeit, da man in dem Integral nur a veränderlich zu ſetzen braucht, um das Differential der Function z in der ſtetigen Folge ihrer Werthe für irgend ein angenommenes x zu erhalten.

Iſt aber $P\partial x$ nicht algebraiſch integrabel, ſo kann die Frage Schwierigkeit machen.

20. Es ſey nun, wenn a veränderlich genommen wird, $\partial z = P\partial x + Q\partial a$. Der erſte Terminus, $P\partial x$, zeigt das Differential von z an, ſo fern bloß x ſich ändert, der zweyte aber die Variation von z, oder die differentielle Veränderung zufolge der von a, wobey x denſelben Werth behält.

Es ſey $\partial P = p\partial x + q\partial a$, und $\partial Q = r\partial x + s\partial a$, ſo iſt, wenn z eine reale Function iſt, $q = r$, (12.), und $Q = \int r\partial x = \int q\partial x$, wenn $s = 0$ geſetzt wird. Dieſes muß geſchehen, damit Q ganz von P, oder von der Beſchaffenheit der Function z abhange, ohne willkührliche Beſtimmungen. (Euler betrachtet in der Abhandlung über unendlich viele Curven einerley Art, Comment. Petrop vet. T. VII. p. 178, für das Differential von Q den Modulus a als conſtant, daher $\partial a = 0$ iſt, ungeachtet a in dem Differential ∂P als veränderlich behandelt wird. Auch das Verfahren von Nic. Bernoulli in Joh. Bernoulli Opp. T. II. p. 443. iſt in dieſer Abſicht nicht befriedigend).

Nach der Bezeichnung (14.) iſt $Q = \int\left(\frac{\partial P}{\partial a}\right)\partial x$,

und das variirte Differential

$$\partial z = P\partial x + \partial a \int\left(\frac{\partial P}{\partial a}\right)\partial x.$$

21. Das erſte Beyſpiel dieſer Aufgabe giebt Leibnitz in dem Commerc. epiſt. T. I. ep. 59. wo die Auflöſung

aber auf andere Anſichten gegründet iſt. Man gedenke ſich eine ſtetige Folge logarithmiſcher Linien durch einen Punct, bey einer gemeinſchaftlichen Abſciſſe, gezogen; es ſoll die Curve gefunden werden, welche auf ihnen allen Bogen von einer gegebenen Länge, von jenem Puncte an abſchneidet. Die Gleichung für die logarithmiſche Linie iſt $\partial y = \frac{a \partial x}{x}$. Das Differential des Bogens z iſt $\partial z = \partial x \sqrt{\left(1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2}\right)} = \frac{\partial x \sqrt{(aa + xx)}}{x}$. Hier iſt $P = \frac{\sqrt{(aa+xx)}}{x}$, und $\left(\frac{\partial P}{\partial a}\right) = \frac{a}{x\sqrt{(aa+xx)}}$; alſo iſt die variirte Differentialgleichung,

$$\partial z = \frac{\partial x \sqrt{(aa+xx)}}{x} + a \partial a \int \frac{\partial x}{x\sqrt{(aa+xx)}}.$$

Der erſte Terminus iſt das Differential des Bogens auf derſelben krummen Linie, der zweyte iſt die verſchwindende Variation des Bogens durch die Variation des Modulus, bey unveränderter Abſciſſe. Die Integralgröße, $\int \frac{\partial x}{x\sqrt{(aa+xx)}}$, zeigt an, wie die Variation von der Beſchaffenheit der Curve abhängt, daher a in derſelben nicht veränderlich iſt; aber die Verbindung mit der Variation $a \partial a$ zeigt, wie jene ferner durch die Variation des Modulus beſtimmt wird.

Die Frage wegen der gleiche Bogen abſchneidenden Curve gehört in den Artikel, Trajectoria.

22. Ein anderes Beyſpiel gebe die Area einer Parabel. Ihre Gleichung iſt $yy = a^x$. Die Area ſey z, ſo iſt $\partial z = y \partial x = \partial x \sqrt{a^x}$. Mit der Variation iſt $\partial z = P \partial x + Q \partial a$, wo $P = \sqrt{ax}$. Nun iſt $\left(\frac{\partial P}{\partial a}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{a}}$, und $\int \left(\frac{\partial P}{\partial a}\right) \partial x = \frac{1}{3} x \sqrt{\frac{x}{a}}$, alſo

$$\partial z = \partial x \sqrt{ax} + \frac{1}{3} x \partial a \sqrt{\frac{x}{a}};$$

Eben dieſes findet man aus der endlichen Gleichung $yy = ax$, wenn ſowohl a als x veränderlich geſetzt werden.

23. Es ſey $\partial y = P\partial x$, und P eine Function von x, y, a, nebſt andern Conſtanten, die außer a vorhanden ſeyn mögen. Man ſetze, daß die variirte Gleichung ſey $\partial y = P\partial x + R\partial a$, ſo daß $P\partial x - \partial y + R\partial a = o$ ſey. Damit dieſe Gleichung real ſey, muß zufolge (17.) ſeyn,

$$-\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = P\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial P}{\partial a}\right),$$

oder

$$\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) + P\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) = R\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial P}{\partial a}\right),$$

indem das dortige Q hier $= -1$, alſo $\partial Q = o$ iſt. Für z daſelbſt ſteht hier a.

Nikol. Bernoulli (Bruderſohn von Jakob und Johann Bernoulli) hat dieſe Aufgabe ſchon aufgelöſet, aber auf einem andern Wege. Sein Verfahren ſteht in Joh. Bernoulli Opp. T. II. p. 443. Für das hieſige

$$y,\ x,\ P,\ R,\ \frac{\partial P}{\partial y},\ \frac{\partial P}{\partial a},$$

ſteht bey ihm

$$x,\ y,\ p,\ q,\ T,\ \ R$$

Er findet die Gleichung, $Tq\partial y + R\partial y = \partial q$. Es fehlt alſo der Terminus $P\left(\dfrac{\partial R}{\partial y}\right)$.

Euler hat ſich früh ſehr viel mit dieſer ganzen Unterſuchung beſchäftigt, wie ſeine Abhandlungen in den Comm. Petrop. vet. T. VII. VIII. IX. zeigen.

24. Das $\int P\partial x$, wo P eine Function von x und y iſt, in Abſicht auf y differentiiren, nennt man, unter dem Integralzeichen differentiiren. Dieſes

Differential iſt $= \partial y \int \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) \partial x$, nach (21.), wo a iſt, was hier durch y bezeichnet wird.

Differentio-Differentialrechnung iſt die Entwickelung der Differentiale des zweyten Grades, und höherer, nach ihren Verhältniſſen gegen einander, und zu den Potenzen derer vom erſten Grade. Ihr Gebrauch iſt wichtig in der höhern Geometrie, und in der reinen Mechanik, deren erſte Grundformeln Differentiale vom zweyten Grade enthalten. Sie werden in dem Taylorſchen Lehrſatze zur Berechnung der endlichen Differenzen einer Function aus den Potenzen der Differenz der Functionalgröße angewandt.

1. In dem Artikel, Differentiale, (S. 822.), ſind ſchon die Begriffe von den höhern Differentialen erklärt worden. Sie ſind ſo wenig als die des erſten Grades als Größen abſolut zu betrachten, ſondern bezeichnen, ohne Rückſicht auf beſtimmte Quantität, Glieder eines Verhältniſſes, welches im Allgemeinen endlich iſt, in einzelnen Fällen das von 1:0, oder das von 0:1 ſeyn kann, und, wenn es 0:0 wird, mehrdeutig iſt.

2. Es ſey zuerſt eine Relation zwiſchen zwey veränderlichen Größen, x und y, angenommen. Man ſetze $\frac{\partial y}{\partial x} = p$; $\frac{\partial p}{\partial x} = q$; $\frac{\partial q}{\partial x} = r$; $\frac{\partial r}{\partial s} = s$, u. ſ. f; ſo iſt eine Differentialgleichung vom erſten Grade zwiſchen x und y eine endliche zwiſchen x, y, p; eine vom zweyten Grade iſt eine endliche zwiſchen x, y, p, q; eine vom dritten Grade iſt eine endliche zwiſchen x, y, p, q, r; u. ſ. f.

3. So wie p der von der Quantität der Veränderungen unabhängige Theil des Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ iſt, ſo iſt es q in

Abſicht auf $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$; r in Abſicht auf $\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}$; s in Abſicht auf $\frac{\Delta^4 y}{\Delta x^4}$, u. ſ. f. wenn nämlich die durch x bezeichneten Größen eine Reihe mit gleich großen Unterſchieden ausmachen,

4. Darum iſt in dieſem Falle $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = q$; $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = r$; $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = s$; etc. Die Bezeichnungen der Differentialquotienten beziehen ſich auf eine ſtetiger Weiſe ſich verändernde Reihe. Man mag die eine oder die andere Bezeichnungsart gebrauchen. Die Differentialquotienten ſtellen oft die Relation der veränderlichen Größen und ihrer Veränderungen in einer ſtetigen Reihe am augenfälligſten dar.

5. Es ſey $y = x^m$, und x verändern ſich gleichförmig (oder ∂x ſey conſtant, oder $\partial^2 x = 0$), ſo iſt

$$\frac{\partial y}{\partial x} = m x^{m-1}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = m(m-1)x^{m-2}$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = m(m-1)(m-2)z^{m-3}$$

u. ſ. f.

Wenn m eine ganze Zahl iſt, ſo iſt der mte Differentialquotient conſtant.

6. Hieraus iſt

$$\frac{\partial^2 y}{\partial y^2} = \frac{m-1}{m} \cdot \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial y^3} = \frac{m-1 \,.\, m-2}{m^2} \cdot \frac{1}{y^2}$$

u. ſ. f.

7. Es ſey $z = xy$, und ∂x conſtant, ſo iſt

$$\partial z = y\partial x + x\partial y$$
$$\partial^2 z = 2\partial x\partial y + x\partial^2 y$$
$$\partial^3 z = 3\partial x\partial^2 y + x\partial^3 y$$
$$\partial^4 z = 4\partial x\partial^3 y + x\partial^4 y$$

u. ſ. f.

oder

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + px; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2p + qx;$$
$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 3q + rx; \quad \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = 4r + sx$$

u. ſ. f.

8. Es ſey $z = \frac{y}{x}$, und ∂x conſtant, ſo iſt

$$\partial z = \frac{\partial y}{x} - \frac{y\partial x}{xx}$$
$$\partial^2 z = \frac{\partial^2 y}{x} - \frac{2\partial x\partial y}{xx} + \frac{2y\partial x^2}{x^3}$$
$$\partial^3 z = \frac{\partial^3 y}{x} - \frac{3\partial x\partial^2 y}{x^2} + \frac{6\partial x^2\partial y}{x^3} - \frac{6y\partial x^3}{x^4}$$

u. ſ. f.

9. Es ſey $y = \sin\varphi$, und $z = \text{coſ}\,\varphi$, ſo iſt, wenn $\partial\varphi$ conſtant geſetzt wird,

$\partial y = \text{coſ}\,\varphi \,.\, \partial\varphi$	$\partial z = -\sin\varphi \,.\, \partial\varphi$
$\partial^2 y = -\sin\varphi \,.\, \partial\varphi^2$	$\partial^2 z = -\text{coſ}\,\varphi \,.\, \partial\varphi^2$
$\partial^3 y = -\text{coſ}\,\varphi \,.\, \partial\varphi^3$	$\partial^3 z = +\sin\varphi \,.\, \partial\varphi^3$
$\partial^4 y = +\sin\varphi \,.\, \partial\varphi^4$	$\partial^4 z = +\text{coſ}\,\varphi \,.\, \partial\varphi^4$
u. ſ. f.	u. ſ. f.

10. Es ſey $t = \text{tang}\,\varphi$, und $\partial\varphi$ unveränderlich, ſo iſt (Differentialformel, 31.)

$$\partial t = (1 + t^2)\,\partial\varphi$$
$$\partial^2 t = 2t\,(1 + t^2)\,\partial\varphi^2$$
$$\partial^3 t = 2\,(1 + 3t^2)\,(1 + t^2)\,\partial\varphi^3$$

u. ſ. f.

11. Es ſey $y = e^x$, und $z = e^{-x}$, wo e die Baſis der natürlichen Logarithmen, und x der Logarithme der Zahl y und der Zahl $\frac{1}{z}$ iſt. Es iſt, wenn ∂x conſtant geſetzt wird,

$\partial y = e^x \partial x$	$\partial z = -\, e^{-x} \partial x$
$\partial^2 y = e^x \partial x^2$	$\partial^2 z = +\, e^{-x} \partial x$
$\partial^3 y = e^x \partial x^3$	$\partial^2 z = -\, e^{-x} \partial x$
u. ſ. f.	u. ſ. f.

12. Es ſey $2ax - xx = yy$, ſo iſt $a\partial x - x\partial x = y\partial y$. Setzt man ſowohl ∂x als ∂y veränderlich, ſo iſt

$$a\partial^2 x - \partial x^2 - x\partial^2 x = \partial y^2 + y\partial^2 y,$$

oder

$$(a - x)\,\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} - y\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2}.$$

Der zweyte Theil dieſer Gleichung iſt, aus der Differentialgleichung vom erſten Grade,

$$= 1 + \left(\frac{a - x}{y}\right)^2 = \frac{a^2 - 2ax + x^2 + y^2}{y^2} = \frac{a^2}{y^2}.$$

Alſo iſt

$$(a - x)\,\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} - y\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{a^2}{y^2},$$

Dieſes iſt eine unbeſtimmte Gleichung für die Differentialquotienten des zweyten Grades, da die Art, wie ſich ∂x oder ∂y verändern ſollen, nicht feſtgeſetzt iſt. Soll

die Gleichung eine beſtimmte werden, ohne daß eines der Differentiale unveränderlich ſey, ſo muß irgend ein anderes Differential unveränderlich geſetzt werden. Man nehme dazu das $\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$. Dadurch iſt $\partial(\partial x^2 + \partial y^2) = 0$, alſo $\partial x \partial^2 x + \partial y \partial^2 y = 0$. Durch die Subſtitution des Werthes von $\partial^2 y$ oder $\partial^2 x$ aus dieſer Gleichung in der unbeſtimmt gelaſſenen wird nun dieſe eine beſtimmte.

$$\frac{a\partial^2 x}{\partial x^2} = \frac{aa - ax}{y^2}, \text{ oder } \frac{a\partial^2 x}{\partial y^2} = \frac{a}{a - x}.$$

Setzt man für $\partial^2 x$ ſeinen Werth durch $\partial^2 y$, ſo iſt

$$\frac{a\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{a}{y}, \text{ oder } \frac{a\partial^2 y}{\partial y^2} = -\frac{ay}{(a-x)^2}.$$

Die hier zum Beyſpiel genommene Gleichung iſt für einen Kreis, worin y der Sinus eines Bogens, x der Sinus verſus, a — x der Coſinus für den Halbmeſſer a iſt. Die Differentialformeln folgen auch aus denen für $\partial^2 y$ und $\partial^2 z$ in (9.), wenn a ſtatt der Einheit, und a — x für az geſetzt wird, durch Elimination von $\partial\varphi$.

13. Exempel. Da die Differentialverhältniſſe auch für endliche kleine Differenzen beynahe gelten, ſo ſuche man das Verhältniß der zweyten Unterſchiede dreyer Sinus zu dem Quadrate des Unterſchiedes des erſten und zweyten, oder des zweyten und dritten Coſinus, z. B. zu dem Winkel $\varphi = 30°$, mit einem Unterſchiede von 1 Gr, für die folgenden Winkel. Es iſt

	I. Unterſch.	II. Unterſch.
sin 30° = 0,5000000		
sin 31° = 0,5150381	150381	
sin 32° = 0,5299193	148812	— 1569
coſ 30° = 0,8660254		
coſ 31° = 0,8571673	— 88581	
coſ 32° = 0,8480481	— 91192	

Die Einheit für die Unterſchiede iſt, wie man von ſelbſt bemerken wird, ein Zehnmilliontheilchen. Sieht man $\partial^2 y$ und ∂z (oder ∂x) als endliche Größen an, ſo iſt hier $\partial^2 y = -0{,}0001569$, und $\partial x = 0{,}0088581$. nämlich als Differenz des Sinus verſus. Das Quadrat davon iſt $= 0{,}000078466$.. Jener zweyte Unterſchied mit $y = 0{,}5$ multiplicirt giebt zum Producte 0,00007845, welches von dem Quadrate erſt in der achten Stelle verſchieden iſt. Das Quadrat des Unterſchiedes von cos 31° und cos 32° weicht mehr ab.

14. Setzt man $y\,\partial x =$ conſt. oder läßt die Kreisabſchnitte über dem Sinus verſus gleichförmig wachſen, ſo iſt

$$\frac{a\,\partial^2 x}{\partial x^2} = -\frac{a^2 - a x}{y^2};$$

$$\frac{a\,\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{(2 a^3 - a y^2)}{y^3}.$$

15. Aus dem Beyſpiele für den Kreis in (12.) ſieht man deutlich, wie eine Differentialgleichung eine unbeſtimmte iſt, wenn kein Differential als unveränderlich angeſehen wird. Es erhellt ſchon hieraus, daß um eine Differentialgleichung zwiſchen x und y zu einer beſtimmten für jeden Werth von x und den dazu gehörigen von y zu machen, entweder eines der Differentiale ∂x, ∂y, oder das von irgend einer Function derſelben als conſtant angenommen werden müſſe. Dieſes erhellt allgemein aus dem, was in dem Artikel Differenzenrechnung (45.) von der Nothwendigkeit einer beſtändigen Differenz bemerkt worden iſt. Die Anfangsglieder der Differenzreihen zu einer Hauptreihe von Größen, die nach irgend einem Geſetze gebildet werden, erhalten keine beſtimmte Werthe, wenn jene Größen nicht einer arithmetiſchen Reihe von Stellen, Zahlen oder Repräſentanten der Stellen, zugeordnet werden.

16. Es ſey in einer Differentialgleichung zweyten Grades zwiſchen x und y das Differential einer derſelben

oder einer Function von ihnen unveränderlich geſetzt, man will ſtatt deſſelben aber ein anderes Differential als unveränderlich anſetzen, ſo hat man zu dem Ende folgendergeſtalt zu verfahren.

Man ſetze $p = \frac{\partial y}{\partial x}$; $q = \frac{\partial p}{\partial x}$, ohne weder ∂x noch ∂y unveränderlich anzunehmen, ſo iſt

$$q = \frac{\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x}{\partial x^3}.$$

Hiemit verbinde man die Differentialgleichung, welche aus der Annahme des beſtändigen Differentials entſpringt, ſo kann man die zweyten Differentiale wegſchaffen, und dafür q nebſt p einführen. In der verwandelten Gleichung ſetze man für q den Werth $\frac{\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x}{\partial x^3}$, ſo erhält man eine Gleichung, worin kein Differential conſtant iſt.

17 Fall. I. Es ſey ∂x conſtant genommen, ſo iſt bey dieſer Annahme, $q = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. Setzt man nun $q \partial x^2$ für $\partial^2 y$, und darauf $\partial^2 y - \frac{\partial y \partial^2 x}{\partial x}$ für $q \partial x^2$, ſo iſt dieſes eben ſo gut, als unmittelbar für $\partial^2 y$ ſetzen

$$\partial^2 y - \frac{\partial y \partial^2 x}{\partial x}.$$

18. Fall. II. Es ſey ∂y conſtant genommen, ſo hat man für $\partial^2 y$ zu ſetzen $\partial^2 x - \frac{\partial x \partial^2 y}{\partial y}$. Hier ſind nur für die Buchſtaben x und y in Fall I. geſetzt y und x.

19. Fall. III. Es ſey $y \partial x$ (das Differential der Area einer Curve bey rechtwinklichten Coordinaten) con-

ſtant geſetzt, ſo iſt $\partial y \partial x = - y \partial^2 x$, alſo iſt $q \partial x^3 = \partial x \partial^2 y + \frac{\partial y^2 \partial x}{y}$. Dafür iſt nun zu ſetzen $\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x$. Folglich iſt für $\partial^2 x$ zu ſetzen $- \frac{\partial y \partial x}{y}$. Ferner iſt eben daher, $\partial^2 y = q \partial x^2 - \frac{\partial y^2}{y}$, folglich iſt für $\partial^2 y$ zu ſetzen $\partial^2 y - \frac{\partial y \partial^2 x}{\partial x} - \frac{\partial y^2}{y}$.

20. Fall. IV, Es ſey das Differential $\sqrt{(\partial x^2 + \partial x^2)}$ oder das Differential eines Bogens, als unveränderlich angenommen. Dadurch iſt $\partial x \partial^2 x + \partial y \partial^2 y = 0$, alſo $q = - \frac{(\partial x^2 + \partial y^2) \partial^2 x}{\partial x^2 \partial y}$. Daher iſt für $\partial^2 x$ zu ſetzen $\frac{\partial y \partial^2 x - \partial x \partial y \partial^2 y}{\partial x^2 + \partial y^2}$. Auf gleiche Art wird gefunden, daß für $\partial^2 y$ zu ſetzen iſt $\frac{\partial x^2 \partial^2 y - \partial x \partial y \partial^2 x}{d x^2 + \partial y^2}$, worin nur x und y für y und x in jener Formel ſtehen.

21. Die Subſtitutionen für $\partial^3 x$ und $\partial^3 y$ in dieſem Falle giebt Euler in Calc. diff. P. I. Cap. 8. Die Rechnungsprobe iſt, daß, wenn mit der verwandelten Gleichung diejenige verbunden wird, welche das beſtändige Differential differentiirt giebt, die zuerſt gegebene wieder hervorgehen muß.

22. Die Differentialformeln zeigen zum Theil merkwürdige Fortſchreitungen, wenn kein Differential conſtant geſetzt wird.

23. Es ſey $z = xy$, ſo iſt

$$\partial z = y\partial x + x\partial y$$
$$\partial^2 z = y\partial^2 x + 2\partial x\partial y + x\partial^2 y$$
$$\partial^3 z = y\partial^3 x + 3\partial^2 x\partial y + 3\partial x\partial^2 y + x\partial^3 y$$
$$\partial^4 z = y\partial^4 x + 4\partial^3 x\partial y + 6\partial^2 x\partial^2 y + 4\partial x\partial^3 y + x\partial^4 y$$

Man ſieht gleich, daß die numeriſchen Coefficienten die Binomialcoefficienten nach der Folge der Potenzen ſind. Dieſes allgemein einzuſehen, ſetze man die Binomialcoefficienten in der nten Potenz 1, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, ... $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$, 1, und nehme an, daß

$$\partial^n z = y\partial^n x + \mathfrak{A}\partial^{n-1}x\partial y + \mathfrak{B}\partial^{n-2}x\partial^2 y + \mathfrak{C}\partial^{n-3}x\partial^3 y + \mathfrak{D}\partial^{n-4}x\partial^4 y \;\ldots\; + \mathfrak{B}\partial^2 x\partial^{n-2}y + \mathfrak{A}\partial x\partial^{n-1}y + x\partial^n y,$$

ſo iſt

$$\partial^{n+1}z = y\partial^{n+1}x + (1+\mathfrak{A})\partial^n x\partial y + (\mathfrak{A}+\mathfrak{B})\partial^{n-1}x\partial^2 y + (\mathfrak{B}+\mathfrak{C})\partial^{n-2}x\partial^3 y + (\mathfrak{C}+\mathfrak{D})\partial^{n-3}x\partial^4 y \;\ldots\; + (\mathfrak{B}+\mathfrak{A})\partial^2 x\partial^{n-1}y + (\mathfrak{A}+1)\partial x\partial^n y + x\partial^{n+1}y.$$

Es ſind aber 1; $1+\mathfrak{A}$; $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$; $\mathfrak{B}+\mathfrak{C}$; ...... $\mathfrak{B}+\mathfrak{A}$; $\mathfrak{A}+1$; 1, die Binomial-Coefficienten in der $(n+1)$ten Potenz. Gilt alſo die Form des Differentials mit den numeriſchen Coefficienten für irgend eine Ordnung, ſo gilt ſie auch für die nächſt höhere, und daher für alle folgende. Sie gilt aber für die erſten vier Ordnungen, alſo auch für die fünfte, ſechste und alle folgenden.

Leibnitz hat dieſes Geſetz für die ſucceſſiven vollſtändigen Differentiale von xy bemerkt, ſ. Commerc. epiſt. Leibn. et Bernoullii, T. I. p. 46.

24. Man ſetze für x^n das Differential ∂x veränderlich, ſo iſt, $y = x^n$ geſetzt, wenn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc. die Bedeutung in (23.) behalten,

$$\partial y = \mathfrak{A} x^{n-1} \partial x$$

$$\partial^2 y = \mathfrak{A} x^{n-1} \partial^2 x + \mathfrak{B} x^{n-2} . 2 \partial x^2$$

$$\partial^3 y = \mathfrak{A} x^{n-1} \partial^3 x + \mathfrak{B} x^{n-2}\, 6 \partial x \partial^2 + \mathfrak{C} x^{n-3}\, 6 \partial x^3$$

$$\partial^4 y = \mathfrak{A} x^{n-1} \partial^4 x + \mathfrak{B} x^{n-2} (8 \partial x . \partial^3 x + 6 (\partial^2 x)^2)$$
$$+ \mathfrak{C} x^{n-3}\, 36 \partial x^2 . \partial^2 x + \mathfrak{D} x^{n-4} . 24 \partial x^4$$

$$\partial^5 y = \mathfrak{A} x^{n-1} \partial^5 x + \mathfrak{B} x^{n-2} (10 \partial x . \partial^4 x + 20 \partial^2 x . \partial^3 x)$$
$$+ \mathfrak{C} x^{n-3} (60 \partial x^2 . \partial^2 x + 90 \partial x . (\partial^2 x)^2)$$
$$+ \mathfrak{D} x^{n-4} . 240 \partial x^3 . \partial^2 x + \mathfrak{E} x^{n-5} . 120 \partial x^5$$

u. ſ. f.

25. Die Formen dieſer Differentiale ſind den Coeffi-cienten der nten Potenz des Polynomium, $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 +$ etc. ähnlich, nur die numeriſchen Coeffitienten ſind verſchieden.

Man nehme aber die Reihe,

$$\mathfrak{x} = a + bx + \frac{c}{1.2} x^2 + \frac{d}{1.2.3} x^3 + \frac{e}{1..4} x^4 + \text{etc.}$$

und ſetze

$$\mathfrak{x}^n = A + \frac{B}{1} x + \frac{C}{1.2} x^2 + \frac{D}{1.2.3} x^3 + \frac{E}{1.2.3.4} x^4 + \text{etc.}$$

ſo iſt (combinat. Analyſis, S. 492),

$$A = a^n$$
$$B = \mathfrak{A} a^{n-1} b$$
$$C = \mathfrak{A} a^{n-1} c + \mathfrak{B} a^{n-2} . 2 b^2$$
$$D = \mathfrak{A} a^{n-1} d + \mathfrak{B} a^{n-2} . 6 bc + \mathfrak{C} a^{n-3} . 6 b^3$$
$$E = \mathfrak{A} a^{n-1} e + \mathfrak{B} a^{n-2} (8 bd + 6 c^2)$$
$$+ \mathfrak{C} a^{n-3} . 36 b^2 c + \mathfrak{D} a^{n-4} . 24 b^4$$
$$F = \mathfrak{A} a^{n-1} f + \mathfrak{B} a^{n-2} (10 be + 20 cd)$$
$$+ \mathfrak{C} a^{n-3} (60 b^2 d + 90 bc^2)$$
$$+ \mathfrak{D} a^{n-4} . 240 b^3 c + \mathfrak{E} a^{n-5} . 120 b^5.$$

etc.

Hier iſt die Formation ganz dieſelbe mit der für die ſucceſſiven Differentiale gefundenen.

Da dieſe nach einem beſtimmten Geſetze gebildet werden, und die Polynomial-Coefficienten ebenfalls, und da die Form hier bis zu dem fünften Differential einerley iſt mit der Form der Coefficienten des Polynomium, ſo iſt die Induction hinlänglich, um den Satz aufzuſtellen, daß ſie auch für höhere Differentiale und die folgenden Coefficienten dieſelbe bleibe.

25. In den Polynomial-Coefficienten werden a, b, c, d, e, etc. ſo wie A, B, C, D, E, etc. jedes mit dem nachfolgenden vertauſcht, um die Coefficienten folgweiſe aus einander herzuleiten. Eben dies geſchieht in den Differentialformeln mit x, ∂x, $\partial^2 x$, $\partial^3 x$, etc. und mit y, ∂y, $\partial^2 y$, $\partial^3 y$ etc. Da die erſten Formeln beiderley Art zuſammen ſtimmen, ſo geſchieht dies auch mit allen folgenden.

Die hier bemerkte Derivation iſt der in dem Artikel, combinatoriſche Analyſis (46.), angegebenen ähnlich.

27. Setzt man $a = x$; $b = \partial x$; $c = \partial^2 x$; $d = \partial^3 x$; etc. und nimmt die Scale der Coefficienten in der Reihe p,

$$\left(x,\ \frac{\partial z}{1},\ \frac{\partial^2 z}{1\cdot 2},\ \frac{\partial^3 z}{1\cdot 2\cdot 3},\ \text{etc.}\right)$$

ſo iſt, nach der combinatoriſchen Bezeichnungsart,

$$\partial^m x^n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m p^n \,{}^{x}(m+1).$$

Eine andere Methode, die höhern Differentiale von x^n zu finden, gebraucht Pfaff in der Hindenburgiſchen Sammlung c. a. Abhandlungen, II. nr. V. Man vergleiche etwa auch noch meine Bemerkungen über den polynomiſchen Lehrſatz in dem erſten Bande, S. 80 ff.

Bedingungsgleichung der Realität einer jeden Differentialgleichung zwiſchen zwey veränderlichen Größen.

28. Es ſeyn zwey veränderliche Größen, x, y; und $\partial y = p\,\partial x$; $\partial p = q\,\partial x$; $\partial q = r\,\partial x$; $\partial r = s\,\partial x$; etc. Eine Function der Größen x, y, p, q, r, s, etc. ſey V, und das gegebene Differential dieſer Function

$$\partial V = M\partial x + N\partial y + P\partial p + Q\partial q + R\partial r + S\partial s + \text{etc.}$$

Iſt hieraus

$$N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 S}{\partial x^4} - \text{etc.} = 0,$$

wobey das Differential ∂x unveränderlich genommen wird, ſo iſt die Differentialformel $V \partial x$ integrirbar, was auch die Relation zwiſchen x und y ſeyn mag.

29. Euler trägt dieſen Satz in dem Calculo variationum, der dem dritten Theile ſeines Werks über die Integralrechnung beygefügt iſt, vor, §. 92. Er hat den Satz aus der Lehre von den Variationen hergeleitet, und ſagt, daß ein directer Weg ihn zu erweiſen (das iſt, aus unmittelbaren Gründen der Differentialrechnung), ſchwer zu finden ſeyn möchte. Lexell hat in den Novis Comm. Petrop. T. XV. in der Abhandlung de criteriis integrabilitatis formularum differentialium einen verwickelten Beweis vorgetragen, den er in einer folgenden Abhandlung T. XVI. noch abändert, weil er ihm noch nicht Genüge that. Der Verfaſſer der Anzeige dieſer Abhandlungen in denſelben Commentarien verſichert, daß Euler wenigſtens 16 Jahre vor der Ausgabe ſeiner Integralrechnung den Satz gefunden gehabt hätte. Er habe ihn einem Mathematiker in Frankreich mitgetheilt, und dadurch habe der Marquis de Condorcet vermuthlich Kenntniß davon erhalten, und ſey veranlaßt worden, einen Beweis zu ſuchen, den er der Pariſer Akademie im J. 1764 vorgelegt hat, worauf er ferner in ſeiner Schrift über die Integralrechnung die Lehre von den Kennzeichen der Integrabilität ausführlich vorgetragen hat. Nachher haben Couſin und la Croix in ihren Lehrbüchern über die Differential- und Integralrechnung Beweiſe des Satzes gegeben, jener in dem erſten Bande §. 240; dieſer in dem 1. Cap. §. 86.

30. Ein leichtes Beyſpiel iſt folgendes. Es ſey

$$V \partial x = \left(\frac{p}{y} - \frac{x p p}{y y} + \frac{x q}{y} \right) \partial x;$$

Dieſe Formel iſt integrabel, da ſie aus der, $\int V \partial x = \frac{xp}{y}$ hergeleitet iſt. Setzt man nun $\partial V = M \partial x + N \partial y + P \partial p + Q \partial q$, ſo iſt

$$M = -\frac{pp}{yy} + \frac{q}{y};\quad N = \frac{-p}{yy} + \frac{2xpp}{y^3} - \frac{xq}{yy};$$

$$P = \frac{1}{y} - \frac{2xp}{yy};\quad Q = \frac{x}{y}.$$

Hieraus $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{-3p}{yy} + \frac{4xpp}{y^3} - \frac{2xq}{yy}$,

$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{y} - \frac{xp}{yy}$,

ferner $\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \frac{-2p}{yy} + \frac{2xpp}{y^3} - \frac{xq}{yy}$.

Folglich $\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \frac{-p}{yy} + \frac{2xpp}{y^3} - \frac{xq}{yy}$, welcher Werth dem von N gleich iſt.

Dignität einer Zahl bedeutet ein Product von gleichen Factoren. In deutſchen Schriften iſt Potenz gewöhnlicher.

Dimenſionen, ſ. Abmeſſung.

Dimenſionszeichen ſind Bezeichnungen der Coefficienten in einer Reihe und den Potenzen derſelben, welche E. G. Fiſcher in ſeiner Schrift: Theorie der Dimenſionszeichen, Halle, 1792, gebraucht, um bey den Subſtitutionen dieſer Potenzen in einer andern Reihe das Geſetz der dadurch entſtehenden Coefficienten in dieſer leicht anſchaulich zu machen, und insbeſondere dadurch zu einer allgemeinen Auflöſung algebraiſcher Gleichungen, und Umkehrungsmethode der Reihen zu gelangen.

Die Coefficienten in einer Reihe bekommen alle daſſelbe Symbol, aber mit Ziffern oder allgemeinen Zahlzei-

chen darüber, um die Stelle zu bezeichnen. Die Symbole ſind theils die römiſchen Zahlzeichen, theils Buchſtaben. Z. B.

$$y = \overset{1}{I}x + \overset{2}{I}x^2 + \overset{3}{I}x^3 + \overset{4}{I}x^4 + \text{etc.}$$

$$y^2 = \overset{2}{II}x^2 + \overset{3}{II}x^3 + \overset{4}{II}x^4 + \overset{5}{II}x^5 + \text{etc.}$$

$$y^3 = \overset{3}{III}x^3 + \overset{4}{III}x^4 + \overset{5}{III}x^5 + \overset{6}{III}x^6 + \text{etc.}$$

u. ſ. f.

Hier zeigt das Symbol II ein Product von zwey einfachen Coefficienten der erſten Reihe, III ein Product von dreyen an, u. ſ. f. Daher die Benennung, Dimenſionszeichen. Die Zahl darüber, in ihre ganzen Theile aufgelöſet, zeigt an, aus welchen Coefficienten in der Reihe y der Coefficient zuſammengeſetzt wird, z. B. $\overset{5}{II}$ aus dem 1ſten und 4ten; dem 2ten und 3ten, oder $\overset{6}{III}$ aus denen in den Stellen 1, 1, 4; 1, 2, 3; 2, 2, 2. Dazu müſſen dann noch die Verſetzungszahlen beygefügt werden. Man ſieht, daß die Dimenſionszeichen mehr in ſich enthalten, als die Benennung anzeigt: ſie ſind Reihen-, Local- und Combinations-Zeichen, bey welchen man noch die Verſetzungszahl zu den Beſtandtheilen der zuſammengeſetzten Größe nicht vergeſſen muß.

Oft bekommt das erſte Glied einer Reihe kein Dimenſionszeichen, ſondern erſt das zweyte nebſt der folgenden. Die Reihe von dem zweyten an ſey

$$y = \overset{2}{\mathfrak{A}}x^m + \overset{3}{\mathfrak{A}}x^{m+r} + \overset{4}{\mathfrak{A}}x^{m+2r} + \text{etc.}$$

ſo ſind die Coefficienten in y^2 folgende:

$\overset{4}{\mathfrak{B}}$; $\overset{5}{\mathfrak{B}}$, $\overset{6}{\mathfrak{B}}$, etc. in y^3 ſind ſie $\overset{6}{\mathfrak{C}}$, $\overset{7}{\mathfrak{C}}$, $\overset{8}{\mathfrak{C}}$; etc.

in y^4 ſind ſie $\overset{8}{\mathfrak{D}}$, $\overset{9}{\mathfrak{D}}$, $\overset{10}{\mathfrak{D}}$, etc.

Hier ſind dieſe Symbole ebenfalls Reihen= Local= und Combinations= Zeichen zugleich mit Einſchluß der Verſetzungszahl zu jedem Beſtandtheile.

Dieſe, zwar nicht ganz neue Bezeichnungsart, oder eine ähnliche, iſt ſehr dienlich, die Fundamental=Einrichtung einer zuſammengeſetzten Reihe deutlich und einfach darzuſtellen, gleichſam das Skelett einer Reihe zu zeigen. Ohne die Combinationstheorie aber möchte das Verfahren bey der Entwickelung noch dunkel bleiben. Da Fiſcher dieſe nicht mit in ſeinen Vortrag gehörig aufnahm, ſo ſind ihm weitläufige Hülfstafeln nöthig geworden. Übrigens iſt ſein Werk den Liebhabern der feinern Analyſis zur Übung in der Behandlung der Reihen und Gleichungen ſehr zu empfehlen. Es iſt mit Fleiß, Genauigkeit und vieler Kenntniß ausgearbeitet, welches deſto rühmlicher iſt, da das Amt des Verfaſſers, als Lehrers der lateiniſchen Sprache an einer gelehrten Schule in Berlin, ihm nur erlaubte, Nebenſtunden der Mathematik zu widmen.

Diminutus numerus, eben das, was deficiens numerus, ſ. oben S. 719.

Diophanteiſche Analyſis, Aufgaben, ſ. unbeſtimmte Analytik.

Diorismus, ſ. oben S. 88.

Directrix, oder linea dirigens, iſt diejenige gerade Linie, längs welcher die Bewegung einer andern geraden Linie oder einer Ebene geſchieht, bey der Beſchreibung einer ebenen Figur oder eines Körpers. So entſteht ein Parallelogramm, indem die eine Seite längs der andern, der dirigirenden, ſich parallel bleibend fortgeſchoben wird, oder ein Prisma durch die Bewegung längs der einen Seitenlinie. Die Baſis der Conchoide, von welcher aus die gegebene gerade Linie auf einer, um einen feſten Punct ſich drehenden, geraden Linie genommen wird, heißt auch linea directrix Conchoidis.

In der Lehre von den Kegelſchnitten heißt die gerade Linie durch den Scheitelpunct des Kegels, in einer Ebene ſenkrecht auf die Ebene des Scheitels, parallel mit dieſer Ebene, die Directrix plani Sectionis. (Hauſenii elementa, p. 200.). Man nennt aber auch ſo die Durchſchnittslinie einer, der Ebene des Schnittes parallelen, Ebene mit der Ebene der Grundfläche des Kegels. (Couſin calc. diff. et int. pag. 8.).

Unter mehrern Arten, wie die Kegelſchnitte gezeichnet werden können, ſind auch ſolche, wobey eine gerade Linie oder der Schenkel eines Winkels auf einer der Lage nach gegebenen Linie, der Directrix, verſchoben wird. S. Kegelſchnitte.

Diſcerptions-Problem, ſ. Zerlegung der Zahlen.

Diſcontinuum, was nicht nach dem Geſetz der Stetigkeit verbunden iſt. So unterſcheidet man die krummen Linien in curvas continuas et diſcontinuas ſ. mixtas. Jene werden in allen ihren Theilen durch eine und dieſelbe Function der Abſciſſe x beſtimmt; dieſe aber beſtehen aus Theilen verſchiedener ſtetigen Curven, ſo daß, wenn ein Theil nach einer Function der Abſciſſe gezogen iſt, der folgende nach einer andern Function beſtimmt wird. Dergleichen ſind Ovalen, die aus Kreisbogen zu verſchiedenen Halbmeſſern zuſammengeſetzt werden.

Was functio discontinua iſt, ſ. Art. Function.

Diſcretum, was getrennt iſt. I. Diſcreta (disjuncta) proportio, worin die beiden mittlern Glieder einander nicht gleich ſind, wie in $3:5=6:10$, dagegen $3:5=5:8\frac{1}{3}$ eine proportio continua iſt. II. Discreta quantitas, eine Größe, die aus abgeſonderten Theilen beſteht, wie jede Zahl, eine Anzahl Kugeln u. dgl. III. Discreta ſeries, eine Reihe, deren zunächſt auf ein ander folgende Glieder endliche Unterſchiede haben.

Diſtanzpunct, ſ. Perſpectiv.

Divergirend. 1) Gerade Linien, die ſich in einem Puncte ſchneiden, ſind nach der, dieſem Puncte entgegengeſetzten Seite hin divergirend, oder aus einander fahrend. 2) Eine Reihe iſt divergirend, wenn die Summe ihrer auf einander folgenden Glieder, von dem Anfangsgliede an genommen, ſich immer mehr von dem Werthe der Function, die ſie der Form nach richtig darſtellt, entfernt, je mehr Glieder zuſammen genommen werden. 3) Eine divergirende Hyperbel nennt Newton eine Linie der dritten Ordnung, deren Schenkel ſich die convexe Seite zukehren, und entgegengeſetzte Richtung ihres Zuges haben, wie an den Curven dieſer Art mit drey Aſymptoten, von welchen zwey einander parallel ſind. Enum. lin. tertii ordinis Fig. 66. 67. 68. 4) Eine divergirende Parabel hat zwey Schenkel, deren Richtungen immer größere Winkel mit einander machen, je weiter ſie ſich erſtrecken. Solche ſind die glockenförmigen, a. a. O. Fig. 74. 75. 78. 79; und mit zwey ſich ſchneidenden Schenkeln, Fig. 77, und mit einer Spitze, Fig. 80. Die Schenkel der apolloniſchen Parabel nähern ſich immer mehr der parallelen Lage.

Dividendus; Dividiren, ſ. Diviſion.

Diviſion, Theilung, iſt ein arithmetiſches Verfahren, wodurch man denjenigen Theil einer gegebenen Zahl A findet, welcher darin eben ſo vielmahl enthalten iſt, als die Einheit in einer andern gegebenen Zahl B. Die zu theilende Zahl A heißt der Dividendus, die Zahl B der Diviſor, der geſuchte Theil der Quotient.

Der Dividendus enthält alſo den Quotienten ſo vielmahl als der Diviſor die Einheit. Der Quotient giebt die Größe des Theils an, der Diviſor die Anzahl der Theile. Iſt der Diviſor eine ganze Zahl, ſo wird der Dividendus in lauter gleiche Theile getheilt, und der Quotient iſt einer der gleichen Theile. Iſt der Diviſor eine ganze Zahl mit einen anhängenden Bruche, z. B. $12\frac{3}{4}$, ſo muß man ſich den Dividendus gleichfalls in 12 gleich

große Theile, nebſt einem Theile, der $\frac{3}{5}$ eines dieſer Theile iſt, eingetheilt vorſtellen, und der Quotient iſt einer der 12 gleichen Theile. Iſt der Diviſor ein eigentlicher Bruch, z. B. $\frac{3}{5}$; ſo enthält der Dividendus in dieſem Falle von 5 Theilen des Quotienten nur 3, und auf ähnliche Art in ähnlichen Fällen.

Das Product aus dem Quotienten (der Größe des Theils) in den Diviſor (die Menge der Theile) giebt den Dividendus. Daher kann man die Beziehungen verwechſeln, und den Diviſor auch als die Größe des Theils, und den Quotienten als die Anzahl der Theile in dem Dividendus betrachten. Dieſe zweyfache Beziehung iſt wichtig bey der Diviſion einer benannten Zahl. Wenn 36 Thlr. in 9 gleiche Theile zu theilen ſind, ſo iſt der Diviſor die Anzahl der Theile, und der Quotient 4 Thlr. Die Größe des Theils, von einerley Art mit dem Dividendus. Fragt man aber, wie oft 9 Thlr. in 36 Thlrn. enthalten ſind, ſo zeigt der Diviſor die Größe des Theils an, und der Quotient 4 die Anzahl der gleichen Theile. Der Quotient bekommt bey der Antwort oder in dem Facit den Zuſatz, mahl.

Bey der Erfindung des Quotienten ſieht man den Diviſor als die Größe des Theils an, und den Quotienten als die Anzahl der gleichen Theile. Denn man zieht den Diviſor von dem Dividendus ſo oft ab, bis dieſer erſchöpft iſt, und, wenn dieſes nicht der Fall iſt, verwandelt man den nicht mehr theilbaren Reſt in eine Anzahl kleinerer Theile, und nimmt von dem Diviſor ebenfalls einen gewiſſen Theil. In dem beygefügten Schema iſt ABCD der Dividendus, AB der Diviſor.

A * * * * * C
* * * * *
B * * * * * D

Setzt man dieſen ſo oft hin, bis die Menge der Einer in ABCD erſchöpft iſt, ſo iſt AC der Quotient, ſo groß als die Anzahl der gleichen in ABCD enthaltenen AB. Aber AC iſt nun auch die Größe des Theils, der in ABCD ſo vielmahl enthalten iſt, als die Einheit in dem Diviſor AB.

Da es faſt immer ſehr beſchwerlich ſeyn würde, den Quotienten durch wiederholtes Abziehen des Diviſors zu finden, ſo muß die Arithmetik zeigen, wie dieſes bequemer und möglichſt leicht geſchehen könne.

Man theile alſo den Dividendus in mehrere Partialdividenden, deren jeder ein Vielfaches des Diviſors ſey, doch nicht über das Neunfache, ſo fern ſie als Einer ohne Rückſicht auf ihren dekadiſchen Werth betrachtet werden. Die Einheiten dieſer Partialdividenden nehmen dekadiſch ab. Wenn der letzte, der die Einer enthält, kein Vielfaches des Diviſors iſt, ſo wird der Überſchuß in kleinere Theile aufgelöſet. Die Partialquotienten ſind jeder gleichnamig mit dem Dividendus, woraus ſie entſtehen, ſo daß in dieſer Rückſicht der Quotient die Größe des Theils angiebt. Den erſten findet man, wenn man in dem Dividendus von der linken Hand an ſo viele Ziffern nimmt, daß dieſe als eine Anzahl von Einern betrachtet, größer als der Diviſor, aber kleiner als ſein Zehnfaches ſind. Man ſucht nun die größte Zahl des Vielfachen vom Diviſor, welches hierin als in einer Anzahl von Einern ſteckt, zieht dieſes Vielfache ab, und fügt zu dem Reſte, als Zehner betrachtet, die nächſtfolgende Ziffer des Quotienten als Einer. Mit dieſem zweyten Partialdividendus verfährt man wie mit dem erſten, u. ſ. f. bis man zum letzten Dividendus bloße Einer erhält.

Exempel. Die Zahl 3296517582 zu dividiren durch 4358.

Diviſor	
4358	756429, Quotient
	3296517582, Dividendus
30506	24591
21790	28017
26148	18695
17432	12638
8716	39222
39222	0 Reſt.

Der erſte Partialdividendus iſt 32965 hunderttauſend, weil 3296 Millionen keine Millionen zum Quotienten geben. Da der dekadiſche Werth des erſten Partialquotienten, hunderttauſend, beſtimmt iſt, ſo hat man nun noch nur den Zahlwerth deſſelben zu ſuchen, wozu man die 32965 als bloße Einer anzuſehen hat. Das Product aus dieſem Zahlwerthe 7 in den Diviſor, nämlich 30506, iſt zur Seite geſetzt, und von 32965 abgezogen. So auch die übrigen Partialproducte. Dieſes Verfahren erſpart Raum. Den Quotienten ſetzt man am bequemſten und deutlichſten über den Dividendus, ſo daß die Ziffern von gleichem dekadiſchen Werthe über einander zu ſtehen kommen.

Ein geübter Rechner kann ſich die Hinſetzung der Producte erſparen, und jedes Partialproduct dieſer Producte ſogleich von dem Dividendus abziehen. Das obige Exempel bekommt ſonach dieſe Geſtalt:

Diviſor	756429 Quotient
4358	3296517582 Dividendus
	245919320
	2806620
	18290
	130
	0

Die Partialdividenden laufen mit einem Theile ſchräg hinauf: der lezte ganz und gar. Die erſte Art erfordert weniger Anſtrengung, und gewährt eine leichte Reviſion, erlaubt auch das Ausſtreichen eines zu groß oder klein genommenen Products.

Man hat noch eine Art, wo die Reſte jedes Partialdividendus überhalb des ganzen Dividendus geſetzt werden, wie in folgendem Beyſpiele, wo 582758 durch 463 getheilt ſind, und 304 zum Reſte bleiben.

```
               4 3
             2 7 0 0
Diviſor  |  1 1 9 1 0 4  |  Quotient
  463    |  5 8 2 7 5 8  |  1258
            4 6 3 6 5 4
              9 2 1 0
               2 3 7
                 3
```

Allein dieſe Art zu dividiren kann leicht einen Irrthum veranlaſſen, und geſtattet keine Reviſion. Man nennt ſie das *über ſich Dividiren*, wie die zuerſt gewieſene das *unter ſich Dividiren*. Die alten Rechenmeiſter pflegten bey dem Dividiren über ſich allerhand künſtliche Figuren, durch dazu ausgeſonnene Exempel, hervor zu bringen.

Die Rechnung wird bey einem öftrer vorkommenden Diviſor ſehr erleichtert durch eine Tafel der Vielfachen des Diviſors bis zum Neunfachen, dergleichen man durch Hülfe der Neperiſchen Stäbe leicht erhält.

Wo ein Reſt bleibt, nachdem das Product aus den Einern des Quotienten in den Diviſor abgezogen iſt, wird dieſer Reſt, durch den Diviſor dividirt, in Form eines Bruchs dem Quotienten beygefügt, als in dem zweyten Beyſpiele der Bruch $\frac{304}{463}$; oder man ſezt die Diviſion für die Zehntheile und folgende Decimaltheile fort. S. Decimalbruch.

In der dodekadiſchen Arithmetik verfahre man nach Art des erſten Exempels.

Diviſor	3 . 0 . 5 . 8 . 11 9 Quot.
2 . 6 . 3 . 2	7 . 7 . 11 . 11 . 11 . 6 . 11 . 2 . 6 Divid.
7 . 6 . 9 . 6	1 . 2 . 5 . 11 . 6
1 . 0 . 7 . 3 . 10	1 . 10 . 7 . 8 . 11
1 . 8 . 2 . 1 . 4	2 . 5 . 7 . 7 . 2
2 . 3 . 8 . 10 . 10	1 . 10 . 8 . 4 . 6
1 . 10 . 8 . 4 . 6	1 . 10 . 8 . 4 . 6
	0 Reſt.

Wenn man ſich bey dieſer Form der Zahlen die Vielfachen des Diviſors bis zum Eilffachen, und zur Probe bis zum Zwölffachen verfertigt, ſo hat die Diviſion nach dieſer Form keine Schwierigkeit. Der Quotient iſt etwas kürzer.

Diviſion mit Brüchen, ſ. Bruchrechnung und Decimalrechnung.

Diviſion mit allgemeinen Größen, oder algebraiſche, ſ. Buchſtabenrechnung.

Diviſio rationis, Theilung (Trennung) eines Verhältniſſes, A:B, iſt die Vergleichung des Überſchuſſes von A über B mit B. Wenn A : B = C : D iſt, ſo iſt getheilt, A — B : B = C — D : D. Aus der Proportion 12 : 5 = 60 : 25 folgt 7 : 5 = 35 : 25. Der Kunſtausdruck kommt aus der Geometrie der Griechen. Euklides nennt dieſe Umwandlung Διαιρεσις λογου. Man muß ſie nicht mit einer andern Theilung, oder beſſer Zerlegung eines Verhältniſſes verwechſeln, die darin beſteht, daß man zwiſchen zwey Größen eine oder mehrere ſtetige Proportionale einſchiebt.

Dodecaedron, ſ. Körper, reguläre.

Dodecagonum, ſ. Vieleck, reguläre.

Dodekadik, dodekadiſches Zahlenſyſtem, dodekadiſche Form der Zahlen, iſt die Vertheilung der Zahlen in Claſſen von zwölffach ſteigenden Einheiten, deren jede Claſſe zwölf enthält, ſo daß zwölf Einheiten einer Claſſe eine Einheit der nächſthöhern Claſſe ausmachen. Es fehlt den Sprachen aber an Benennungen zu dem Gebrauche dieſes Zahlenſyſtems, das ſonſt dem dekadiſchen vorzuziehen ſeyn möchte, daher man es für Maaßſtäbe häufig gebraucht, ſ. Duodecimal=Maaß. Wir müßten in jeder Claſſe zwey neue Wörter haben. Auch ſind zwey neue Zeichen nöthig, um die Zehn und Eilf in jeder Claſſe zu bezeichnen. Inzwiſchen kann man dieſe durch unſere Zahlzeichen erſetzen, wenn man die Einheiten jeder Claſſe durch Puncte von einander abſondert, z. B.

8 . 4 . 11 . 5 . 10 . 7

ſind 7 Einer; 10 Zwölfer; 5 Zwölfer von Zwölfern, oder fünf 12^2, eilf 12^3; vier 12^4; acht 12^5, da die Einheiten jeder Claſſe Potenzen von 12 ſind, wie in dem dekadiſchen Syſtem von 10.

Man kann eine dodekadiſche Zahl leicht in die dekadiſche überſetzen, wenn man eine Tafel der Vielfachen der Potenzen von 12 bis zum Zwölffachen zur Hand hat. Eine ſolche Tafel für die vier erſten Potenzen folgt hier.

V.	III.	II.	I.	o.
20736	1728	144	12	1
41472	3456	288	24	2
62208	5184	432	36	3
82944	6912	576	48	4
103680	8640	720	60	5
124416	10368	864	72	6
145152	12096	1008	84	7
165888	13824	1152	96	8
186624	15552	1296	108	9
207360	17280	1440	120	10
228096	19008	1584	132	11
248832	20736	1728	144	12

So iſt die dodekadiſche Zahl

4 . 11 . 5 . 10 . 7

gleich der dekadiſchen 102799.

Hat man keine hinlänglich große Tafel der Vielfachen von den Potenzen der 12 zur Hand, ſo multiplicire man die höchſte Ziffer mit 12, addire dazu die folgende (10 und 11 als eine einzelne Ziffer betrachtet); die Summe multiplicire man ebenfalls mit 12 und addire die dritte Ziffer; u. ſ. f. bis zu Ende. In dem Exempel ſind die Producte nach der Reihe; 48, 708; 8556; 102792; und die letzte Summe 102799, die geſuchte dekadiſche Zahl.

Eine dekadiſche Zahl wird in eine dodekadiſche verwandelt, wenn man ſie durch 12 fortgeſetzt dividirt, und die Reſte nach der Reihe von der rechten nach der linken Hand hin ſtellt.

Diviſor	Dividenden	Reſte
12	102799	7
	8566	10
	713	5
	59	11
	4	4

Der erſte Quotient giebt die Zwölfer, der zweyte die 12.12; der dritte die 12 . 12 . 12, u. ſ. f. Die Reſte ſind den Dividenden gleichnamig.

Auf dieſelbe Art kann man auch eine dodekadiſche Zahl in eine dekadiſche verwandeln. Die dodekadiſche ſey 4 . 11 . 5 . 10 . 7. Dieſe iſt ſucceſſiv durch 10 zu dividiren, wobey die Reſte den dekadiſchen Werth von den Einern an hinaufwärts geben.

Diviſor	Dividenden	Reſte
10	4 . 11 . 5 . 10 . 7	9
	5 . 11 . 4 . 7	9
	7 . 1 . 7	7
	8 . 6	2
	10	0
	1	1

Der dekadiſche Werth der gegebenen dodekadiſchen Zahl iſt 102799.

Die Dodekadik hat darin einen Vorzug vor der Dekadik, daß die Duodecimalbrüche (ſolche, deren Nenner bloß Potenzen von 12 ſind) öfterer vollſtändig geliefert werden, als Decimalbrüche. Dieſe letztern brechen nur alsdann ab, oder laſſen ſich vollſtändig darſtellen, wenn der Nenner des Bruchs, der in Decimaltheilen ausgedruckt wird, blos 2 und 5 als Factoren enthält, vorausge-

ſetzt, daß der Bruch auf die kleinſte Benennung gebracht ſey. Duodecimalbrüche brechen ab, wenn der Nenner bloß 2 und 3 zu Factoren hat. Es giebt von 1 bis zu irgend einer Zahl N mehr Zahlen, die 3, als ſolche, die 5 zum Factor haben.

Darum kann man aber nicht das dekadiſche Syſtem abſchaffen, und das dodekadiſche einführen, wie es Werneburg in ſeiner Begeiſterung will, der es jedem redlichen Manne, ſelbſt jeder gebildeten vernünftigen Regierung zur Pflicht macht, das dodekadiſche Syſtem zu verbreiten und geſetzlich zu machen. Er hat dazu eigene neue Wörter und Ziffern angegeben, und ein ſtarkes Rechenbuch, nach der von ihm ungrammatiſch ſogenannten Teliosadik (dem allein vollkommenen unter allen Zahlen-Syſtemen) ausgearbeitet, wovon der erſte Theil im J. 1060 (dodekadiſch) erſchienen iſt.

Dodekagonalzahl, ſ. Polygonalzahl.

Doppelbruch, ſ. Bruch. S. 362.

Doppelpunct iſt ein Punct einer Curve, worin ſich zwey Zweige derſelben ſchneiden, oder auch eine Spitze bilden. In jenem Falle hat die Subtangente, daher auch $\frac{\partial y}{\partial x}$, zwey Werthe, ſo daß für dieſen Quotienten eine quadratiſche Gleichung gefunden wird. In dem andern Falle wird $\frac{\partial y}{\partial x}$ auch durch eine quadratiſche Gleichung, aber mit zwey gleichen Wurzeln gefunden. S. berührende Linie, und krumme Linie.

Doppeltgerade ganze Zahl iſt, die ſich zweymahl durch 2 theilen läßt, oder ein Vielfaches von 4.

Doppelverhältniß, ſ. duplicirtes Verhältniß.

Dragma iſt in der alten Algebra die gegebene Größe in einer Gleichung. (Käſtners Geſchichte der Mathem.

I. S. 70.). Chriſtoff Rudolff benennt in ſeiner Coß die Einheit in einer geometriſchen Progreſſion durch Dragme. Das nächſte Glied nach derſelben nennt er Radix, die folgenden Zenſus, Cubus, Zenſdezens, u. ſ. f.

Dreyeck iſt eine von drey Linien eingeſchloſſene Figur. Dieſe Umfangslinien heißen die Seiten des Dreyecks. Sie bilden an ihren Durchſchnittspuncten drey Winkel, daher die lateiniſche Benennung, triangulum, und die griechiſche, trigonum (τριγωνον). Der Urheber des deutſchen Ausdrucks hat die zuſammenſtoßenden Seiten von außen her angeſehen. Die Fläche eines Dreyecks iſt entweder eben oder gekrümmt. Die ebenen Dreyecke ſind geradlinicht, krummlinicht, gemiſchtlinicht, nach Beſchaffenheit der Seiten. Dreyecke, deren Fläche gekrümmt iſt, werden nur auf der Kugel, und etwa noch auf einem Sphäroid betrachtet. Auf der Kugel ſind die Seiten Bogen größter Kreiſe. Es müßte ausdrücklich erinnert werden, wenn ein Bogen eines kleinern Kreiſes eine Seite abgeben ſollte.

In dieſem Artikel iſt nur von geradlinichten Dreyecken die Rede. Von den Kugeldreyecken handelt der Artikel, Kugeldreyeck. Die Berechnung beider Gattungen lehrt der Artikel, Trigonometrie.

1. Ein Dreyeck, deſſen Seiten alle gleich groß ſind, heißt ein gleichſeitiges (triangulum aequilaterum, iſopleuron).

Sind zwey Seiten einander gleich, ſo heißt es ein gleichſchenklichtes (aequicrurum, iſoſceles). Die dritte Seite heißt die Grundlinie (baſis).

Ein ungleichſeitiges Dreyeck (ſcalenum, griechiſch) hat drey unter ſich ungleiche Seiten.

2. Ein Dreyeck, worin ein Winkel ein Rechter iſt, heißt ein rechtwinklichtes (tr. rectangulum, orthogonium), jedes andere ein ſchiefwinklichtes (obliquangulum). Sind alle drey Winkel ſpitz, ſo iſt

das Dreyeck ſpitzwinklicht (acutangulum, oxygonium); iſt ein Winkel ſtumpf, ſo iſt es ein ſtumpfwinklichtes (obtuſangulum, amblygonium).

Die beiden Seiten eines rechtwinklichten Dreyecks, welche den rechten Winkel einſchließen, heißen Katheten; die gegenüber ſtehende Seite heißt die Hypotenuſe.

3. Ein geradlinichtes Dreyeck ſtellt zugleich ein Syſtem von drey ſich gegenſeitig ſchneidenden geraden Linien dar, wenn die Seiten deſſelben unbeſtimmt verlängert werden. Der äußere Winkel, welchen eine verlängerte Seite mit der anliegenden Seite des Dreyecks macht, iſt gleich der Summe der beiden innern entgegengeſetzten Winkel. Daher iſt die Summe der drey innern Winkel zwey Rechten gleich. — In dem gleichſeitigen Dreyeck ſind alle drey Winkel gleich groß; in dem gleichſchenklichten ſind die Winkel an der Grundlinie ſich gleich; in dem ungleichſeitigen ſind alle Winkel ungleich. — Der größern Seite ſteht der größere Winkel gegen über, der kleinern Seite der kleinere Winkel, und umgekehrt.

4. Ein Dreyeck wird vollkommen beſtimmt, 1) durch zwey Seiten mit dem eingeſchloſſenen Winkel; 2) durch zwey Winkel und eine Seite; 3) durch alle drey Seiten. — Rechtwinklichte Dreyecke ſind ganz beſtimmt durch zwey Seiten; ſchiefwinklichte können mit zwey Seiten und einem von ihnen nicht eingeſchloſſenen Winkel auf zweyerley Art verzeichnet werden. Das eine iſt ſpitzwinklicht, das andere ſtumpfwinklicht.

5. Dreyecke, welche die genannten Beſtimmungen gemein haben, ſind congruent, oder decken ſich. Die Winkel, welche in ihnen denſelben Seiten gegen über liegen, ſind ſich gleich; ſo auch die Seiten, welche denſelben Winkeln gegen über ſtehen.

6 Dreyecke, wie ABC, abc (Fig. 116, Tab. VIII.) ſind ähnlich, erſtlich, wenn die Winkel des einen den

Winkeln des andern gleich ſind, A = a; B = b; C = c. Zweytens, wenn A = a, und AB : AC = ab : ac iſt. Drittens, wenn die Seiten einerley Verhältniſſe haben, nämlich, wenn AB : AC = ab : ac, und AB : BC = ab : bc, oder AC : BC = ac : bc iſt. In allen drey Fällen liegen die übereinſtimmenden Winkel denjenigen Seiten gegenüber, welche gleichnamige Glieder der Proportionen ſind, und umgekehrt ſind diejenigen Seiten gleichnamige Glieder der Proportionen, welche den übereinſtimmenden Winkeln gegen über ſtehen.

In dem erſten Falle iſt AB : AC = ab : ac und AB : BC = ab : bc; auch AC : BC = ac : bc. In dem zweyten iſt B = b; C = c, woraus dann die beiden übrigen Proportionen folgen. In dem dritten Falle iſt A = a; B = b; C = c.

7. Rechtwinklichte Dreyecke ſind ähnlich, wenn zwey Seiten in dem einen ſich verhalten wie zwey Seiten in dem andern, es ſey, daß beide den rechten Winkel einſchließen, oder daß beide einen der ſpitzen enthalten.

8. In dem Dreyeck ABC (Fig. 117.) ſey DE parallel mit BC, ſo iſt AB : AC = AD : AE, und AD : BD = AE : EC. Auch AB : BC = AD : DE; und AC : BC = AE : DE. Die Dreyecke ABC, ADE ſind ſich ähnlich.

9. In dem Dreyeck ABC (Fig. 118.) ſey der Winkel BAC durch die Linie AD halbirt, welche BC in D ſchneidet, ſo iſt AB : AC = BD : CD. Denn man ziehe DE parallel mit AC, ſo iſt der W. EDA = DAC = DAE, alſo DE = AE. Wegen der ähnlichen Dreyecke ABC, BDE iſt AB : AC = BE : ED = BE : AE = BD : DC, aus (8.).

10. Die Seite AB des Dreyecks ABC (Fig. 119.) werde nach AE hin verlängert, und der äußere Winkel CAE werde durch die Linie AD halbirt, welche die verlängerte BC in D ſchneidet; es iſt AB : AC = BD : CD.

Denn man ziehe DE parallel mit AC, ſo iſt W. CAD = ADE, alſo auch W. EAD = ADE, und daher AE = DE. Ferner iſt AB : AC = BE : ED = BE : AE = BD : CD.

11. In dem bey A rechtwinklichten Dreyeck BAC (Fig. 120.) ſey AD ſenkrecht auf BC gezogen; es iſt

BD : AB = AB : BC

BD : AD = AD : DC

BC : AC = AC : DC.

12. In dem Dreyeck ABC (Fig. 121.) ſey AD ſo gezogen, daß der W. DAC = B iſt. Dadurch ſind die Dreyecke ABC, DAC ähnlich, und es iſt BC : AC = AC : CD. Mit AC ziehe man eine Parallele EF, welche AD in E, AB in F ſchneide, ſo iſt das Dreyeck AEF ähnlich dem ABD, und es iſt AB : AD = AE : AF.

Die Linien BD, EF ſind antiparallele.

13. In dem Dreyeck ABC (Fig. 122.) ſind die Seiten in D, E, F halbirt, und durch dieſe Mitten ſenkrechte gezogen; dieſe ſchneiden ſich alle drey in demſelben Puncte O.

Denn man ziehe durch den Punct O, in welchem ſich zwey Perpendikel, DO, EO, ſchneiden, die Linien AO, BO, CO, ſo iſt AO = BO, und BO = OC, aus (5.), alſo AO = OC. Man ziehe OF, ſo ſind die Dreyecke AFO, CFO einander gleich, alſo OF ſenkrecht auf AC; daher geht das in F errichtete Perpendikel durch den Durchſchnittspunct der beiden übrigen Perpendikularen.

Der Punct O iſt der Mittelpunct eines um das Dreyeck beſchriebenen Kreiſes.

14. In dem Dreyeck ABC (Fig. 123.) ſind aus den Winkelpuncten die ſenkrechten AP, BQ, CR auf die gegenüber ſtehenden Seiten gezogen; dieſe ſchneiden ſich in einem einzigen Puncte O.

Die beiden ſenkrechten BQ, CR ſchneiden ſich in O; durch A und O ziehe man an BC die Linie AP. Wegen der rechten Winkel BQC, BRC liegen die Puncte Q, R in dem Halbkreiſe über dem Durchmeſſer BC; und auch in dem Kreiſe, der über AO als Durchmeſſer beſchrieben iſt. In dem erſtern iſt der W. BCR = BQR, weil ſie auf demſelben Bogen BR ſtehen; in dem andern Kreiſe iſt der W. BQR = BAO; alſo iſt W. BCR = BAO. Da BAO + AOR = R, ſo iſt auch BCR + COP = R, alſo iſt OPC ein Rechter.

15. In dem Dreyeck ABC (Fig. 124.) werden die Winkel durch die Linien AO, BO, CO halbirt. Dieſe ſchneiden ſich in demſelben Puncte O.

Denn man ziehe durch den Durchſchnitt zweyer, BO, CO, die ſenkrechten OP, OQ, OR, ſo ſind dieſe ſenkrechten ſich gleich. Daher iſt $\triangle$AOQ = AOR, folglich der W. OAQ = OAR.

Der Punct O iſt der Mittelpunct des in das Dreyeck eingeſchriebenen Kreiſes.

16. In dem Dreyeck ABC (Fig. 125.) werden die Seiten durch die aus den Winkelpuncten gezogenen Linien AP, BQ, CR, halbirt; dieſe ſchneiden ſich in demſelben Puncte O.

Denn man ziehe durch einen der halbirenden Puncte Q die parallele QN mit der CR, bis an AB, ſo iſt AN : RN = AQ : QC, (8.), alſo AN = RN, und daher BN : BR = 3 : 2. Folglich iſt auch BQ : BO = 3 : 2. Man ziehe QR, ſo iſt dieſe, wegen der gleichen Verhältniſſe AQ : AC und AR : AB, der BC parallel. Alſo iſt BO : OQ = CO : OR und BQ : BO = CR : CO. Die halbirenden Linien ſchneiden ſich alſo ſo, daß der Abſtand des Durchſchnitts auf jeder von dem Winkelpuncte zwey Drittheile der ganzen Linie beträgt. Da

nun BQ von AO ſo geſchnitten wird, ſo muß AO verlängert die Seite BC halbiren.

Der Punct O iſt der Schwerpunct des Dreyecks.

17. Über die Lage dieſer vier merkwürdigen Puncte in einem Dreyeck hat Euler eine algebraiſche Unterſuchung angeſtellt. Solutio facilis problematum quorundam geometricorum, Novi Comm. Petrop. T. XI a. a. 1765. Er erweiſet, daß der Mittelpunct des umgeſchriebenen Kreiſes, der Durchſchnitt der Perpendikel von den Winkelpuncten auf die Seiten, und der Schwerpunct allemahl in gerader Linie liegen, und zwar ſo, daß der letztere immer zwiſchen jenen beiden liegt, von dem zweyten zweymahl ſo weit entfernt als von dem erſten.

18. In einem rechtwinklichten Dreyeck iſt das Quadrat von der Hypotenuſe ſo groß als die Summe der Quadrate von den Katheten. Hievon in dem Artikel, pythagoriſcher Lehrſatz.

19. In dem ſpitzwinklichten Dreyeck ABC (Fig. 126.) ſey CD ſenkrecht auf AB; es iſt

$$BC^2 + 2AB \times AD = AB^2 + AC^2.$$

Denn es iſt $AB^2 = AD^2 + 2AD \times BD + BD^2$, und $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2AD \times BD + BD^2 + CD^2 = BC^2 + 2AB \times AD$.

20. In dem bey A ſtumpfwinklichten Dreyeck ABC (Fig. 127.) iſt CD auf die verlängerte BA ſenkrecht gezogen; es iſt $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AB \times AD$.

Denn $BD^2 = AB^2 + 2AB \times AD + AD^2$ alſo $BC^2 = AB^2 + 2AB \times AD + AD^2 + CD^2 = AB^2 + AC^2 + 2AB \times AD$.

21. In beiden Fällen iſt $BC^2 - AC^2 = BD^2 - AD^2$. Wäre in dem ſpitzwinklichten Dreyeck BC kleiner als AC, ſo iſt $AC^2 - BC^2 = AD^2 - BD^2$.

22. Dadurch iſt $(BC + AC)(BC - AC) = (BD + AD)(BD - AD)$, oder in dem ſpitzwinklichten Dreyeck, $AB : BC + AC = BC - AC : BD - AD$;

und in dem ſtumpfwinklichten, $AB : BC + AC = BC - AC : BD + AD$.

Die Verwandlung des Unterſchiedes zweyer Quadrate in ein Rechteck mag hier aus arithmetiſchen Gründen (Buchſtabenrechn. 18.) angenommen werden. Man kann es aber leicht nach Euklideiſcher Art erweiſen.

23. Die Seite AB, auf welche, oder auf deren Verlängerung das Perpendikel von C gelaſſen iſt, werde in E halbirt; es iſt $2\,AB : BC + AC = BC - AC : DE$.

Denn in dem ſpitzwinklichten Dreyeck (Fig. 126.) iſt $BD - AD = AE + DE - AD = 2\,DE$, ſo daß dieſe Proportion die in (22.) gefundene iſt. In dem ſtumpfwinklichten (Fig. 127.) iſt $BD + AD = AE + ED + AD = 2\,ED$, alſo iſt die zweyte Proportion ebenfalls die hier aufgeſtellte.

Dieſe Proportion wird in den Elementen angewandt, aus den Seiten eines Dreyecks die Winkel zu finden. Der Unterſchied zwiſchen AE und DE iſt AD, und $AC : AD = 1 : \cos A$.

24. In eben dieſen Dreyecken ziehe man von C nach der Mitte E von AB die Linie CE; es iſt $AC^2 + BC^2 = 2\,AE^2 + 2\,EC^2$.

Denn das ſpitzwinklichte (Fig. 126.) zerfällt in das ſpitzwinklichte ACE, und das ſtumpfwinklichte BCE. In jenem iſt $AC^2 + 2\,AE \times DE = AE^2 + CE^2$, (19.), in dieſem iſt $BC^2 = BE^2 + CE^2 + 2\,BE \times DE$ (20.). Beide Gleichungen zuſammengenommen, geben die aufgeſtellte.

Das ſtumpfwinklichte Dreyeck ABC (Fig. 127.) zerfällt in zwey ſtumpfwinklichte ACE, BCE, für deren erſteres aber der Satz in (19), nämlich $AC^2 + 2\,AE \times DE = AE^2 + EC^2$ gilt, weil der von AE, CE eingeſchloſſene Winkel E ſpitz iſt.

25. In dem Dreyeck ABC (Fig. 128.) ſey der Winkel A durch die Linie AD halbirt; es iſt $AB \times AC = AD^2 + DB \times DC$.

Man fälle von C die ſenkrechte CE auf AD, wenn nämlich der an der Seite des ſpitzen Winkels ADC liegende Winkel des Dreyecks durch C bezeichnet wird. Man nehme $EF = ED$, und ziehe CF, ſo iſt W. $AFC = ADB$, und $\triangle ACF$ ähnlich dem $\triangle ABD$; alſo iſt

$$BD : AD = FC : AF = DC : AF,$$

und $AB : AD = AC : AF$.

Ferner iſt aus (20.), $AC^2 = AF^2 + FC^2 + 2 AF \times FE = DC^2 + AF (AF + FD) = DC^2 + AF \times AD$.

Aus der erſten der angezeigten Proportionen, oder aus $BD : DC = AD : AF$ wird erhalten $BD \times DC : DC^2 = AD^2 : AF \times AD$; hieraus $BD \times DC + AD^2 : DC^2 + AF \times AD = AD^2 : AF \times AD = AD : AF$; das iſt $BD \times DC + AD^2 : AC^2 = AD : AF$. Die zweyte Proportion, oder die, $AB : AC = AD : AF$, giebt $AB \times AC : AC^2 = AD : AF$.
Folglich iſt $AB \times AC = AD^2 + BD \times DC$.

26. In dem Dreyeck ABC (Fig. 129.) ſey AD ſenkrecht auf BC, und AE willkührlich gezogen. Aus (22.) iſt

$$\text{I. } BC : AC + AB = AC - AB : CD - BD;$$
$$\text{II. } BE : AE + AB = AE - AB : ED - BD;$$
$$\text{III. } EC : AC + AE = AC - AE : CD + ED.$$

Wenn BD größer als CD oder als ED iſt, ſo werden die Unterſchiede entgegengeſetzt genommen. Das vierte Glied dieſer Proportionen bezeichne man in I. durch a; in II. durch b; in III. durch c, ſo iſt

$$a - b = EC;\quad c - a = BE;\quad c - b = BC.$$

Behandelt man dieſe Proportionen arithmetiſch, ſo iſt

$$\text{I. } \frac{AC^2 - AB^2}{BC} - \frac{AE^2 - AB^2}{BE} = EC,$$

$$\text{II. } \frac{AC^2 - AE^2}{EC} - \frac{AC^2 - AB}{BC} = BE,$$

$$\text{III. } \frac{AC^2 - AE^2}{EC} - \frac{AE^2 - AB^2}{BE} = BC,$$

und daraus

$$BE\,(AC^2 - AB^2) - BC\,(AE^2 - AB^2) =$$
$$BC\,(AC^2 - AE^2) - EC\,(AC^2 - AB^2) =$$
$$BE\,(AC^2 - AE^2) - EC\,(AE^2 - AB^2)$$

27. In dem gleichſchenklichten Dreyeck ABC (Fig. 130.) ſey willkührlich AE bis an die Grundlinie BC gezogen; es iſt $AB^2 = AE^2 + CE \times BE$.

Denn man ziehe die ſenkrechte AD, ſo iſt $AE^2 = AD^2 + DE^2$, und $AD^2 + BD^2 = AB^2$, daraus $AE^2 + BD^2 - DE^2 = AB^2$, oder $AE^2 + (BD + DE)(BD - DE) = AB^2$, welches die Ausſage des Satzes enthält.

Inhalt der Dreyecke.

28. Dreyecke, die über derſelben Grundlinie gleiche Höhe haben, ſind gleich groß — Bey einerley Höhe verhalten ſie ſich wie die Grundlinien, bey einerley Grundlinie wie die Höhen. — Das Verhältniß ungleicher Dreyecke wird zuſammengeſetzt aus den Verhältniſſen der Grundlinien und der Höhen. Dieſes Verhältniß arithmetiſch auszudrucken, werden Grundlinien und Höhen durch eine willkührliche lineariſche Einheit ausgedruckt, und ſo iſt das Verhältniß der Dreyecke gleich dem Verhältniſſe der Producte aus den Grundlinien in die Höhen. Z. B. die Grundlinien ſeyn 12 und 20; die Höhen 9 und 7, ſo verhalten ſich die Dreyecke wie 108 : 140.

29. Verhalten ſich die Grundlinien umgekehrt wie die Höhen, ſo ſind die Dreyecke gleich groß, z. B. wenn die Grundlinien 12 und 20, die Höhen 15 und 9 ſind.

30. Dreyecke, welche in einem ihrer Winkel übereinkommen, und in welchen die Seiten an dieſem Winkel wiederkehrend proportional ſind, ſind gleich groß.

Es ſeyn (Fig. 131.) in den Dreyecken BAC, DAE die Winkel bey A gleich groß, ſo daß, wenn AB, AE in eine gerade Linie fallen, auch AC, AD eine gerade ausmachen, und es ſey dabey $AC : AD = AE : AB$. Man ziehe BD, ſo iſt $\triangle BAC : \triangle BAD = AC : AD$; und $\triangle DAE : \triangle BAD = AE : AB$; daher iſt $\triangle BAC : \triangle BAD = \triangle DAE : \triangle BAD$. Da das zweyte Glied der Verhältniſſe daſſelbe iſt, ſo iſt $\triangle BAC = \triangle DAE$.

31. Ähnliche Dreyecke verhalten ſich wie die Quadrate der gleichnamigen Seiten. Verhalten ſich dieſe z. B. wie 1 : 2 : 3 : 4, etc. ſo verhalten ſich die Flächenräume der Dreyecke wie 1 : 4 : 9 : 16 : etc.

32. Ein Dreyeck iſt die Hälfte eines Parallelogramms, das dieſelbe Grundlinie und Höhe wie jenes hat.

33. Wenn Grundlinie und Höhe durch eine lineariſche Einheit arithmetiſch ausgedruckt werden, ſo giebt das halbe Product beider die Zahl an, wie vielmahl das Dreyeck das Quadrat enthalte, deſſen Seite jene lineariſche Einheit iſt. Z. B. Die Grundlinie ſey 7, (Zoll, Fuß) die Höhe $4\frac{3}{5}$, ſo iſt der Inhalt des Dreyecks $16\frac{1}{10}$ Quadraten (Qu. Zollen oder Qu. Fußen) gleich. Die Grundlinie ſey $\frac{3}{4}$, die Höhe $\frac{2}{5}$, ſo iſt das Dreyeck $\frac{3}{25}$ des Quadrats, welches zur Einheit oder zum Maaße dient.

34. Die drey Seiten eines Dreyecks ABC (Fig. 126. 127.) werden folgendergeſtalt bezeichnet, $BC = a$; $AC = b$; $AB = c$; die gegenüberliegenden Winkel durch A; B, C; es iſt der Inhalt des Dreyecks $= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}$, oder, wenn

$a + b + c = s$ iſt, und das Dreyeck durch T bezeichnet wird, $T = \sqrt{\frac{1}{2}s(\frac{1}{2}s - a)(\frac{1}{2}s - b)(\frac{1}{2}s - c)}$.

Man halbire AB in E, und ziehe CD ſenkrecht auf dieſelbe, ſo iſt $DE = \frac{a^2 - b^2}{2c}$ (23.), und $BD = \frac{1}{2}c + \frac{a^2 - b^2}{2c} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c}$. Man ſetze $DE = d$, und $CD = p$, ſo iſt $p^2 = a^2 - (\frac{1}{2}c + d)^2 = (a + \frac{1}{2}c + d)(a - \frac{1}{2}c - d)$. Nun iſt $a + \frac{1}{2}c + d = \frac{a^2 + 2ac + c^2 - b^2}{2c} = \frac{(a + c)^2 - b^2}{2c} = \frac{(a + c + b)(a + c - b)}{2c}$. Ferner iſt $a - \frac{1}{2}c - d = a - \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c} = \frac{b^2 - a^2 + 2ac - c^2}{2c} = \frac{b^2 - (a - c)^2}{2c} = \frac{(b + a - c)(b - a + c)}{2c}$. Folglich iſt

$$p^2 = \frac{(a + c + b)(a + c - b)(b + a - c)(b - a + c)}{4cc}$$

Der Inhalt des Dreyecks arithmetiſch ausgedruckt iſt $\frac{1}{2}pc$. So erhellt die Ausſage des Satzes.

35. Der Satz iſt hier arithmetiſch ausgedruckt, und durch allgemeine Rechnung erwieſen. Wollte man denſelben nach geometriſcher Art ausdrucken, ſo würde er folgendergeſtalt lauten: Das Verhältniß des Quadrats von der Summe aller Seiten eines Dreyecks zu der Fläche deſſelben wird zuſammengeſetzt aus den ſubduplicirten Verhältniſſen von 2 : 1, und von der Summe zu dem Unterſchiede der halben Summe und jeder einzelnen Seite. — Das ſubduplicirte Verhältniß zweyer Größen m : p iſt nämlich das von m zu der mittlern proportionalen n zwiſchen beiden, wenn m : n = n : p iſt.

36. Der Satz iſt zu Berechnungen ſehr brauchbar, da Winkel und Perpendikel dadurch entbehrlich gemacht werden, auch keine genaue Zeichnung nöthig iſt. Er kommt zuerſt in der Geodäſie (praktiſchen Geometrie) des jüngern Hero vor, der im achten Jahrhundert oder ſpäter gelebt hat. Montúcla führt den Satz daraus an, (Hiſtoire des Mathem. nouv. ed. T. I. p. 343.), und Pfleiderer theilt in ſeiner ebenen Trigonometrie, S. 389, eine Stelle aus einer Pariſer Handſchrift mit, welche der Diaconus Camerer daraus abgeſchrieben hat. Die Regel wird darin ohne Beweis vorgetragen, und durch ein Beyſpiel erläutert. In der Ausgabe der Geodäſie nebſt einem Buche von Kriegsmaſchinen durch Barocius, Venedig 1572, iſt die Regel nicht befindlich. Die erſte gedruckte Schrift, worin der Satz mit dem Beweiſe vorkommt, iſt des Minoriten Lucas de Burgo Summa de Arithmetica, Geometria, cet. 1494. Derſelbe Beweis ſteht in des Tartalea Trattato de numeri e miſure, daher bisweilen der Satz dieſem letztern zugeſchrieben wird. Ramus theilt ihn auch mit in den Scholis mathematicis, iſt aber damit unzufrieden, wegen der dunkeln Hyſterologie, worunter er vielleicht den Mangel des kunſtgerechten geometriſchen Vortrages verſteht. Er ſchreibt den Beweis dem Jordanus Nemorarius und Tartalea zu, von welchen der erſtere im 13ten Jahrhundert gelebt haben mag. Sie hätten, ſagt er, dadurch ſehr gute Geſchicklichkeit in der Mathematik, aber nicht in der Logik gezeigt. Denſelben Beweis trägt van Ceulen vor, in den Fundamentis arithm. et geom. probl. 35, wobey der Überſetzer, Snellius, erinnert, daß alle, welche ſich deſſelben bedient hätten, ſich einen Fehler gegen die wahre Methode zu Schulden kommen ließen, durch die planoplanorum ſtereometriam, wie er es nennt. Er verändert daher den Beweis etwas, um dieſen Mangel zu heben. Newtons Beweis in der Arithm. univ. probl. geom. XI. kommt im Weſentlichen mit dem hier gegebenen überein, iſt aber in der Form verſchieden, weil er ganz geometriſch iſt, außer daß noch

die Quadratwurzel aus dem Product von vier Linien gezogen wird. Boscovich (Operum T. V. Opuſc. XIV.) ſucht den Halbmeſſer des in ein Dreyeck einzuſchreibenden Kreiſes durch eine theils geometriſche, theils trigonometriſche Methode. Wenn dieſer gefunden iſt, ſo wird auch unmittelbar daraus der Inhalt des Dreyecks hergeleitet. Euler (Novi Comm. Petrop. T. I. a. a. 1747, 48.) ſucht durch eine rein geometriſche Conſtruction den Werth dieſes Halbmeſſers. Einen Beweis durch analytiſche Trigonometrie allein, unabhängig von irgend einer Conſtruction, findet man in Karſtens Matheſi theoretica elementari et ſublimiori, 1760. §. 43. pag. 313, und Lehrbegriff der Mathematik, 2. Th. 461 §. auch in Käſtners Anfangsgründen, Trigonometrie 20 u. 21. Satz, und in meiner analytiſchen Trigonometrie, S. 23. Die lineariſchen Nachrichten von dieſem Lehrſatze, und die Methoden ihn zu beweiſen, ſind ausführlich in Pfleiderers ebenen Trigonometrie S. 374 — 394. mitgetheilt.

37. Da der Raum auf Tab. VIII. noch verſtattet, eine Figur beyzufügen, ſo benutze ich denſelben, um den von Euler a. a. O. gegebenen feinen geometriſchen Beweis des Lehrſatzes mitzutheilen.

In dem Dreyeck ABC (Fig. 132.) werden die Winkel durch die Linien AO, BO, CO, halbirt, die ſich in O ſchneiden, (15.). Von O werden die ſenkrechten OP; OQ, OR auf die Seiten gezogen. Der Inhalt des Dreyecks iſt $= \frac{1}{2}(AB + AC + BC)\, OP$, oder ſo groß als des Rechtecks, deſſen eine Seite die halbe Summe von $AB + AC + BC$, die andere die ſenkrechte OP iſt. Nun hat man dieſen Ausdruck in einen andern zu verwandeln, worin die ſenkrechte OP nicht vorhanden iſt.

Zuerſt bemerke man, daß $AR = AQ$; $BR = BP$; $CP = CQ$ iſt. Daher iſt $AR + BP + CQ$ die halbe Summe der Seiten, und der Inhalt des Dreyecks $= (AR + BP + CQ)\, OP$.

Nun ſuche man vermittelſt ähnlicher Dreyecke einen Ausdruck, der dieſem gleich iſt, und ganz durch die Seiten des Dreyecks gegeben wird.

Auf eine der ihren Winkel halbirenden Linien, wie CO, die hier zu verlängern iſt, ziehe man aus einem der beiden andern Winkel, B, die ſenkrechte BMN, welche der verlängerten PO in N begegne. Es iſt der W. BOM $= \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$, alſo OBM das Complement dieſer beiden zum Rechten. Da $A + B + C =$ zwey Rechten, ſo iſt $\frac{1}{2}A$ auch das Complement von $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$ zum Rechten, alſo W. OBM = OAR. Daher ſind die rechtwinklichten Dreyecke BMO, ARO ſich ähnlich, und es iſt $BM : MO = AR : OR = AR : OP$. Da der W. BNP, ſo wie BCM, jeder das Complement von CBM zum Rechten ſind, ſo iſt W. BCM = BNP, und in den ähnlichen Dreyecken BMC, OMN iſt $BM : BC = MO : ON$, oder $BM : MO = BC : ON$, folglich iſt $BC : ON = AR : OP$, alſo

$$AR \times ON = BC \times OP.$$

Zu beiden Rechtecken addire man das $AR \times OP$, ſo iſt $AR \times PN = (AR + BC) OP = (AR + BP + CQ) OP$. Wegen der ähnlichen Dreyecke BPN, OPC iſt $PN : PP = CP : OP$, alſo $PN \times OP = BP \times CP = BP \times CQ$. Aus der Gleichheit jener Rechtecke folgt die Gleichheit der Prismen $AR \times PN \times OP$ und $(AR + BP + CQ) OP^2$; alſo iſt

$$AR \times BP \times CQ = (AR + BP + CQ) OP^2.$$

Hieraus ergiebt ſich nun ſogleich der Satz, wie der Inhalt eines Dreyecks durch die Seiten gefunden wird. Es ſey die Summe aller drey Seiten $= S$, ſo iſt $AR + BP + CQ = \frac{1}{2}S$; $AR + BC = \frac{1}{2}S$; $BP + AC = \frac{1}{2}S$; $CQ + AB = \frac{1}{2}S$, und es iſt $(\frac{1}{2}S - BC)(\frac{1}{2}S - AC)(\frac{1}{2}S - AB) = \frac{1}{2}S \times OP^2$ und der arithmetiſche Ausdruck des Inhalts des Dreyecks iſt

$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}S(\tfrac{1}{2}S - AB)(\tfrac{1}{2}S - BC)(\tfrac{1}{2}S - AC)}.$$

38. Die in (37.) gefundene Gleichung verwandle man in dieſe,

$$\frac{AR}{OR} \times \frac{BP}{OP} \times \frac{CQ}{OQ} = \frac{AR}{OR} + \frac{BP}{OP} + \frac{CQ}{OQ}.$$

Die Quotienten ſind nach ihrer Folge die Cotangenten der Hälften von den Winkeln A, B, C, ſo daß

$$\cot \tfrac{1}{2} A . \cot \tfrac{1}{2} B \times \cot \tfrac{1}{2} C = \cot \tfrac{1}{2} A + \cot \tfrac{1}{2} B + \cot \tfrac{1}{2} C,$$

wenn $A + B + C = 2$ Rechten iſt. Der Satz wird in der Goniometrie II. durch Rechnung erwieſen.

39. Aus der Gleichung in (37.) ergiebt ſich auch der Werth des Halbmeſſers des in ein Dreyeck einzuſchreibenden Kreiſes durch die Seiten deſſelben.

Von der Verwandlung eines Dreyecks in ein anderes oder in eine mehrſeitige Figur, von der Theilung nach gewiſſen Bedingungen, von der Verbindung mit dem Kreiſe, ſ. Verwandlung der Figuren, Theilung der Figuren, Kreis.

Mancherley Sätze und Aufgaben über die Dreyecke, in van Ceulen Fundamentis arithm. et geom. 1615. — Greg. a Sto Vincentio opere geometrico, p. 21–36. — Van Schooten exercit. geometricis 1657. — Newtoni Arithmetica univerſali. — Gilberts Geometrie nach Le Gendre, Simpſon u. m. 1798.

Dreytheilig, ſ. Trinomiſch.

Duodecimal-Maaß iſt die Eintheilung der Einheit in 12 gleiche Theile, und eines dieſer Theile in 12, und ſo ferner. Die Brucheinheiten machen die Reihe

$$\frac{1}{12}; \frac{1}{12.12}; \frac{1}{12.12.12}; \frac{1}{12^4}; \frac{1}{12^5}, \text{ u. ſ. f. aus.}$$

Z. B. die Ruthe werde in 12 Fuß, der Fuß in 12 Zoll, der Zoll in 12 Linien, die Linie in 12 Theile, Skrupel, oder wie man ſie nennen will, getheilt, ſo mißt und rechnet man nach dem Duodecimalmaaße. Die leichtere Eintheilungsart hat dieſes Maaß bey Feldmeſſern und Handwerksleuten beliebt gemacht. Die Zahl 12 läßt ſich in

2, 3, 4, 6 gleiche Theile theilen, die Zahl 10 nur in 2 und 5.

Nach dieſem Maaße enthält eine Quadratruthe 144 Quadratfuß; 144 mahl 144 Quadrat-Zoll; 144 mahl 144 mahl 144 Quadratlinien. Eine Cubikruthe enthält 1728 Cubikfuß, 1728 mahl 1728 Cubikzoll; 1728 mahl 1728 mahl 1728 Cubiklinien. S. Cubik-Einheit.

Duodecimalrechnung iſt die Rechnung nach Duodecimalmaaß. Sie iſt nur darin von der dodekadiſchen verſchieden, daß die Menge der Haupteinheiten dekadiſch ausgedruckt wird, und daß die kleinern Einheiten bey Flächenrechnungen die Progreſſion $\frac{1}{144}, \frac{1}{144^2}, \frac{1}{144^3}$, etc. bey Cubikrechnungen die Progreſſion $\frac{1}{1728}, \frac{1}{1728^2}, \frac{1}{1728^3}$, etc. bilden.

Die Addition und Subtraction iſt ſehr leicht, und nichts als eine gemeine mit benannten Zahlen. Die Multiplication und Diviſion macht nach der gewöhnlichen Art Schwierigkeit; folgendes Verfahren macht ſie leicht.

Ein Rechteck hat die Länge 5° 6′ 7″ und Breite 2° 3′ 5″, Duodecimalmaaß; man ſoll den Inhalt angeben. Man multiplicire dieſe dodekadiſchen Zahlen nach Art der dekadiſchen in einander, folgendergeſtalt:

```
          5 . 6 . 7
          2 . 3 . 5
      ---------------
      2 . 3 . 8 . 11
  1 . 4 . 7 . 9
 11 . 1 . 2
 -------------------------
 1 . 0 . 8 . 1 . 5 . 11
```

Die beiden niedrigſten dodekadiſchen Ziffern, 5 . 11, ſind Quadratlinien; die beiden vorhergehenden, 8 . 1, ſind

Quadratzolle, und 1.0 ſind Quadratruthen, da die Längen-Zolle durch $\frac{1}{12}$, und die Linien durch $\frac{1}{144}$ bezeichnet werden. Alſo iſt der Inhalt 12° 97′ 71″ Quadratmaaß.

Es ſey der Inhalt eines ſenkrechten Prisma zu finden, deſſen Länge 5° 6′ 7″, Breite 2° 3′ 5″, Höhe 7′ 2″ iſt. Man multiplicire die gefundene Grundfläche, aber dodekadiſch ausgedruckt, in die Höhe 7′ 2″, wie folget

		1	0	8	1	5	11
						7	2
		2	1	4	2	11	10
	7	4	8	10	5	5	
	7	6	10	2	8	4	10

Die drey letzten dodekadiſchen Ziffern ſind Cubikzolle, die drey vorhergehenden Cubikfuße; die höchſte bedeutet Cubikruthen. Die Reduction auf dekadiſche Werthe giebt den Inhalt 7° 986′ 1210″ Cubikmaaß.

Die Diviſion geſchieht wie in dem Artikel, Diviſion, gezeigt iſt, nachdem man aber die dekadiſchen Zahlen auf dodekadiſche gebracht hat, um die Progreſſion der Einheiten nach den Potenzen von 12 zu erhalten.

Exempel einer Reduction von einem Maaße auf das andere. — Es ſollen 584 Cubfuß 622 Cubzoll Decimalmaaß in Duodecimalmaaß verwandelt werden. Die Ruthe iſt die Einheit.

Es ſind 584622 Cubzoll (dek.) = 2.4.2.3.10.6 Cubzoll (dodek.). Nun verhält ſich die Menge der Cubikzoll Decim. zu der Menge der Cubikzoll Duodec. wie $10^6 : 12^6$. Daher iſt die Zahl 2.4.2.3.10.6 mit 12^6 (d. i. 1.0.0.0.0.0.0, zu multipliciren, und mit 10^6 das iſt, 4.0.2.8.5.4 (dodek.), zu dividiren. Die Rechnung iſt folgende.

Divisor	Quotient
4.0.2.8.5.4	7.0. 2. 2. 8.7

Dividend 2.4.2.3.10. 6.0. 0. 0. 0.0.0
2.4.1.6.11. 1.4

1. Reſt; 8.11. 4.8. 0. 0
8. 0. 5.4.10. 8

2. Reſt 10.11.8. 1. 4. 0
8. 0.5. 4.10. 8

3. Reſt 2.10.9. 8. 5. 4.0
2. 8.1. 9. 7. 6.8

4. Reſt 2.7.10. 9. 9.4.0
2.4. 1. 6.11.1.4

5. Reſt 3. 9. 2.10.2.8

Der Quotient iſt 7.0.2. Cubf. 2.8.7. Cubzoll. Das iſt, 1010 Cubf. 391 Cubz. Duod. Maaß, aber dekadiſch ausgedruckt.

Das Exempel, nach gemeiner Art berechnet, ſteht in Karſtens Anfangsgründen, I. Th. 636 S. wo noch Cubiklinien und Cubſcr. zugefügt ſind.

Setzt man die Diviſion weiter fort, ſo ſind die 3 folgenden Ziffern des Quotienten 11.3.0. Nämlich

Divisor	Dividend	Quot.
4.0.2.8.5.4	3.9.2.10.2. 8.0.0.0	11.3.0

3.8.2. 5.8.10.8

1.0. 4.5. 9.4.0.0
1.0. 0.8. 1.4.0

3.9. 8.0.0.0

Die 11.3.0. Cublin. ſind 1620 Cublin. dekadiſch gezählt, wofür genauer 1621 zu ſetzen ſind. Karſten hat

über 1621 Cublin. noch eine Anzahl Cubſcr. durch einen Rechnungsfehler.

Wären die 1010 Cubf. 391 Cubz. 1621 Cublin. Duod. Maaß auf Decimalmaaß zu reduciren, ſo wäre die Rechnung etwas leichter, weil, nachdem die dekadiſchen Zahlen auf dodekadiſche gebracht ſind, das Ganze durch 4.0.2.8.5.4 zu multipliciren, und durch 1.0.0.0.0.0.0 zu dividiren iſt.

Duplicirtes, zweyfaches, **Verhältniß** (ratio duplicata); iſt ein aus zwey gleichen Verhältniſſen zuſammengeſetztes. Das einfache ſey a:b, ſo iſt das zweyfache, aa:bb. Hier iſt der Exponent das Quadrat von dem des einfachen Verhältniſſes. In dem a:2b, iſt der Exponent das gedoppelte von dem in jenem. Wenn man dieſes Verhältniß mit jenem vergleichen wollte, ſo müßte man es ratio dupla nennen. S. Verhältniß.

Duplicatio cubi, ſ. Deliſches Problem.

Durchmeſſer einer krummen Linie, iſt eine gerade Linie, welche alle parallelen Chorden an derſelben halbirt. In dem Kreiſe halbirt die gerade Linie, welche aus dem Mittelpuncte durch die Mitte einer Chorde gezogen iſt, alle derſelben parallelen, und ſchneidet ſie unter einem rechten Winkel. In der Ellipſe und Hyperbel werden alle unter ſich parallelen Chorden, in welcher Lage ſie auch genommen werden, durch eine gerade Linie halbirt, die durch einen gegebenen Punct, den Mittelpunct der Curve, geht. Die beiden Hauptdurchmeſſer ſchneiden die coordinirten Chorden unter einem rechten Winkel. In der Parabel ſind alle Durchmeſſer der Axe parallel. Unter den krummen Linien höherer Gattungen haben viele keine Durchmeſſer, andere nur einen oder einige.

In einem allgemeinern Sinne heißt Durchmeſſer einer krummen Linie eine gerade Linie, welche alle an eine Curve gezogenen Parallelen ſo ſchneidet, daß die Summe der zwiſchen ihr und den Puncten der Curve, auf jeder dieſer

Parallelen, enthaltenen Abſchnitte an der einen Seite ſo groß iſt als an der andern. In dieſem Sinne hat jede algebraiſche Curve unendlich viele Durchmeſſer.

Eine krumme Linie iſt in Beziehung auf eine andere ihr Durchmeſſer, wenn die Summe der poſitiven Producte aus den zwiſchen beiden enthaltenen Abſchnitten gerader parallelen Linien ſo groß iſt als die Summe der negativen, bey einer beſtimmten Anzahl der combinirten Abſchnitte. Der krummlinichte Durchmeſſer iſt ein Kegelſchnitt, wenn je zwey Abſchnitte in einander multiplicirt werden.

Euleri Introd. in Anal. Inf, T. II. cap. XV.
Cramer Analyſe des lignes courbes algébriques, Ch. VI.
Newtoni enumer. lin. tertii ordinis, art. II. III. In dieſer Abhandlung ſind Beyſpiele von Linien der dritten Ordnung mit einem Durchmeſſer.

Durchſchnitt, (Sectio) iſt der Punct, worin ſich zwey Linien, oder die Linie, worin ſich zwey Flächen ſchneiden. Wenn ein Körper von einer Fläche durchſchnitten wird, ſo iſt der Theil der Fläche, der innerhalb des Körpers liegt, der Schnitt, oder Durchſchnitt des Körpers. Dieſer wird begränzt von dem Durchſchnitt der ſchneidenden Fläche und der Oberfläche des Körpers.

Dyadik, dyadiſches Zahlenſyſtem, dyadiſche (zweyziffrige) Form der Zahlen, iſt die Vertheilung der Zahlen in Claſſen von zweyfach ſteigenden Einheiten, deren jede Claſſe zwey enthält, ſo daß zwey Einheiten einer Claſſe eine Einheit der nächſt höhern Claſſe ausmachen. Jede Zahl wird demnach bloß aus den Gliedern der geometriſchen Reihe

$$1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : \text{etc.}$$

zuſammengeſetzt. Es iſt, um jede Zahl dadurch auszudrucken, nur ein einziges Zeichen, 1, nebſt der 0 nöthig. Die Eins in der erſten Stelle rechter Hand bedeutet einen

Einer, in der zweyten 2, in der dritten 4, u. ſ. f. Z. B. die dyadiſche Zahl

110011100111

iſt, von der rechten Hand her geleſen, dekadiſch = 1 + 2 + 4 + 32 + 64 + 128 + 1024 + 2048 = 3303. Hieraus ſieht man, daß in dieſem Syſtem der Claſſen zu viele werden, ſo wie es auch ſehr viele Benennungen der Claſſen erfordern würde. Die Rechnungen nach demſelben ſind zwar ſehr einfach, aber erfordern zu vieles Schreiben.

Eine dekadiſche Zahl in eine dyadiſche zu verwandeln, dividire man ſie durch 2; den Quotienten wieder durch 2; den zweyten Quotienten wieder durch 2, und ſo fort: die Reſte, mit Einſchluß der 0 bey geraden Dividenden, ſchreibe man der Reihe nach von der Rechten zur Linken hin, ſo hat man die dyadiſche Form der gegebenen Zahl. Z. B. die Zahl 35351 dyadiſch auszudrucken.

Dividend	Reſt	Dividend	Reſt	Divid.	Reſt
35351	1	1104	0	34	0
17675	1	552	0	17	1
8837	1	276	0	8	0
4418	0	138	0	4	0
2209	1	69	1	2	0
1104		34		1	1

Die dekadiſche Zahl 35351 iſt
dyadiſch = 1000101000010111.

Die Verwandlung einer dyadiſchen Zahl in eine dekadiſche kann man folgendergeſtalt, ohne eine Tafel der Potenzen von 2, vornehmen. Man nehme die höchſte Ziffer doppelt, addire dazu die folgende, verdopple die Summe und addire dazu die dritte, fahre auf dieſe Art fort bis zu Ende. Z. B. die obige dyadiſche Zahl

110011100111

Die folgweiſe erhaltenen Summen ſind: 3; 6; 12; 25; 51; 103; 206; 412; 825; 1651; 3303. Die letzte

Zahl 3303 iſt die geſuchte dekadiſche. Den Grund des Verfahrens wird man bey einigem Nachdenken leicht finden.

Die Verwandlung einer dyadiſchen Zahl in eine dekadiſche kann man auch auf eine ähnliche Art als die umgekehrte vornehmen. Man muß nämlich jene mit Zehn, d. i. 1010, dividiren, den Quotienten wieder dadurch, und ſo fortfahren, bis man auf einen Quotienten unter Zehn kommt, der nun ſelbſt der letzte Reſt wird. Alle die einzelnen Reſte geben die Ziffern der reducirten Zahl. Als Beyſpiel der Diviſion folgt hier die erſte Operation.

Diviſor	Quotient
1010	101001010
Dividend	110011100111
	1011
	1100
	1011
Reſt	11

Der erhaltene Quotient mit 1010 dividirt giebt zum Reſt 0; der nächſte Quotient giebt zum Reſt 11, und durch die Diviſion zum Quotienten 11. So wird die dekadiſche Zahl = 3803.

Wenn gleich die dyadiſche Form zur praktiſchen Rechnung nicht brauchbar iſt, ſo giebt ſie doch einen und den andern Vortheil zur Einſicht in die Zuſammenſetzung und Zerlegung der Zahlen an die Hand. Erſtlich, man ſieht daraus, wie jede Zahl ſich bloß aus den Zahlen der Progreſſion 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : etc. zuſammenſetzen läßt. Dies iſt beym Abwägen der Körper nützlich, um es mit der kleinſten Anzahl von Gewichten zu bewerkſtelligen. Man kann z. B. mit den Gewichten 1; 2; 4; 8; 16; 32 Pfund alle Gewichte von 1 bis 63 ganzen Pfunden zuſammenſetzen. Denn die dyadiſche Zahl 111111 iſt die nächſt kleinere vor 1000000, als welche man erhält, wenn man zu jener 1 ſetzt. Alle kleinere Zahlen werden aus einigen jener ſechs Zahlen zuſammengeſetzt. Z. B. die dekadiſche Zahl 51

iſt dyadiſch 110011, ſo daß zu 51 Pf. die Gewichte 1; 2; 16; 32 erfordert werden.

Zweytens fällt bey der dyadiſchen Form ſehr oft die Theilbarkeit der Zahlen in die Augen. Bloß die Symmetrie in der Folge der 1 und 0 macht ſie manchmahl ſichtbar, weil dieſe Symmetrie bey der dyadiſchen Form, da ſie nur zweyerley Zeichen enthält, öfter vorkommen, als bey der dekadiſchen. Z. B. 11011 (= 27) iſt durch 11 (= 3) theilbar; 101101 (= 45) durch 101 (= 5); 1010101 (= 85) durch 101 (= 5) und durch 10001. Zuweilen kann man eine nicht ſymmetriſche Folge durch Zerlegung ſymmetriſch machen. So iſt 1101 = 10100

101

Es läßt ſich alſo dieſe Zahl (= 25) durch 5 theilen. In der oben zum Beyſpiel gebrauchten Zahl

1000101000010111 (= 35351)

iſt keine ſymmetriſche Folge; allein der erſte Theil ihrer Ziffern 1000101 läßt ſich in die Theile

101110

10111

zerlegen, welche mit dem letzten Theile der Zahl nach den 4 Nullen überein kommen. Daher iſt die Zahl durch 10111 (= 23) theilbar.

Das dyadiſche Zahlenſyſtem hat zuerſt Joh. Caramuel, ein Biſchof von Campagna und Satriano im Königreiche Neapel, in ſeiner Matheſis biceps, vetus et nova, Campaniae 1670. T. I. pag. XLV. medit. prooemialis, angegeben, wo er zugleich die Zahlenſyſteme mit den Grundzahlen Drey bis Zehn, das dodekadiſche und das ſechszigtheilige beſchreibt. Ohne von dieſer in einem wuſtvollen Werke verſteckten Angabe etwas zu wiſſen, iſt Leibnitz auf das dyadiſche Zahlenſyſtem gerathen, und hat gezeigt, wie man es zum Rechnen und andern Zwecken gebrauchen möge. In einem Schreiben an den Herzog Rudolph Auguſt von Braunſchweig vom J. 1697 wendet er es zu einer allegoriſchen Vorſtellung der Schöpfung aus Nichts an. Auf der Zeichnung zu einer Schaumünze entwirft er Licht und Finſterniß hinter einer mit dyadiſchen Zah-

len beſchriebenen Tafel, nebſt der Umſchrift: Omnibus ex nihilo ducendis ſufficit unum. Er fügt hinzu, daß er ſeine Vorſtellung der Zahlen an den Pater Grimaldi in China ſchicken wolle, in der Hoffnung, daß dieſes Sinnbild des Geheimniſſes der Schöpfung dem Chineſiſchen Kaiſer des chriſtlichen Glaubens Vortrefflichkeit vor Augen legen werde. Wenn dieſes auch nicht bewirkt ſeyn mag, ſo hat doch dadurch ein anderer Miſſionär in China, der P. Bouvet, eine chineſiſche, bis dahin ganz unverſtändliche Schrift, entziffert. Sie enthält bloße Striche, von welchen ein Theil aus zwey Stücken beſteht. Sie wird dem Kaiſer Fohi, dem Gründer des Reichs und der chineſiſchen Gelehrſamkeit, zugeſchrieben. Die ganzen Striche bedeuten nach der Erklärung dyadiſche Einheiten, die zertheilten Null, ſo daß das dyadiſche Syſtem überaus alt iſt, da Fohi vor mehr als 4000 Jahren gelebt haben ſoll. Leibnitz erzählt dieſes in einem Aufſatze über die zweyziffrige Rechenkunſt (Arithmétique binaire), der in den Mém. de l'Acad. des Sciences a. 1703. und in der Sammlung ſeiner Werke, T. III. nr. 68. befindlich iſt, auch mit dem oben gedachten Schreiben beſonders abgedruckt von Nolten 1734 herausgegeben worden. Er empfiehlt ſie nicht zum Gebrauch ſtatt der gewöhnlichen, ſondern weil ſie Gelegenheit zu Entdeckungen über den Bau der Zahlen geben könne.

Dyadiſche Arithmetik, Arithmetica dyadica ſive binaria, die Rechnung mit Zahlen nach der binariſchen Form. Brander hat eine gute Anweiſung dazu gegeben. Arithmetica binaria ſ. dyadica, d. i. die Kunſt nur mit zwey Zahlen (Ziffern) in allen Fällen zu rechnen. Augsburg 1769 u. 1775.

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS.

Ende des erſten Theils, erſte Abtheilung.

Druckfehler.

S. 6 Z. 1 ſt. $\frac{ab}{ef} + cd$, l. $\frac{ab}{ef} \times cd$.

— 15 — 10 v. u. ſt. Vierecke l. Vielecke.

— 17 — 17 ſt anylitiſche l. analytiſche.

— 21 — 3 v. u. ſt. Tab. l. Tom.

— 22 — 3 ſt. Integralrechnung l. Integralgleichung.

— 24 — 17 ſt. $\frac{u^2}{1.2} + \frac{d^2\Psi y}{dy^2}$ l. $\frac{u^2}{1.2} \cdot \frac{d^2\Psi y}{dy^2}$.

Daſ. — 19 ſt. $\Psi x +$ l. $\Psi x =$

— 44 — 13 v. u. ſt. Würfeln l. Wurzeln.

— 47 — 3 das Wort, poſitiven, wegzulaſſen.

— 74 — 2 ſt. $\div z$ l. $+ z$.

— 86 — 9 ſt. Mathematik l. Mechanik.

— 89 — 9 ſt. Walis l. Wales.

— 92 — 10 v. u. ſt. AP, PM l. AP : PM.

— 96 — 1 nach Linie zu ſetzen AB.

— 103 — 9 im Nenner des Bruchs ſt. A^{m-1} zu ſetzen B^{m-1}.

— 110 — 13 ſt. Geometrie l. Goniometrie.

Daſ. — 21 ſt. $a(a \times x)$. l. $a(a + x)$.

— 113 — 10 ſt. $- 2AD, AP. \cos DAP$ l. $- 2AD.AP.\cos DAP$.

— 118 — 6 v. u. ſt. ΔANA l. ΔANQ.

— 119 — 7 v. u. ſt. q^2 l. y^2.

— 126 — 6 v. u. ſt. $2\sin\varphi, \cos\varphi$ l. $2\sin\varphi.\cos\varphi$.

— 128 — 8 v. u. ſt. 52 : 180 l. 180 : 52.

— 129 — 9 ſt. $x^2(b-x)^2$ l. $a^2(b-x)^2$.

— 165 — 3 v. ob. ſt. $\sqrt{1}$ l. $\sqrt{-1}$.

— 188 — 13 ſt. Progreſſion l. Proportion.

— 192 — 14 ſt. + vor der Wurzelgröße zu ſetzen ±. Eben ſo Z. 17 u. 19.

— 201 Z. 5 v. u. ſt. ΛA l. ΔA.

— 247 — 9 v. u. ſt. $3A-1$ l. $3A-1$.

— 249 — 5 ſt. 2 + l. + 2.

— 264 — 7 dem Abſatze vorzuſetzen 13*.

S. 332 — 3 l. $(1+z)^{-\frac{n}{m}}$.

Daſ. — 4 v. u. ſt. $(1+2)^{\frac{1}{3}}$ l. $(1+z)^{\frac{1}{3}}$.

— 348 — 1 ſt. $\frac{1}{2}$(B l. $\frac{1}{2}$CB.

— 383 — 18 von u. ſt. das l. des.

Daſ. — 14 v. u. ſt. 2m — l. 2m — 1.

Daſ. — 8 v. u. ſt. 1 l. I.

— 439 — 3 v. u. ſt. CQ l. P, Q.

— 464 — 9 ſt. $(4a3b^2d$ l. $4a(3b^2d$.

— 541 — 7 ſt. Commentarie ſur la Géométaire l. Commentaire ſur la Géométrie.

— 561 — 10 ſt. Coſiſche l. Coſſiſche.

— 564 — 8 ſt. Walsnessley l. Walmesley.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

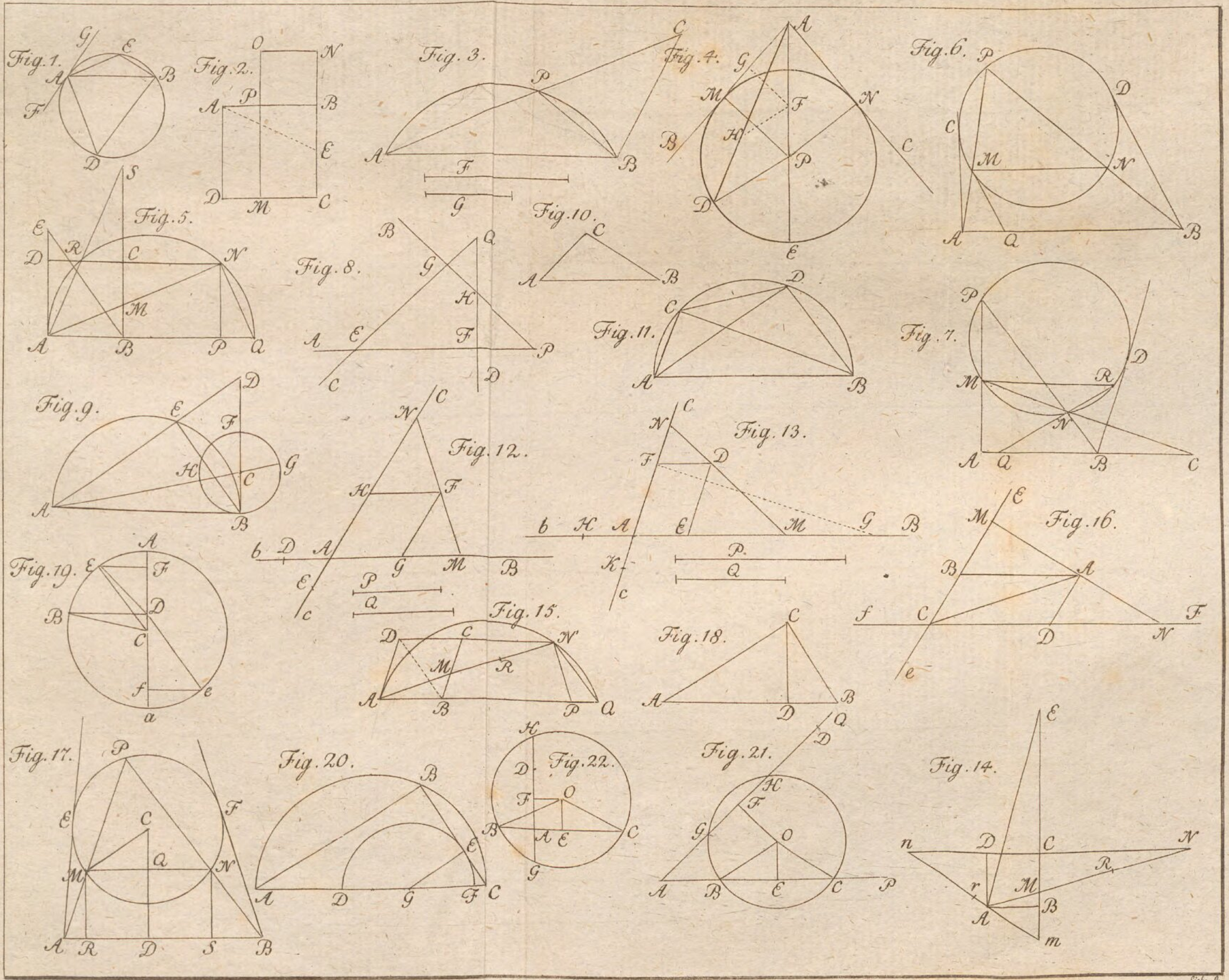


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.

Liebe sc.

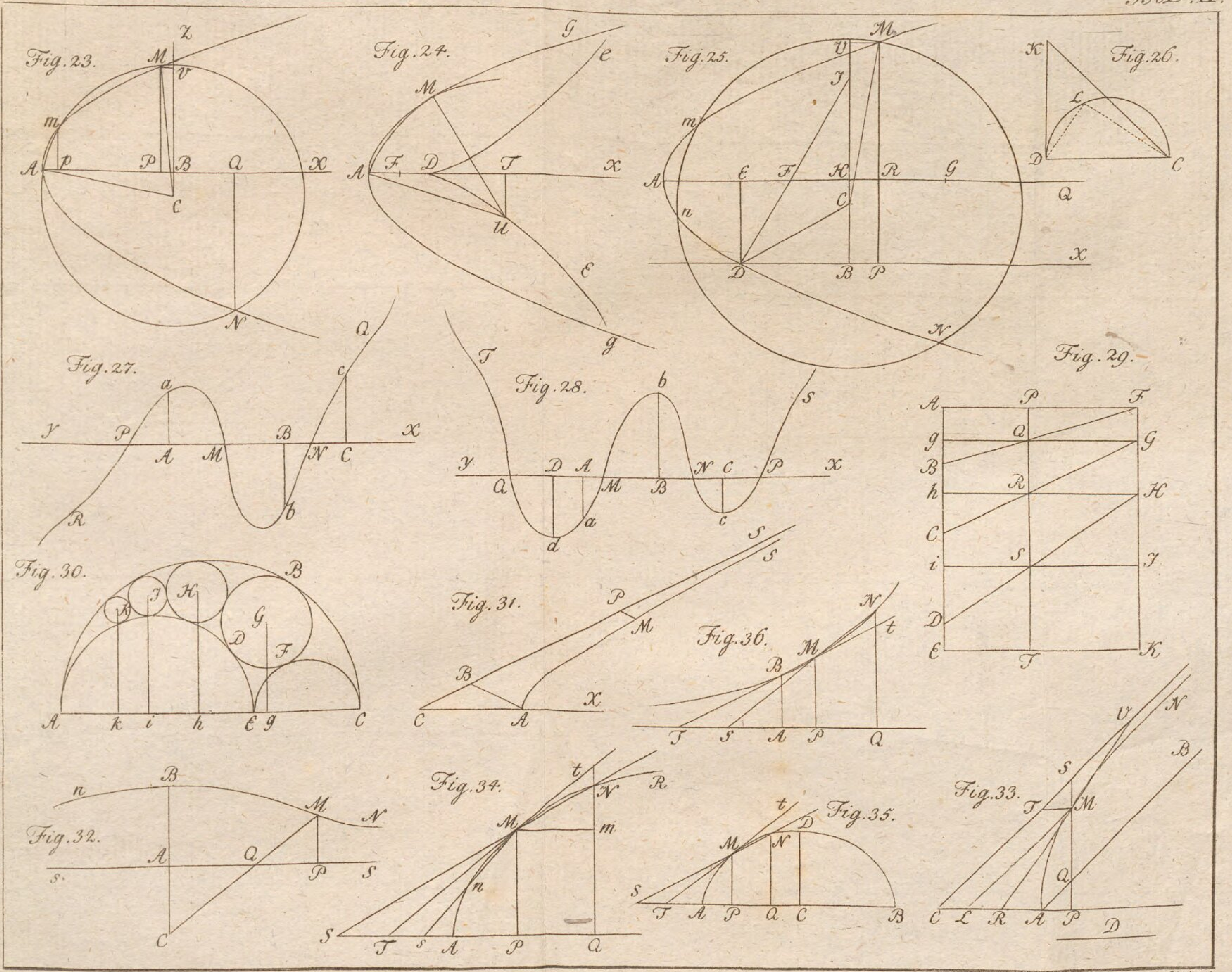


Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 36.
Fig. 32.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 33.

Liebe ſc.

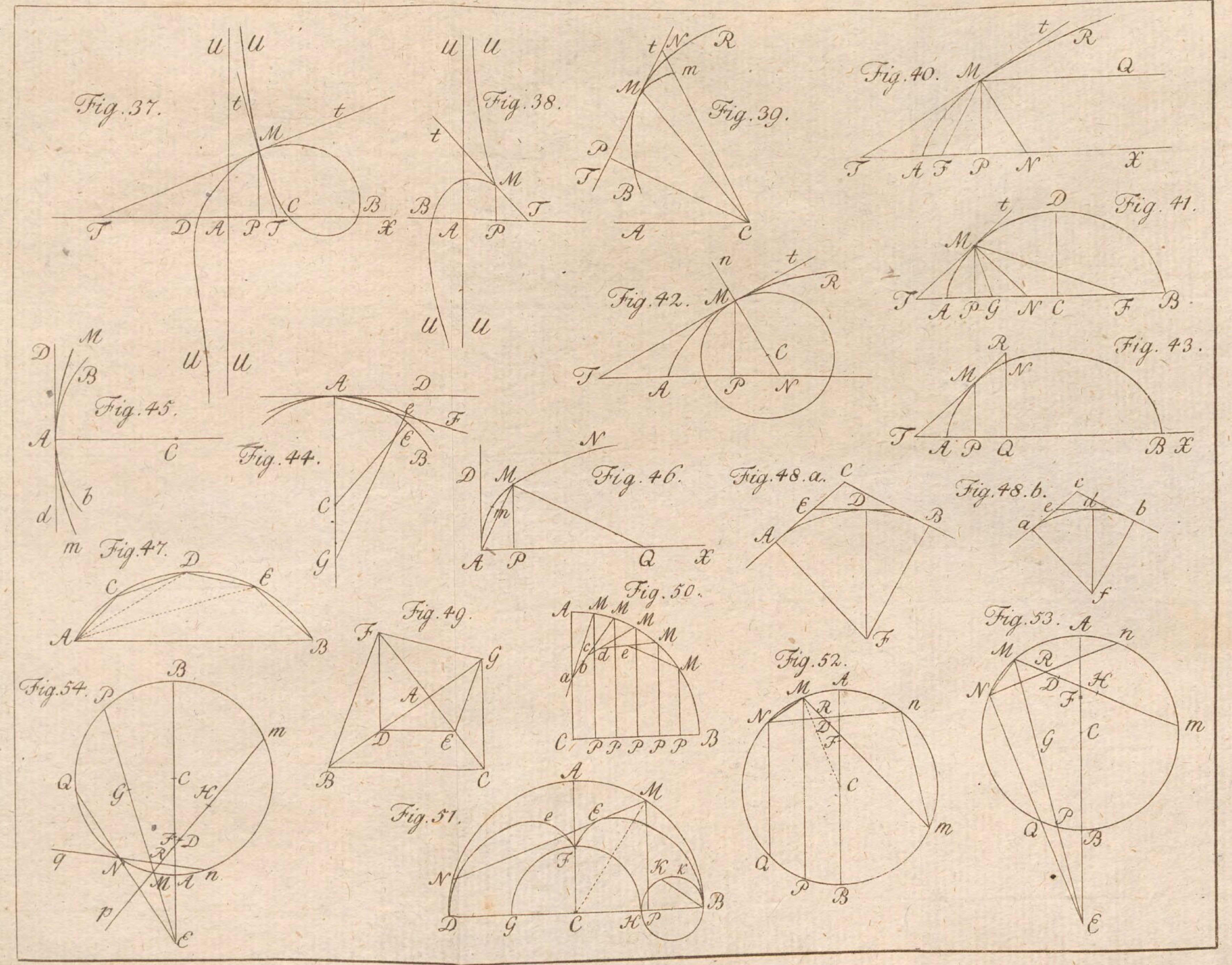


Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 48. a.
Fig. 48. b.
Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 54.

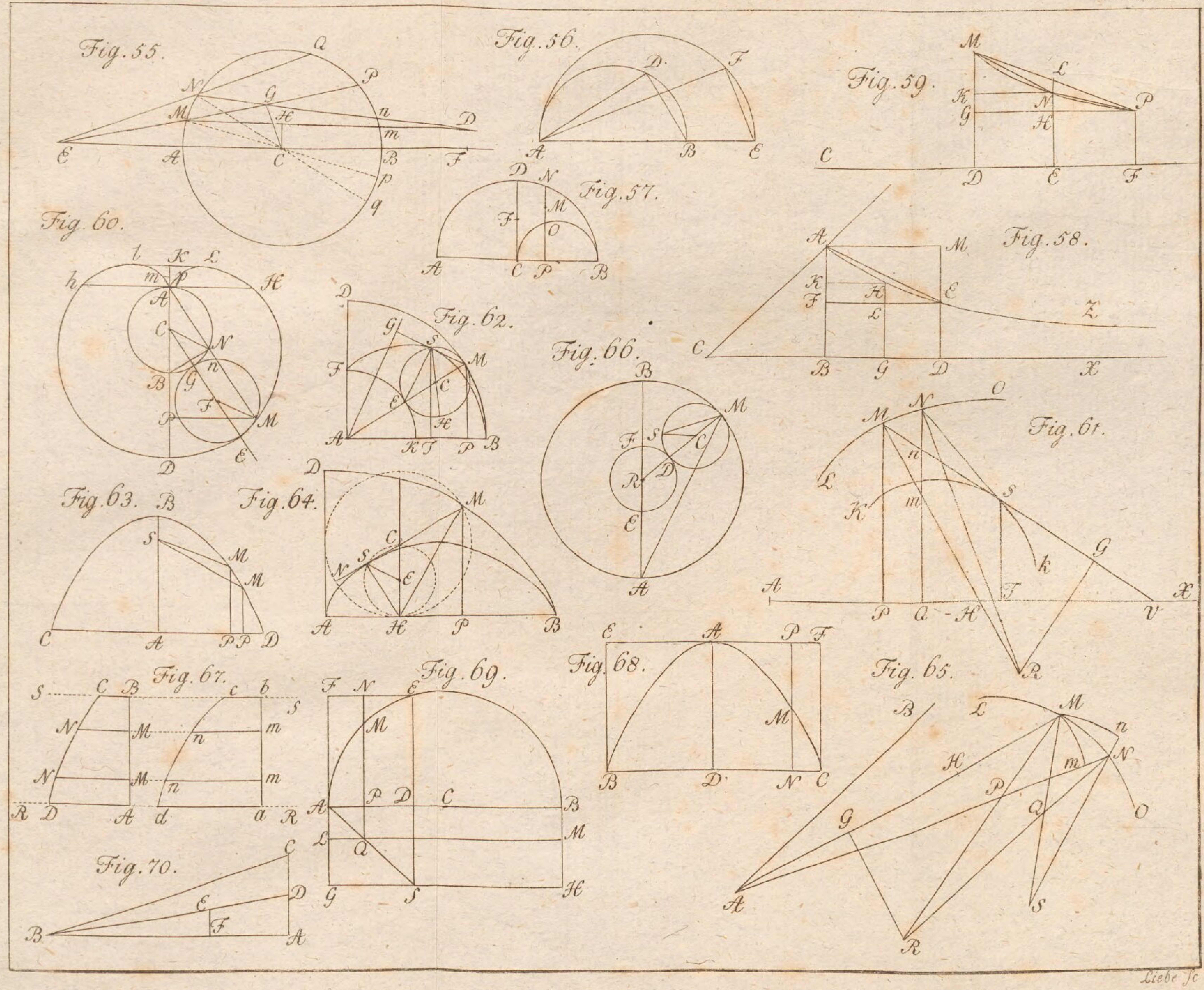


Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 59.
Fig. 57.
Fig. 60.
Fig. 58.
Fig. 62.
Fig. 66.
Fig. 61.
Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. 68.
Fig. 65.
Fig. 67.
Fig. 69.
Fig. 70.

Liebe sc

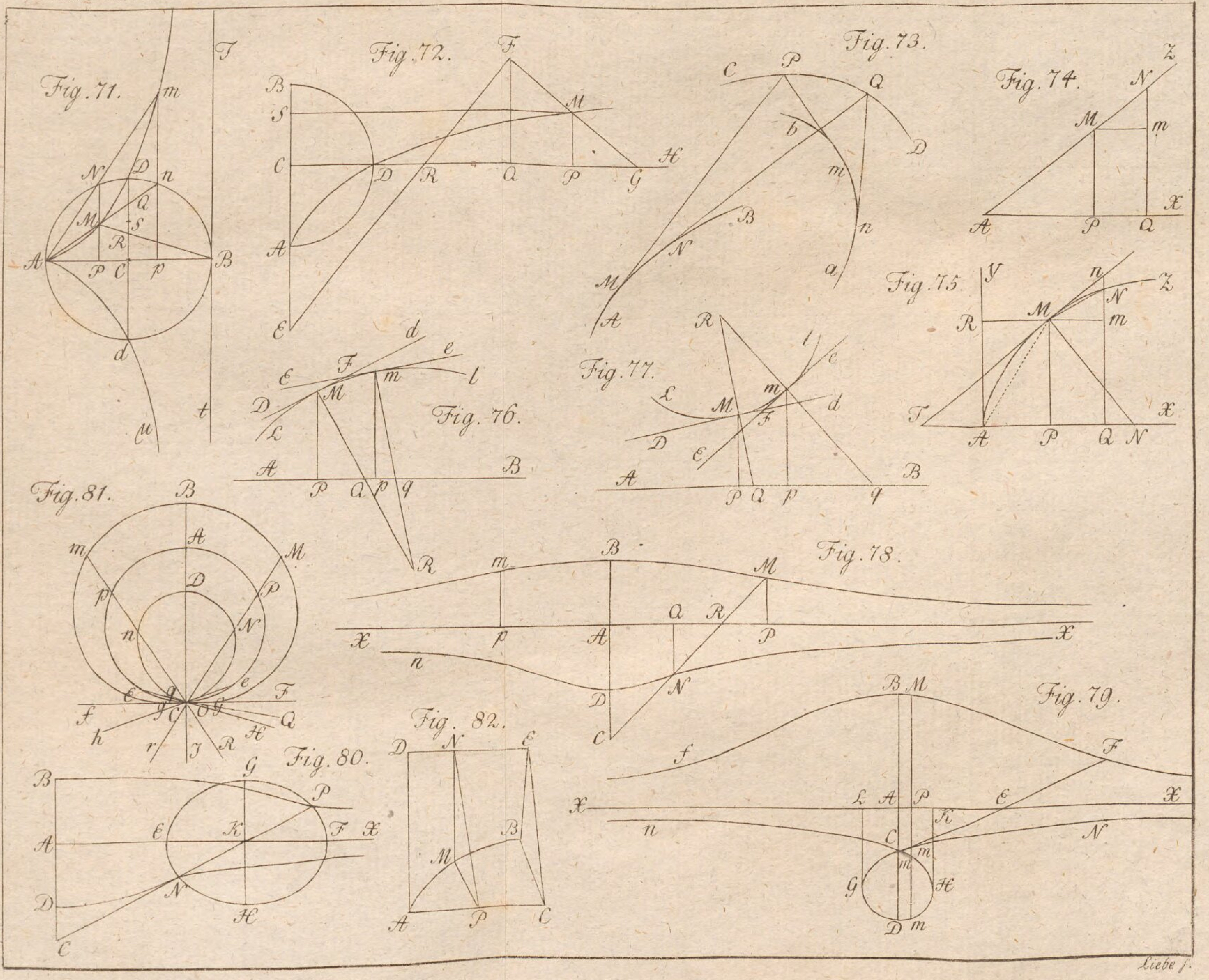


Fig. 71.
Fig. 72.
Fig. 73.
Fig. 74.
Fig. 75.
Fig. 76.
Fig. 77.
Fig. 78.
Fig. 79.
Fig. 80.
Fig. 81.
Fig. 82.

Liebe f.

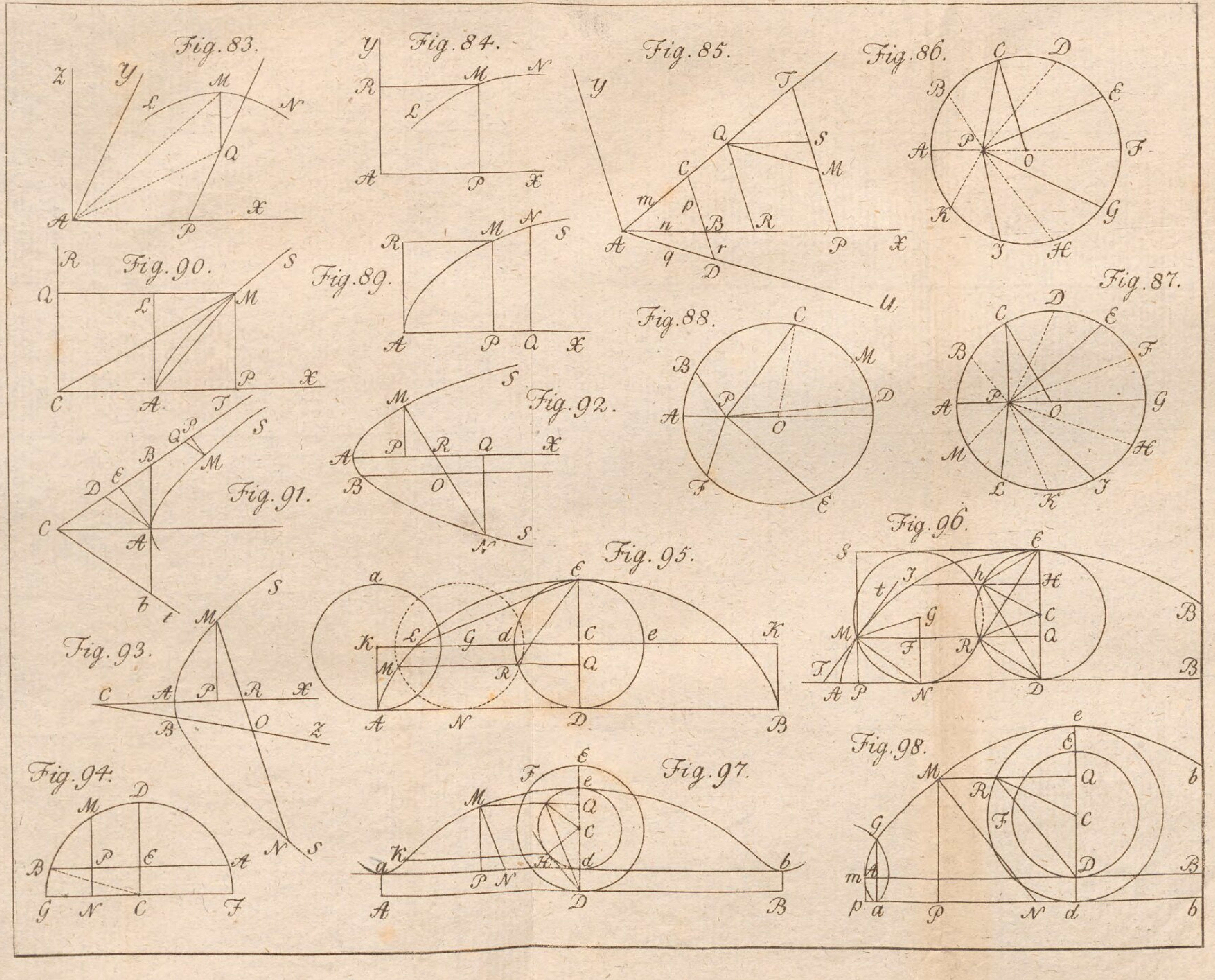


Fig. 83.
Fig. 84.
Fig. 85.
Fig. 86.
Fig. 87.
Fig. 88.
Fig. 89.
Fig. 90.
Fig. 91.
Fig. 92.
Fig. 93.
Fig. 94.
Fig. 95.
Fig. 96.
Fig. 97.
Fig. 98.

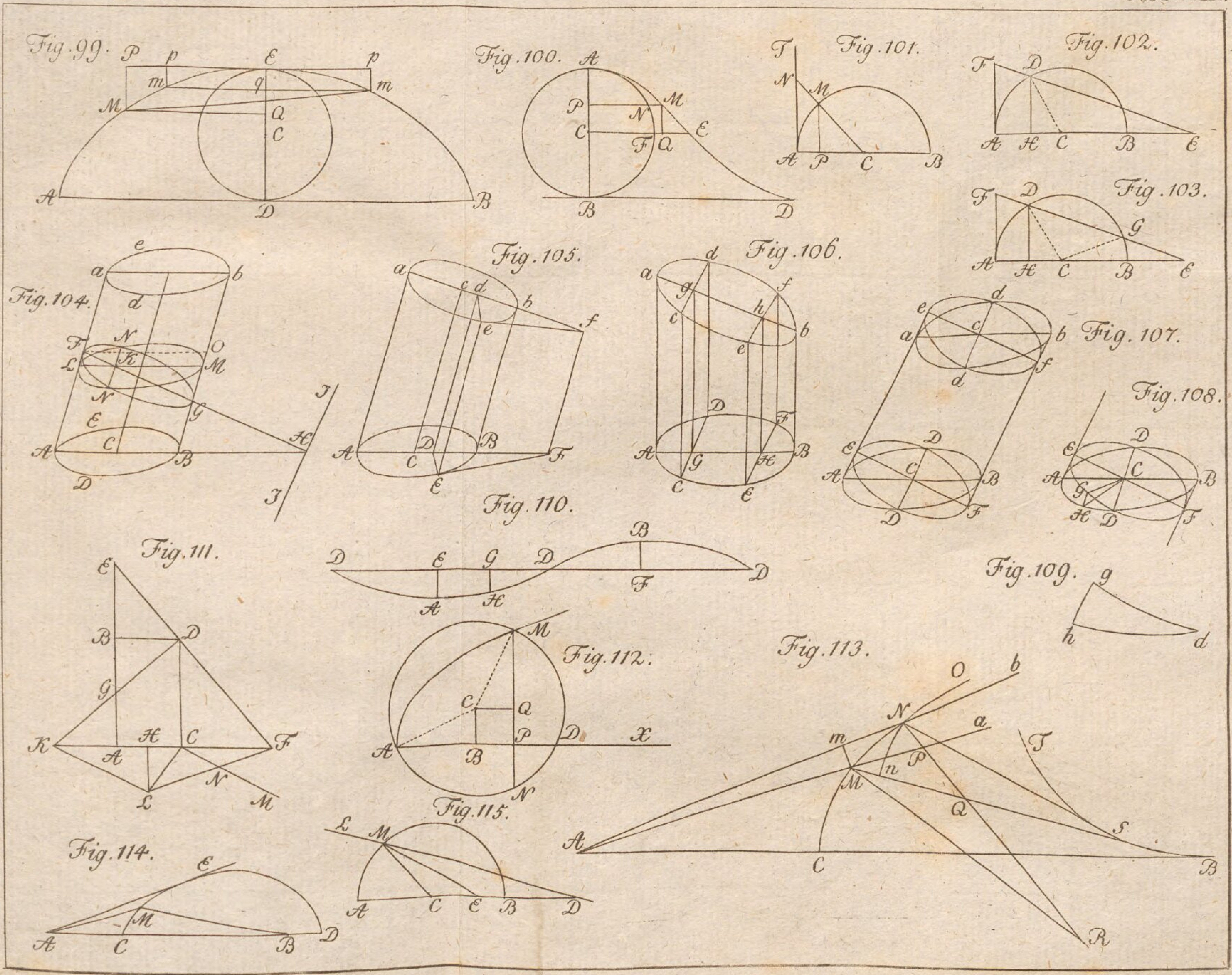


Fig. 99.
Fig. 100.
Fig. 101.
Fig. 102.
Fig. 103.
Fig. 104.
Fig. 105.
Fig. 106.
Fig. 107.
Fig. 108.
Fig. 109.
Fig. 110.
Fig. 111.
Fig. 112.
Fig. 113.
Fig. 114.
Fig. 115.

Fig. 116.

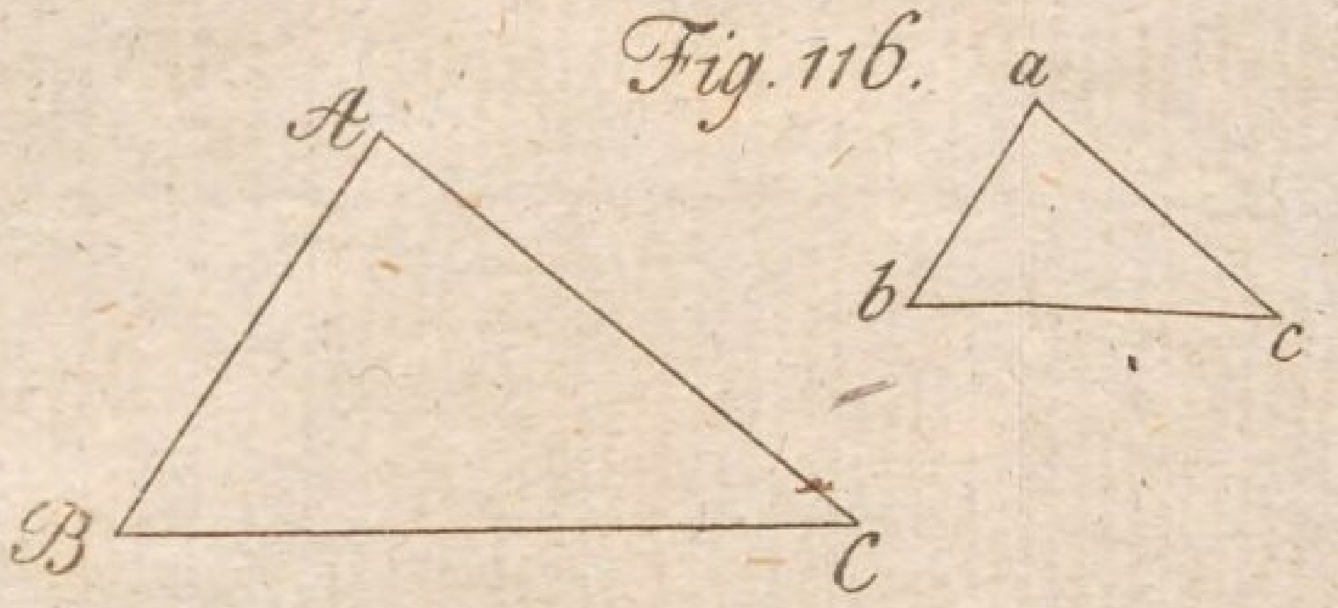


Fig. 117.

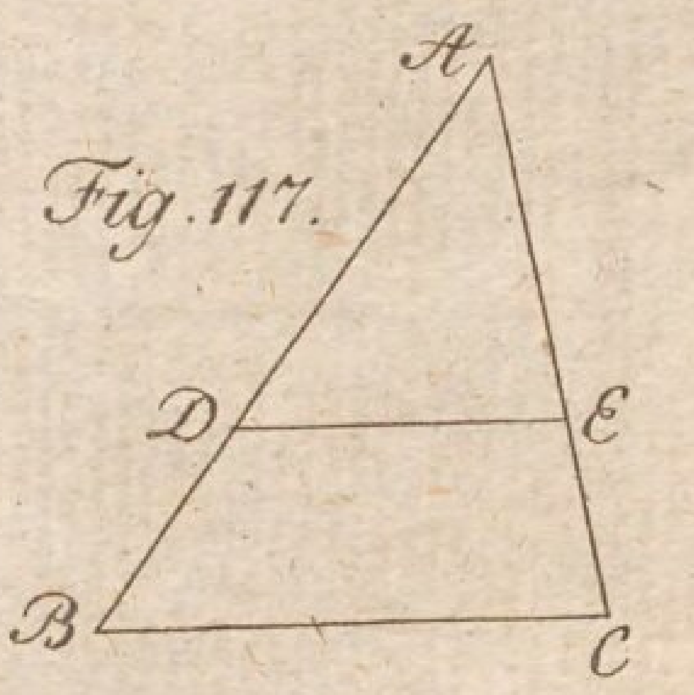


Fig. 118.

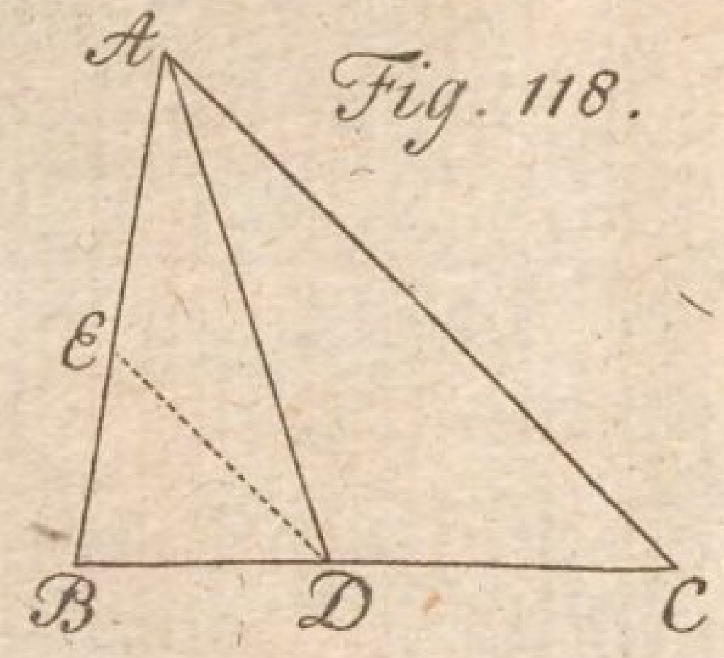


Fig. 119.

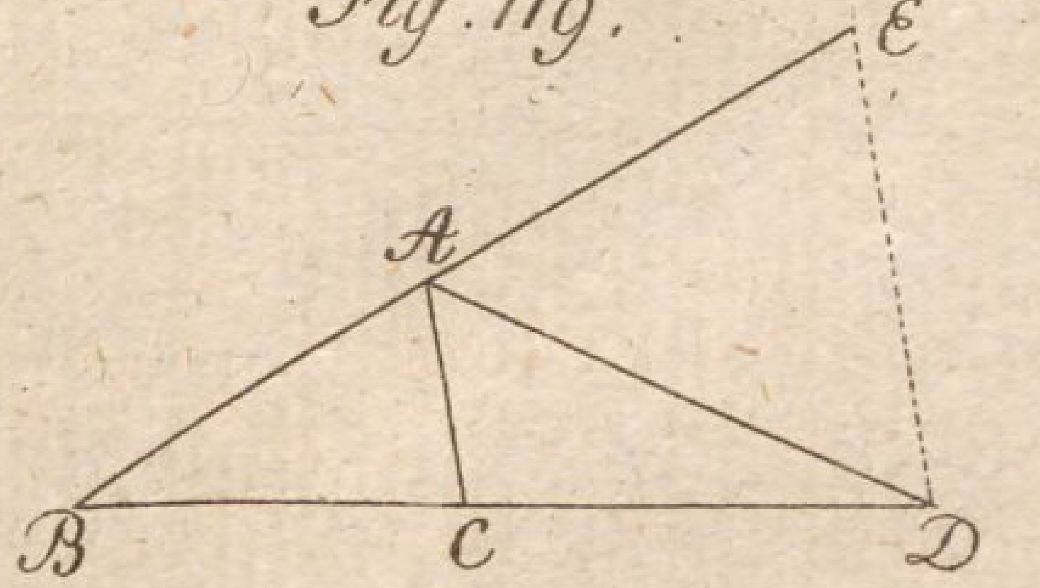


Fig. 120.

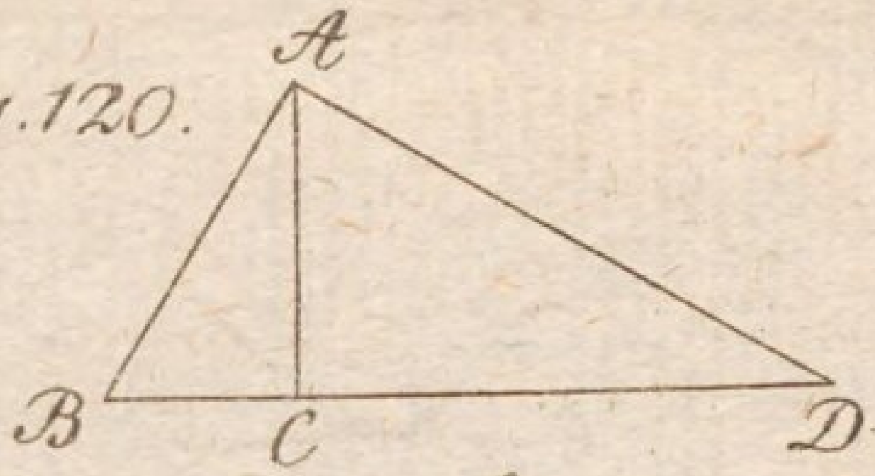


Fig. 121.

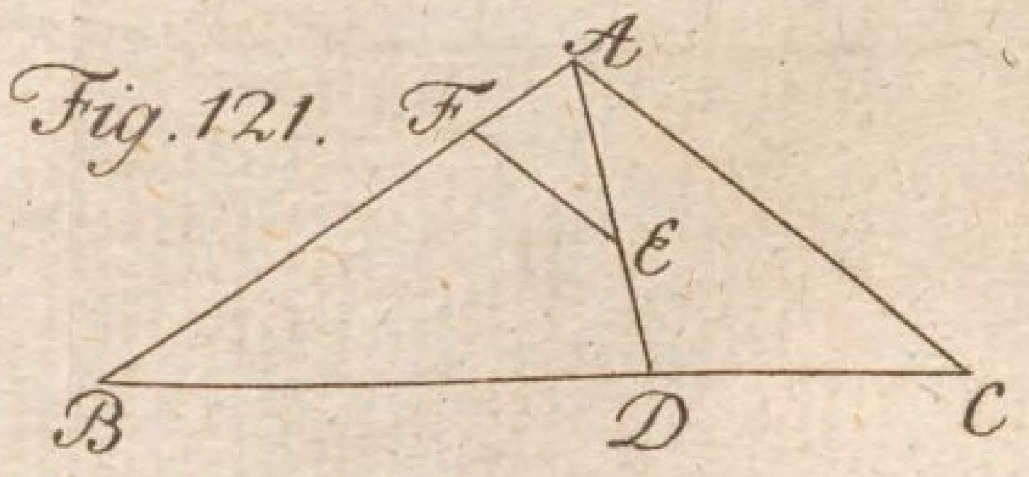


Fig. 122.

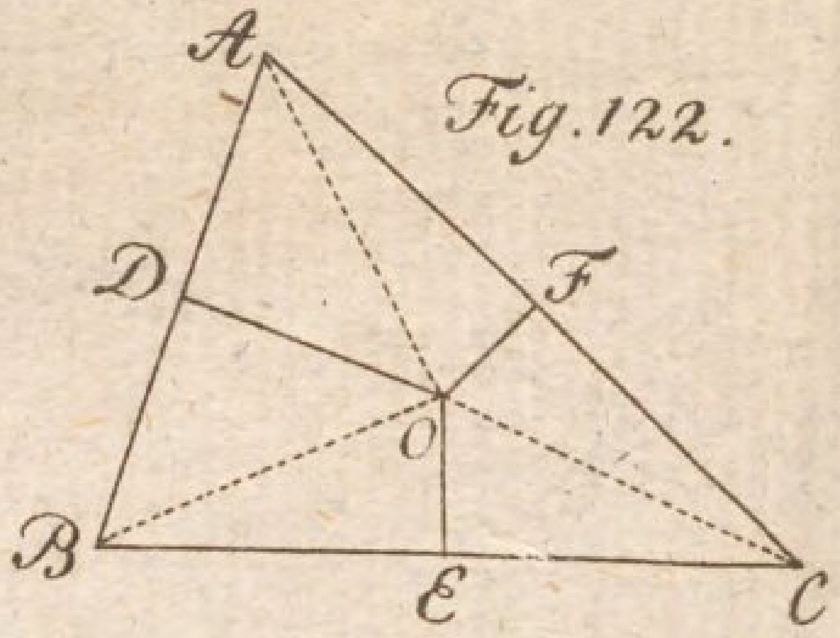


Fig. 124.

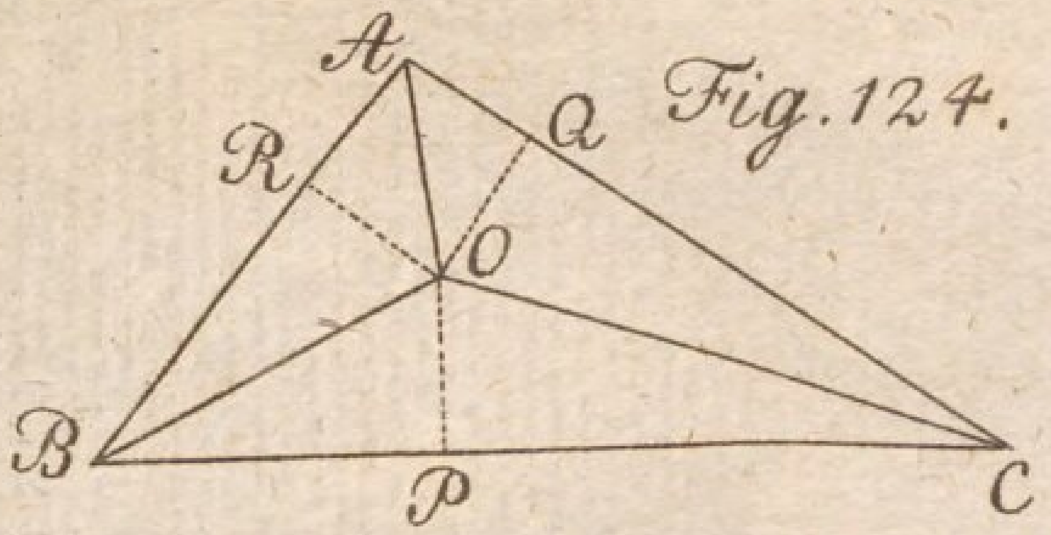


Fig. 123.

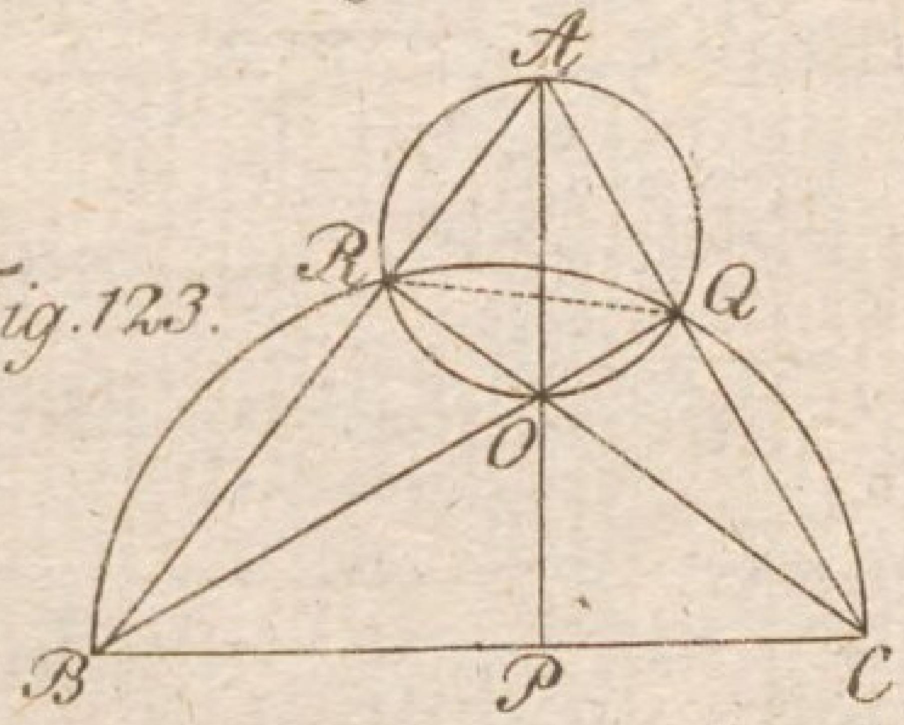


Fig. 125.

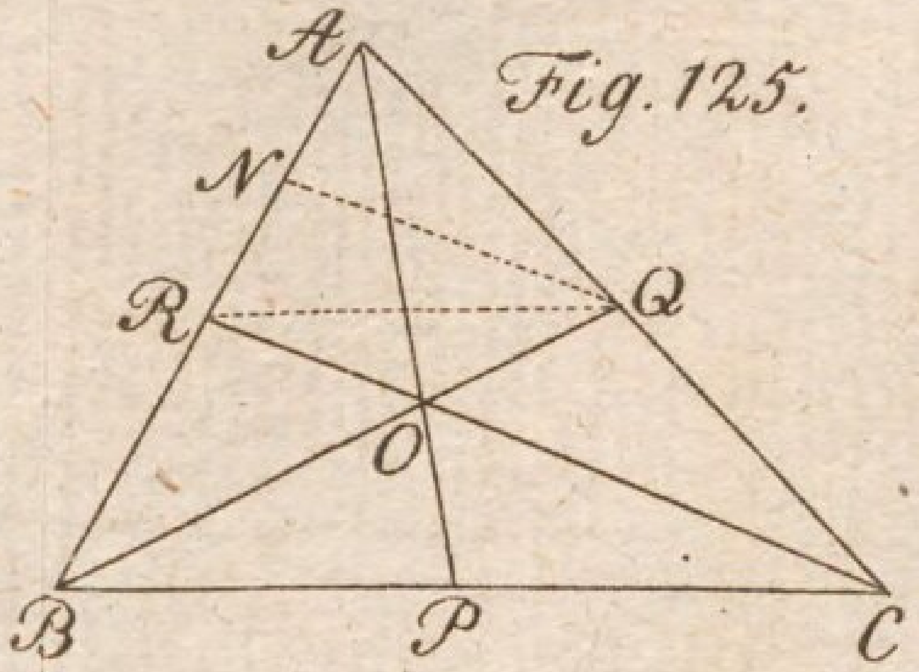


Fig. 126.

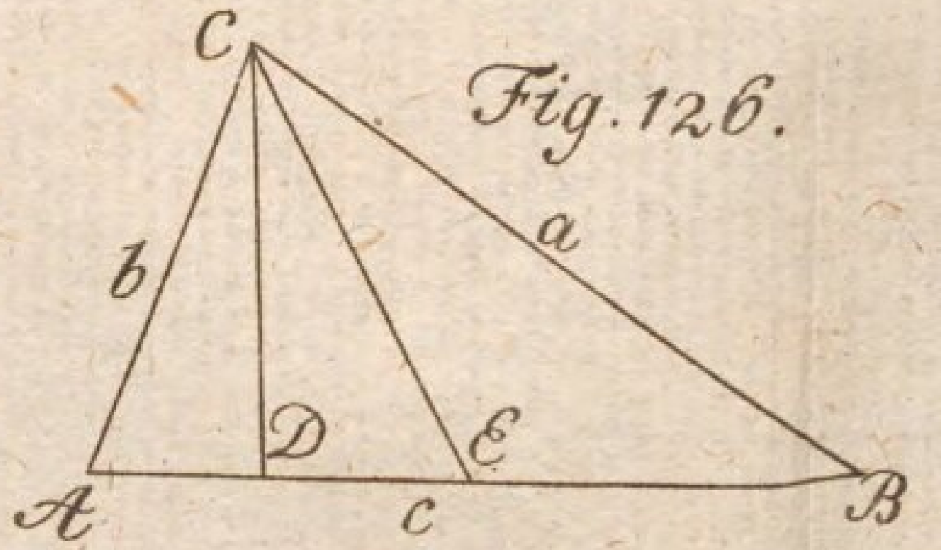


Fig. 127.

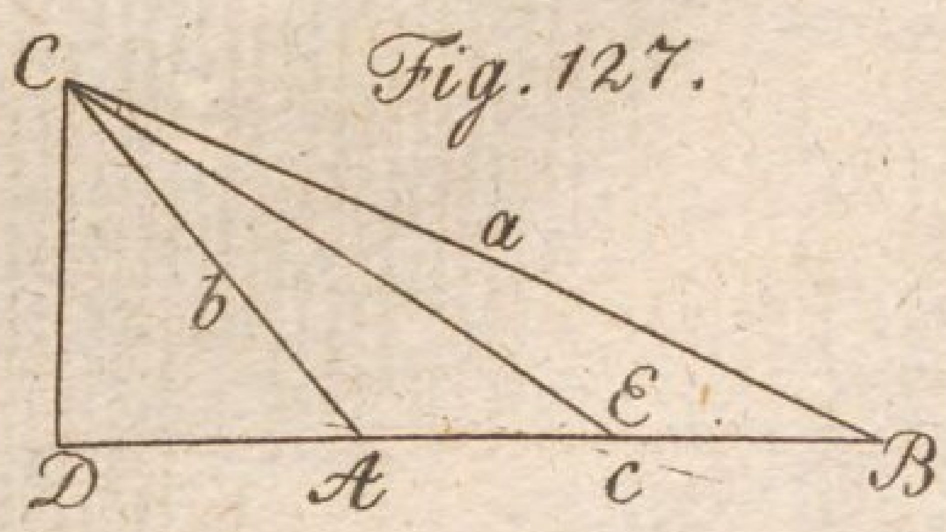


Fig. 128.

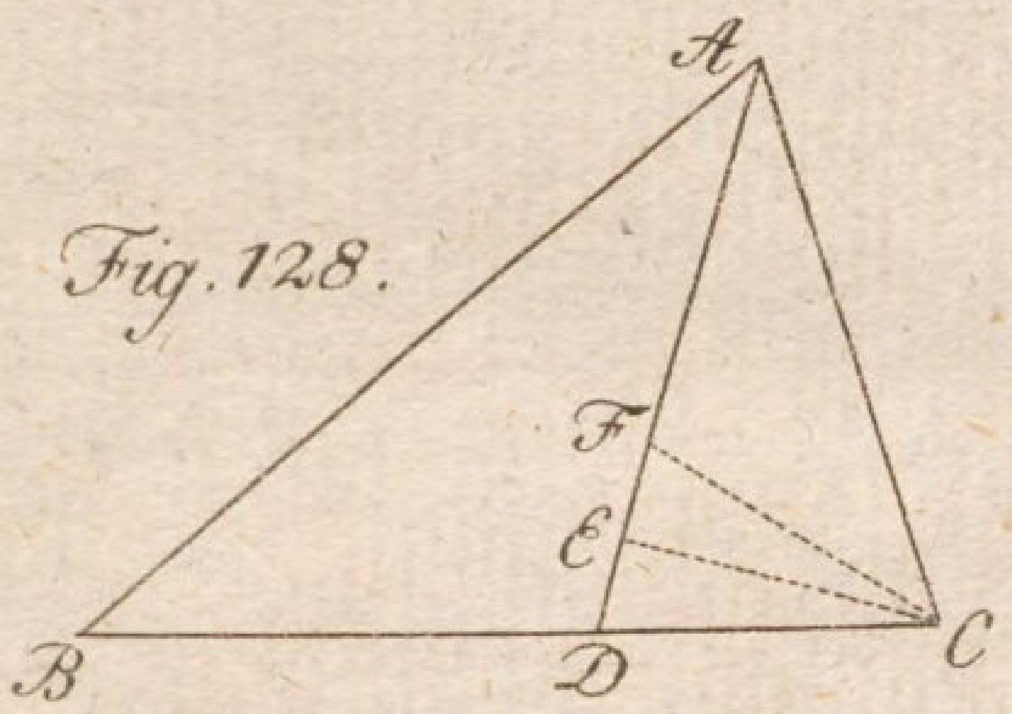


Fig. 129.

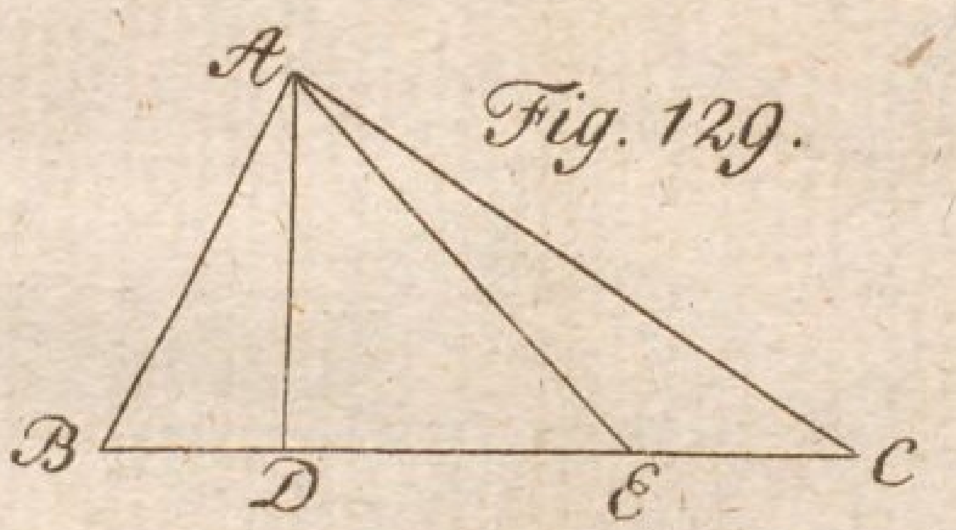


Fig. 130.

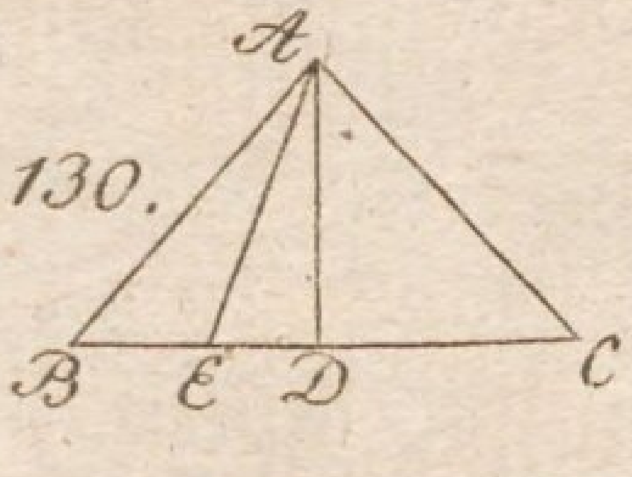


Fig. 131.

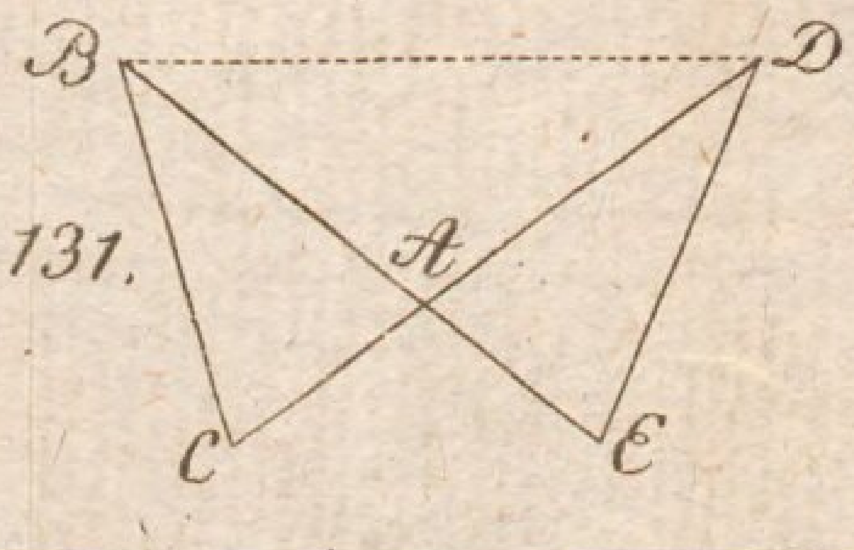
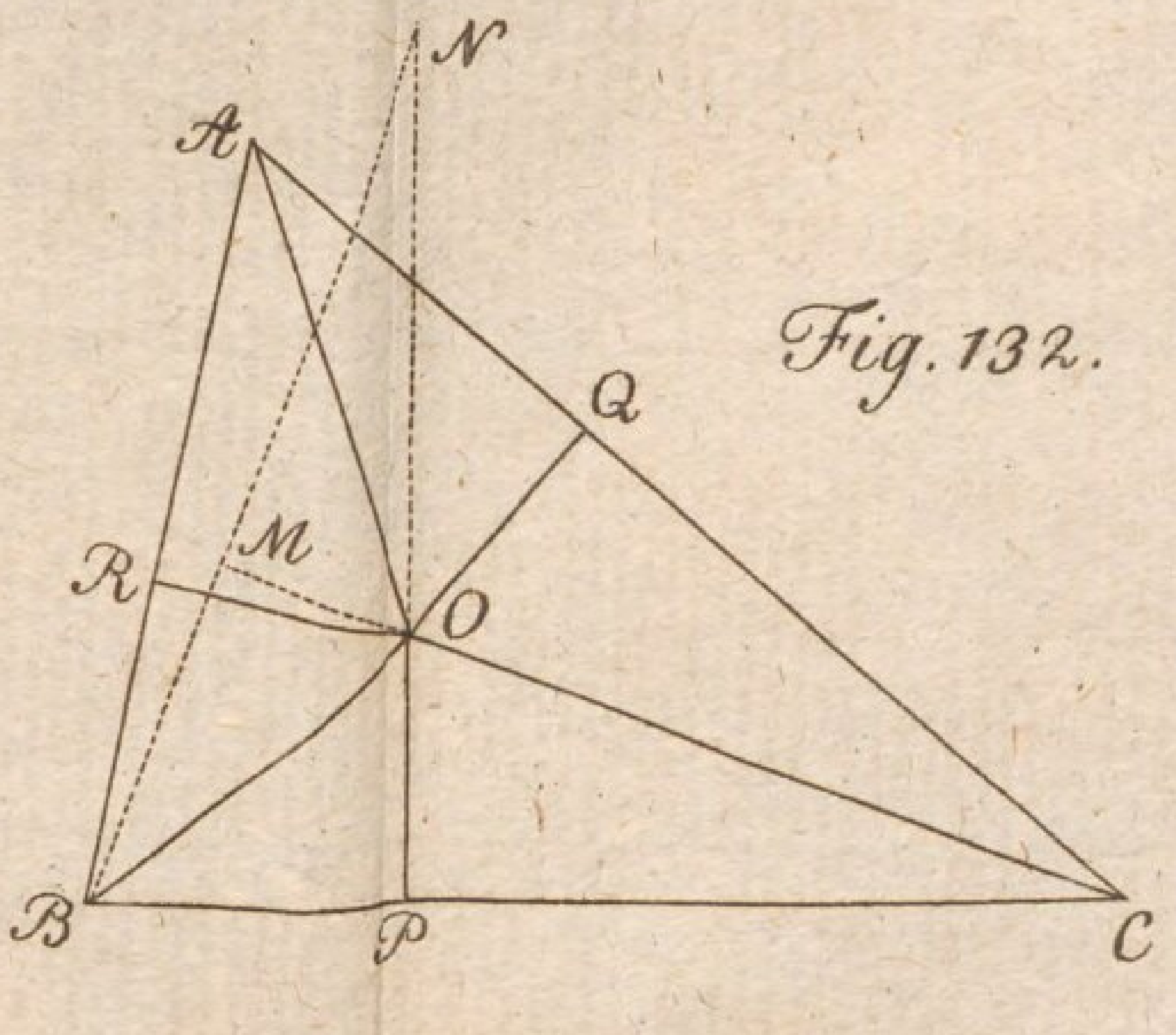


Fig. 132.



Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Klügel, Georg Simon, / Mollweide, Karl Brandan, / Grunert, Johann August,

Mathematisches Wörterbuch oder Erklärung der Begriffe, Lehrsätze, Aufgaben und Methoden der Mathematik mit den nöthigen Beweisen und literarischen Nachrichten begleitet ; in alphabetischer Ordnung
Bd.: ErsterTheil

Leipzig 1803

Math.u. 90 m-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594025-3